Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Banco de Questões

Calculo 1

(*Resolução*)

Organizador: Carlos Alberto Santos Barbosa

Maceio, Brasil
Janeiro de 2015

Apresentação

O objetivo principal desta resolução do Banco de Questões (extraído das avaliações escritas de turmas de Cálculo Unificado da Universidade Federal de Alagoas - UFAL) é auxiliar no desempenho dos estudantes da disciplina Cálculo 1, que durante o processo de conhecimento começam a inserir-se no aprendizado de modo a melhorar seu desempenho acadêmico, mostrando-lhes uma noção de como resolver questões das provas realizadas, visando sempre a clareza e objetividade na obtenção dos resultados e suas implicações referentes ao quesito.

Sumário

Capítulo 1 2005

1.1 1ª Avaliação-21 de Fevereiro de 2005

1.

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{5x^3 - 20x^2 + 15x}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{5x(x-1)(x-3)}$$

$Escrevendo\ f(x)\ dessa\ forma, podemos\ concluir\ que\ D(f) = \mathbb{R} - \{0, 1, 3\}.$
$*\ Assíntotas\ Verticais:$

$-Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ se\ pelo\ menos\ um\ dos\ seguintes\ casos\ ocorrer:$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad ou \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$Vamos\ verificar\ se\ as\ retas\ x = 0; x = 1\ e\ x = 3\ são\ assíntotas\ verticais.$
$*\ Obs: se\ x \to 0^+, então\ x > 0. Logo, 5x > 0.$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{(x-1)}^{\substack{-1\\ \uparrow}}\overbrace{(x^2+x+1)}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{5x}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}\underbrace{(x-1)}_{\substack{\downarrow\\ -1}}\underbrace{(x-3)}_{\substack{\downarrow\\ -3}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{(x-1)(x^2+x+1)}^{\substack{-1\\ \uparrow}}}{\underbrace{5x(x-1)(x-3)}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = -\infty$$

$Logo, a\ reta\ x = 0\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$*\ Obs: se\ x \to 1, então\ x \neq 1. Logo, x - 1 \neq 0\ e, portanto, \dfrac{(x-1)}{(x-1)} = 1, \forall x \neq 1.$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{5x(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{(x^2+x+1)}^{\substack{3\\ \uparrow}}}{\underbrace{5x(x-3)}_{\substack{\downarrow\\ -10}}} = -\frac{3}{10}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{5x(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{(x^2+x+1)}^{\substack{3\\ \uparrow}}}{\underbrace{5x(x-3)}_{\substack{\downarrow\\ -10}}} = -\frac{3}{10}$$

$Logo, a\ reta\ x = 1\ não\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$
$*\ Obs: se\ x \to 3^+, então\ x > 3. Logo, x - 3 > 0.$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{\overbrace{(x-1)}^{\substack{2\\ \uparrow}}\overbrace{(x^2+x+1)}^{\substack{13\\ \uparrow}}}{\underbrace{5x}_{\substack{\downarrow\\ 15}}\underbrace{(x-1)}_{\substack{\downarrow\\ 2}}\underbrace{(x-3)}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{(x-1)(x^2+x+1)}^{\substack{26\\ \uparrow}}}{\underbrace{5x(x-1)(x-3)}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$

$Logo, a\ reta\ x = 3\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$* \textit{Assíntotas Horizontais}:$

$-$*Dizemos que a reta* $y = a$ é *uma assíntota horizontal se ocorrer um dos seguintes casos*:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \qquad ou \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{5x^3-20x^2+15x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(5-\frac{20}{x}+\frac{15}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^3}}{5-\frac{20}{x}+\frac{15}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 5 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{20}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{15}{x^2}} = \frac{1-0}{5-0+0} = \frac{1}{5}.$$

Logo, a reta $y = {}^{1}/_{5}$ é *uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{5x^3-20x^2+15x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(5-\frac{20}{x}+\frac{15}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x^3}}{5-\frac{20}{x}+\frac{15}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 5 - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{20}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{15}{x^2}} = \frac{1-0}{5-0+0} = \frac{1}{5}.$$

Obtivemos a mesma reta em ambos os cálculos.

Logo, temos as retas $x = 0$, $x = 3$ *e* $y = {}^{1}/_{5}$ *como assíntotas ao gráfico de* $f(x)$.

2.

$a)$ $$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} = \lim_{x\to2} \frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{x^3-8} \cdot \frac{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to2} \frac{x-2}{(x^3-8)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} =$$

$$\lim_{x\to2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to2} \frac{1}{\underbrace{(x^2+2x+4)}_{\downarrow\, 12}\underbrace{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}_{\downarrow\, 4}} = \frac{1}{48}$$

$* \textit{Obs}$: *se* $x \to 2$, *então* $x \neq 2$. *Logo*, $x - 2 > 0$ *e, portanto*, $\frac{(x-2)}{(x-2)} = 1, \forall x \neq 2$.

$b)$ $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$. *Obs*: $|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$; *se* $x \to 0^+$, *então* $x > 0$. *Logo*, $|x| = x$.

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{0}{x}\right) = \lim_{x\to0^+} 0 = 0.$$

$c)$ $\lim\limits_{x\to0} x^{10} sen\left(\frac{50\pi}{\sqrt[3]{x}}\right)$

$*$ *Pela desigualdade trigonométrica temos*:

$$-1 \leq sen\left(\frac{50\pi}{\sqrt[3]{x}}\right) \leq 1$$

Multiplicando todos os membros da desigualdade por x^{10} *temos*:

$$-x^{10} \leq x^{10} sen\left(\frac{50\pi}{\sqrt[3]{x}}\right) \leq x^{10}$$

$$Sejam\ f(x) = -x^{10}, g(x) = x^{10} sen\left(\frac{50\pi}{\sqrt[3]{x}}\right)\ e\ h(x) = x^{10}. Logo, temos$$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$E\ ainda, \lim_{x\to 0} f(x) = 0\ e\ \lim_{x\to 0} h(x) = 0, ou\ seja, \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x)\ , podemos\ garantir\ pelo\ Teorema\ do\ Confronto\ que\ se\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ e\ \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x)\ , então\ \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0. Portanto,$

$$\lim_{x\to 0} x^{10} sen\left(\frac{50\pi}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} + 10, & se\ x < 2 \\ 2x^3 - x, & se\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} + 10, & se\ x < 2 \\ 2x^3 - x, & se\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$*\ Obs: se\ x < 2\ então\ x \neq 2. Logo, x - 2 \neq 0\ e, portanto, \frac{(x-2)}{(x-2)} = 1, x \neq 2.$$

$Sendo\ assim, podemos\ reescrever\ f(x)\ da\ seguinte\ forma:$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 + 10, & se\ x < 2 \\ 2x^3 - x, & se\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 12, & se\ x < 2 \\ 2x^3 - x, & se\ x \geq 2 \end{cases}$$

$a)\ Como\ f(x)$ é $uma\ função\ sentencial, na\ qual\ ambas\ as\ sentenças\ são\ funções\ polinomiais\ não\ racionais\ , então\ elas\ são\ contínuas\ em\ todo\ seu\ domínio\ de\ abrangência. Logo, f(x)$ é $contínua\ para\ todo\ x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty).$

$Basta\ verificarmos\ se\ f(x)$ é $contínua\ em\ x = 2, onde\ há\ mudança\ de\ sentença\ na\ função.$

$*\ Obs: se\ x \to 2^+, então\ x > 2. Logo, f(x) = 2x^3 - x$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x^3 - x) = \lim_{x\to 2^+} 2x^3 - \lim_{x\to 2^+} x = 16 - 2 = 14.$$

$*\ Obs: se\ x \to 2^-, então\ x < 2. Logo, f(x) = x + 12.$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x + 12) = \lim_{x\to 2^+} x + \lim_{x\to 2^+} 12 = 2 + 12 = 14.$$

$Logo, \lim_{x\to 2} f(x) = 14.$

$* f(2) = 2.2^3 - 2 = 16 - 2 = 14.$

$Como \lim_{x\to 2} f(x) = f(2), então\ f(x)$ é $contínua\ em\ x = 2.$

$Portanto, concluímos\ que\ f(x)$ é $contínua\ para\ todo\ x \in \mathbb{R}.$

$b)\ Tome\ f(2) = 14, e\ calculemos\ f(3). Então, temos:$
$f(3) = 2.3^3 - 3 = 54 - 3 = 51.$

$Seja\ c \in \mathbb{R}\ tal\ que\ f(c) = 15. Como\ f(x)$ é $uma\ função\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [2,3]\ e\ \ f(2) < f(c) < f(3), podemos\ garantir\ pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ que\ existe\ algum\ c \in (2,3)\ tal\ que\ f(c) = 15.$

4.

$$h(x) = x|x-1|$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & se\ x \geq 1 \\ -(x-1), & se\ x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - x, & se\ x \geq 1 \\ -x^2 + x, & se\ x < 1 \end{cases}$$

$a)\ Primeiro\ vamos\ verificar\ se\ h(x)$ é $contínua\ em\ x = 1.$
$* h(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0.$
$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 - x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 - \lim_{x\to 1^+} x = 1 - 1 = 0.$
$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x^2 + x) = \lim_{x\to 1^-} -x^2 + \lim_{x\to 1^-} x = -1 + 1 = 0.$
$Como\ \lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^-} h(x)\ , então \lim_{x\to 1} h(x) = 0.$

$Temos, portanto, que\ \lim_{x\to 1} h(x) = f(1). Logo, h(x)$ é $contínua\ em\ x = 1.$

$$h_+'(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} x = 1.$$

$$h_-'(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} x = -1.$$

$* Como\ as\ derivadas\ laterais\ em\ x = 1\ são\ diferentes, ou\ seja, h_+'(1) \neq h_-'(1),$
$então\ h(x)\ não$ é $derivável\ em\ x = 1.$

$b)\ Vamos\ verificar\ se\ o\ ponto\ (2,2)\ pertence$ à $h(x).$
$h(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2.$

$Do\ Cálculo\ 1\ sabemos\ que\ o\ coeficiente\ angular\ de\ uma\ reta\ tangente\ num\ ponto$ é $dado\ pelo\ valor\ da\ derivada\ da\ função\ naquele\ ponto.$

$Dado\ um\ ponto\ (x_o, y_o)\ e\ (m)\ o\ coeficiente\ angular\ de\ uma\ reta\ temos:$

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

$Onde, m = h'(2).$ $Logo,$

$$y - 2 = h'(2)(x - 2)$$

$$h'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3.$$

$Logo, a\ equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto$ $(2, 2)$ é:

$$y - 2 = 3(x - 2)$$
$$y - 2 = 3x - 6$$
$$y = 3x - 4$$

Capítulo 2 2007

2.1 1ª Prova-15 de Setembro de 2007

1.

$$f(x) = |x - 3|$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & se\ x \geq 3 \\ -(x - 3), & se\ x < 3 \end{cases}$$

$a)$ *Dizemos que uma função* $f(x)$ *é contínua no ponto* $x = a$ *se, e somente se,*

$$1)\ f(a)\ existe;$$
$$2)\ \lim_{x \to a} f(x)\ \ existe;$$
$$3)\ f(a) = \lim_{x \to a} f(x).$$

Procedendo essa condição para $x = 3$ *temos:*

$1)\ f(3) = |3 - 3| = |0| = 0.$
$2)\ \lim_{x \to 3} f(x)$. *Calculando os limites laterais, temos:*
$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x - 3) = \lim_{x \to 3^+} x - \lim_{x \to 3^+} 3 = 3 - 3 = 0.$
$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (-x + 3) = \lim_{x \to 3^+} -x + \lim_{x \to 3^+} 3 = -3 + 3 = 0.$
Portanto, como $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x)$ *então* $\lim_{x \to 3} f(x) = 0.$
$3) f(3) = \lim_{x \to 3} f(x) = 0.$
$*$ *Logo,* f *é contínua em* $x = 3.$

$*$ *Analisando a diferenciabilidade de* f *em* $x = 3$ *temos:*

$$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x - 3 - 0}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x - 3)}{(x - 3)} = 1.$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-(x - 3) - 0}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} -\frac{(x - 3)}{(x - 3)} = -1.$$

Como $f'_+(3) \neq f'_-(3)$ *temos que* f *não é derivável em* $x = 3.$

$b)\ x^2 = x^3 + 2 \rightarrow x^3 - x^2 + 2 = 0$
Seja $f(x) = x^3 - x^2 + 2.$ *Calculemos* $f(-2)$ *e* $f(0).$
$f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 2 = -8 - 4 + 2 = -10.$
$f(0) = 0^3 - 0^2 + 2 = 0 - 0 + 2 = 2.$
$f(c) = 0.$
Como f *é uma função polinomial e, portanto, contínua no intervalo fechado* $[-2,0]$, *e* $f(-2) < f(c) < f(0)$, *pelo Teorema do Valor Intermediário existe algum* $c \in (-2,0)$ *tal que* $f(c) = 0$. *De modo que* c *é um número cujo quadrado é igual ao seu cubo somado com* 2.

2.

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x}$$

Pela definição de derivada de uma função num ponto, temos as seguintes expressões:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

Ou, fazendo $\Delta x = x - x_o$ *obtemos a seguinte forma para* $f'(x_o)$:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Logo, $f'(1)$ *pode ser obtido utilizando qualquer uma das expressões acima. Utilizando a segunda, temos:*

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x^2 + 7x} - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{2x^2 + 7x} - 3\right)}{x - 1} \cdot \frac{\left(\sqrt{2x^2 + 7x} + 3\right)}{\left(\sqrt{2x^2 + 7x} + 3\right)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 7x - 9}{(x - 1)\left(\sqrt{2x^2 + 7x} + 3\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(2x + 9)}{(x - 1)\left(\sqrt{2x^2 + 7x} + 3\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x + 9)}{\left(\sqrt{2x^2 + 7x} + 3\right)} =$$

$$\frac{2 + 9}{\sqrt{9} + 3} = \frac{11}{6}.$$

A equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ *no ponto* $x = 1$ é:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$
$$y - 3 = \frac{11}{6}(x - 1)$$
$$6y - 18 = 11x - 11$$
$$6y = 11x + 7$$
$$y = \frac{11}{6}x + \frac{7}{6}$$

3.

$a)$ *Mostrar que* $\lim_{x \to 6}\left(3 - \frac{x}{4}\right) = \frac{3}{2}$, é *provar que sendo* $f(x) = 3 - \frac{x}{4}$ *uma função definida sobre um intervalo aberto que contém* $x = 6$, $\lim_{x \to 6} f(x) = \frac{3}{2}$ *se para todo* $\varepsilon > 0$ *há um número correspondente* $\delta > 0$ *tal que* $\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < |x - 6| < \delta$.

$$\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon \rightarrow \left|3 - \frac{x}{4} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{3}{2} - \frac{x}{4}\right| < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{4}|x - 6| < \varepsilon \therefore |x - 6| < 4\varepsilon$$

$*$ $|x - 6| < \delta$ *, isso sugere que poderíamos escolher* $\delta = 4\varepsilon$.

$*$ *Prova! (mostrando que a escolha de* δ *funciona). Dado* $\varepsilon > 0$ *, se* $0 < |x - 6| < \delta$, *então* $\left|\frac{3}{2} - \frac{x}{4}\right| < \delta \rightarrow \frac{1}{4}|x - 6| < \frac{1}{4}\delta = \frac{1}{4}(4\varepsilon) \rightarrow \frac{1}{4}|x - 6| < \varepsilon$.

Portanto, pela definição de limite,

$$\lim_{x \to 6}\left(3 - \frac{x}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

$b)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{3x-4}.Encontrar\ as\ assíntotas$

$Primeiramente\ vamos\ definir\ o\ domínio\ da\ função\ f:$

$1) 4x^2-1\geq 0$

$$+ + + + + + -\tfrac{1}{2} - - - - - \tfrac{1}{2} + + + + + +$$

$Logo, x\leq -\dfrac{1}{2}\ ou\ x\geq \dfrac{1}{2}.$

$2)\ 3x-4\neq 0\rightarrow x\neq \dfrac{4}{3}.$

$Dessa\ forma, temos\ que\ D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}|x\leq -\dfrac{1}{2}\ ou\ x\geq\dfrac{1}{2}\ , x\neq\dfrac{4}{3}\right\}.$

$*\ Assíntotas\ Verticais:$

$-Dizemos\ que\ a\ reta\ x=a$ é $uma\ assíntota\ vertical\ se\ pelo\ menos\ um\ dos\ seguintes\ casos\ ocorrer:\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty\quad ou\quad \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$

$Verificando\ se\ a\ reta\ x=\dfrac{4}{3}$ é $uma\ assíntota\ vertical:$

$$\lim_{x\to {}^4/_3{}^+} f(x)=\lim_{x\to {}^4/_3{}^+}\frac{\sqrt{4x^2-1}}{\underbrace{3x-4}_{\downarrow\ 0^+}}=+\infty.$$

$Logo, a\ reta\ x=\dfrac{4}{3}$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$*\ Assíntotas\ Horizontais:$

$-Dizemos\ que\ a\ reta\ y=a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a\qquad ou\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}}{3x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^2-1}}{|x|}}{\frac{3x-4}{|x|}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{3x-4}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2-1}{x^2}}}{3-\frac{4}{x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{4}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{4}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\frac{1}{x^2}\right)}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{4}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}4-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}(3)-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}}=\frac{\sqrt{4-0}}{3-0}=\frac{2}{3}.$$

$Logo, a\ reta\ y=\dfrac{2}{3}$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}}{3x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^2-1}}{|x|}}{\frac{3x-4}{|x|}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{3x-4}{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2-1}{x^2}}}{-3+\frac{4}{x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{-3+\frac{4}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{4}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\frac{1}{x^2}\right)}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{4}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}4-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}(-3)+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}}=\frac{\sqrt{4-0}}{-3+0}=-\frac{2}{3}.$$

$Logo, a\ reta\ y=-\dfrac{2}{3}$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$*\ Obs:em\ ambos\ os\ cálculos\ utilizamos\ o\ artifício\ de\ dividir\ ambos\ os\ membros\ da$

$fração\ por\ |x|. Note\ que, se\ x \to +\infty\ então\ |x| = x\ e\ se\ x \to -\infty, |x| = -x. Em\ ambos,$
$vale\ a\ notação\ |x| = \sqrt{x^2}.$

4.

$$a)\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8} = \lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3\right)}{x-8}.\frac{\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3\right)}{\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3\right)} = \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(x-8)\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3\right)} = \lim_{x\to 8}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3\right)}$$

$$= \frac{1}{(4+4+4)(3+3)} = \frac{1}{(12)(9)} = \frac{1}{72}.$$

$b) f(x) = 3 + \frac{[\![x]\!]}{2}. Calcular\ os\ limites\ laterais\ no\ ponto\ em\ que\ x = 3.$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(3+\frac{[\![x]\!]}{2}\right) = \lim_{x\to 3^+} 3 + \lim_{x\to 3^+}\frac{[\![x]\!]}{2} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$* Obs: se\ x \to 3^+, então\ x > 3. Logo, [\![x]\!] = 3$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(3+\frac{[\![x]\!]}{2}\right) = \lim_{x\to 3^-} 3 + \lim_{x\to 3^-}\frac{[\![x]\!]}{2} = 3 + \frac{2}{2} = 4$$

$* Obs: se\ x \to 3^-, então\ x < 3. Logo, [\![x]\!] = 2.$

5. $s = 256t - 16t^2$

$a)\ v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t) = 256 - 32t \to v(t) = 256 - 32t$

$\therefore v(6) = 256 - 32 \times 6 = 256 - 192 = 64\ m/s$

$b)\ v(t) = 0 \to 256 - 32t = 0$

$32t = 256$

$t = 8s$

$c)\ s(8) = 256 \times 8 - 32 \times 8$

$s(8) = 2.048 - 256$

$s(8) = 1.792m$

2.2 2ª Prova-05 de Outubro de 2007

1.

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$Por\ diferenciação\ implícita\ temos:$$
$$2x + 2y.y' = 0$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$

$*\ Equação\ da\ reta\ que\ contém\ o\ segmento\ OP:$

$$y = m.x$$

$Onde\ m\ é\ o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ que\ é\ dado\ como\ m = tg\alpha\ ,sendo\ \alpha\ o$ $ângulo\ formado\ entre\ o\ segmento\ OP\ e\ o\ eixo\ dos\ x, ou\ seja, \alpha = 75°.$

$$y = tg75°.x$$

$$tg75° = tg(30° + 45°) = \frac{tg30° + tg45°}{1 - tg30°.tg45°} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$*\ A\ equação\ de\ uma\ reta\ tangente\ à\ circunferência\ x^2 + y^2 = 4\ é\ dada\ pela$ $seguinte\ expressão:$

$$y - y_o = -\frac{x_o}{y_o}(x - x_o)$$
$$y.y_o - y_o^2 = -x.x_o + x_o^2$$
$$y.y_o = -x.x_o + x_o^2 + y_o^2$$
$$y.y_o = -x.x_o + 4$$
$$y = -\frac{x_o}{y_o}x + \frac{4}{y_o}$$

$*\ Como\ o\ segmento\ OP\ é\ perpendicular\ à\ reta\ tangente\ no\ ponto\ P, então\ o$ $coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente\ é\ o\ inverso\ simétrico\ do\ coeficiente\ angular$ $da\ reta\ que\ contém\ o\ segmento\ OP.$

$$-\frac{x_o}{y_o} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$Devemos\ provar\ que\ \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = tg165°. Pois, esse\ é\ o\ ângulo\ formado\ entre\ a\ reta$ $tangente\ e\ a\ direção\ positiva\ do\ eixo\ dos\ x.$

$$tg165° = tg(120° + 45°) = \frac{tg120° + tg45°}{1 - tg120°.tg45°} = \frac{-\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$*\ Portanto, a\ reta\ tangente\ forma\ um\ ângulo\ de\ 15°\ com\ a\ direção\ negativa\ do$ $eixo\ dos\ x.$

2.

$a)\ 3x.arctg(x + y) + 107 = x^2y$

$Por\ diferenciação\ implícita\ temos:$

$$\frac{d}{dx}\big(3x.arctg(x+y)\big) + \frac{d}{dx}(107) = \frac{d}{dx}(x^2y)$$

$$3arctg(x+y) + 3x.\frac{1+y'}{1+(x+y)^2} + 0 = 2xy + x^2y'$$

$$3arctg(x+y)+\frac{3x+3xy'}{1+(x+y)^2}=2xy+x^2y'$$
$$3arctg(x+y)[1+(x+y)^2]+3x+3xy'=2xy[1+(x+y)^2]+x^2y'[1+(x+y)^2]$$
$$y'[x^2(1+(x+y)^2)-3x]=3arctg(x+y)[1+(x+y)^2]+3x-2xy[1+(x+y)^2]$$
$$y'=\frac{3arctg(x+y)[1+(x+y)^2]+3x-2xy[1+(x+y)^2]}{x^2[1+(x+y)^2]-3x}$$

$b)\ f(x)=\log_3 5^{x^2+1}.\ Determinar\ f'(x).$
$Seja\ u=x^2+1$
$v=5^u$
$y=f(v)=\log_3 v$
$Pela\ regra\ da\ cadeia\ temos:$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}.\frac{dv}{du}.\frac{dy}{dv}$$
$$\frac{dy}{dx}=(2x).5^u\ln(5).\frac{1}{v.\ln(3)}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x.5^{x^2+1}\ln(5)}{5^{x^2+1}\ln(3)}$$
$$f'(x)=2x.\frac{\ln(5)}{\ln(3)}$$

3.
$f(x)=2sen(x)+sen^2(x)$
$f'(x)=2\cos(x)+2.sen(x).\cos(x)$
$Encontrar\ os\ pontos\ no\ intervalo\ de\ [0{,}2\pi]\ onde\ a\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ f(x)$ é $horizontal.\ (Encontrar\ os\ valores\ de\ x\ no\ intervalo\ [0,2\pi]\ onde\ f'(x)=0)$
$f'(x)=0\rightarrow 2\cos(x)+2.sen(x).\cos(x)=0$
$$2\cos(x)[1+sen(x)]=0$$
$$\begin{cases}2\cos(x)=0\\1+sen(x)=0\end{cases}$$
$*\ Da\ primeira\ sentença\ temos:$
$\cos(x)=0\rightarrow x=\frac{\pi}{2}\ e\ x=\frac{3\pi}{2}$
$*\ Da\ segunda\ sentença\ temos:$
$1+2sen(x)=0$
$sen(x)=-1\rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$
$Logo, os\ pontos\ no\ intervalo\ [0,2\pi]\ onde\ a\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ f(x)$ é $horizontal, são: \left(\frac{\pi}{2},3\right),\left(\frac{3\pi}{2},-1\right).$

$*\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2sen\left(\frac{\pi}{2}\right)+sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=2+1^2=2+1=3.\quad\left(\frac{\pi}{2},3\right);$

$*\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)+sen^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1+(-1)^2=-1+1=0.\quad\left(\frac{3\pi}{2},0\right);$

4.

$a)\ y = \dfrac{1}{sen(x) + \cos(x)}$. *Encontrar a reta tangente no ponto em que* $x = 0$.

$$y = \frac{1}{sen(0) + \cos(0)} = \frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$y' = \frac{-\big(\cos(x) - sen(x)\big)}{(sen(x) + \cos(x))^2} = \frac{sen(x) - \cos(x)}{[sen(x) + \cos(x)]^2}$$

$$y'(0) = \frac{sen(0) - \cos(0)}{[sen(0) + \cos(0)]^2} = \frac{0-1}{(0+1)^2} = \frac{-1}{1} = -1.$$

$*$ *A equação da reta tangente no ponto* $(0{,}1)$ é:

$$y - 1 = -1(x - 0)$$
$$y - 1 = -x$$
$$y = -x + 1$$

$b)\ f(x) = sen^2 3^{arctg(x^4)}$. *Determinar* $f'(x)$.

Seja $u = x^4;\ v = arctg(u)\ ;\ z = 3^v;\ y = f(z) = sen^2(z)$.

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}.\frac{dv}{du}.\frac{dz}{dv}.\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3).\frac{1}{1+u^2}.3^v \ln(3)\,.\,2sen(z).\cos(z)$$

$$y' = f'(x) = \frac{4x^3.\,3^{arctg(x^4)}.\ln(3).sen(2z)}{1+x^8}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3.\,3^{arctg(x^4)}.\ln(3).sen\big(2.\,3^{arctg(x^4)}\big)}{1+x^8}$$

5.

$y = 9 - x^2$. *Encontrar as inclinações das retas tangentes no ponto* $(2,1)$

Note que o ponto $(2{,}1)$ *não pertence* à *curva* $y = 9 - x^2$.

Esse ponto pode pertencer às *retas tangentes* à *curva*!

Seja a equação da reta tangente dada pela seguinte expressão:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

Onde (x_o, y_o) é *um ponto pertencente* à *reta, e m o coeficiente angular dado pelo valor da derivada num dado ponto da curva.*

$$y - 1 = y'(x - 2)$$
$$y - 1 = -2x(x - 2)$$
$$9 - x^2 - 1 = -2x^2 + 4x$$
$$x^2 - 4x + 8 = 0$$
$$\Delta = 16 - 32 = -16.$$

Daqui conluímos que não existe $x \in \mathbb{R}$ *que satisfaça a equação acima. Portanto, não existe reta tangente* à *curva* $y = 9 - x^2$ *que passa pelo ponto* $(2{,}1)$. *Logo, não há inclinação*!

$*$ *Obs: caso a curva fosse* $y = 9 - x^3$, *esta sim contém o ponto* $(2{,}1)$. *Teríamos como equação da reta tangente nesse ponto*:

$$y - 1 = y'(2).(x - 2)$$

$$y - 1 = (-3.2^2)(x - 2)$$
$$y - 1 = -12(x - 2)$$
$$y - 1 = -12x + 24$$
$$y = -12x + 25$$

$\rightarrow$ *Neste caso, a inclinação da reta* é $\alpha = arctg(-12)$.

2.3 1ª Prova-06 de Outubro de 2007

1.

$a)\ f(x) = x.sen\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right)$. *Provar que* $f(x)$ *possui assíntota horizontal.*

−*Dizemos que a reta* $y = a$ *é uma assíntota horizontal se um dos casos a seguir ocorrer*: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ *ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x.sen\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. *Fazendo a substituição* $\theta = \frac{1}{x}$ *e ajustando o limite, temos*:

$*$ *Se* $x \to +\infty$, *então* $\theta \to 0$.

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{sen(\theta)}{\theta} - cos(\theta)\right) = \lim_{\theta\to 0}\frac{sen(\theta)}{\theta} - \lim_{\theta\to 0}\cos(\theta) = 1 - 1 = 0.$$

Portanto, a reta $y = 0$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x.sen\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. *Fazendo a substituição* $\theta = \frac{1}{x}$ *e ajustando o limite, temos*:

$*$ *Se* $x \to -\infty$, *então* $\theta \to 0$.

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{sen(\theta)}{\theta} - cos(\theta)\right) = \lim_{\theta\to 0}\frac{sen(\theta)}{\theta} - \lim_{\theta\to 0}\cos(\theta) = 1 - 1 = 0.$$

Portanto, a reta $y = 0$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

$b)$ *Determinar* $\frac{dy}{dx}$, *onde* $x.\arccos(x+y) - \pi = y^2$.

Pela derivação implícita temos:

$$\arccos(x+y) + x\left(\frac{-(1+y')}{\sqrt{1-(x+y)^2}}\right) - 0 = 2y.y'$$

$$\arccos(x+y)\left[\sqrt{1-(x+y)^2}\right] - x - xy' = 2y.y'\left[\sqrt{1-(x+y)^2}\right]$$

$$y'\left[2y\sqrt{1-(x+y)^2} + x\right] = \arccos(x+y)\left[\sqrt{1-(x+y)^2}\right] - x$$

$$y' = \frac{\arccos(x+y)\left[\sqrt{1-(x+y)^2}\right] - x}{2y\sqrt{1-(x+y)^2} + x}$$

2.

$y = 2x^2 - 1$. *Determinar a equação das retas tangentes á curva que passam pelo ponto* $(4, 13)$.

$y' = 4x$

$*$ *A equação de uma reta dado um ponto pertencente à ela e seu coeficiente angular temos*:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$
$$y - 13 = 4x(x - 4)$$
$$2x^2 - 1 - 13 = 4x^2 - 16x$$

$$2x^2 - 16x + 14 = 0$$
$$x^2 - 8x + 7 = 0$$
$$\Delta = 64 - 28 = 36$$
$$x = \frac{8 \pm 6}{2} \rightarrow x' = 7 \; e \; x'' = 1$$
$* \; Para \; x = 1, temos \; y' = 4$
$Logo, a \; equação \; da \; reta \; tangente \; tem \; a \; seguinte \; forma:$
$$y - 13 = 4(x - 4)$$
$$y - 13 = 4x - 16$$
$$y = 4x - 3$$
$* \; Para \; x = 7, temos \; y' = 28$
$Logo, a \; equação \; da \; reta \; tangente \; tem \; a \; seguinte \; forma:$
$$y - 13 = 28(x - 4)$$
$$y - 13 = 28x - 112$$
$$y = 28x - 99$$
3.
$f(x) = 3x + |x| \; e \; g(x) = \frac{3x}{4} - \frac{|x|}{4}$; $Provar \; que \; f'(0) \; e \; g'(0) \; não \; existem, mas \; que$ $(f \circ g)'(0) \; existe.$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{4x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{4x}{x} = 4.$$
$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x}{x} = 2.$$
$* \; Como \; f'_+(0) \neq f'_-(0) \;, então \; f \; não \; é \; derivável \; em \; x = 0.$
$$g'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{2} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}.$$
$$g'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x} = 1.$$
$* \; Como \; g'_+(0) \neq g'_-(0) \;, então \; g \; não \; é \; derivável \; em \; x = 0.$
$-Vamos \; calcular \; (f \circ g)(x):$
$$f(g(x)) = 3.g(x) + |g(x)| = \frac{9x}{4} - \frac{3|x|}{4} + \left|\frac{3x}{4} - \frac{|x|}{4}\right|$$
$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{9x}{4} - \frac{3x}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{x}{4}, & se \; x \geq 0 \\ \frac{9x}{4} + \frac{3x}{4} - \left(\frac{3x}{4} + \frac{x}{4}\right), & se \; x < 0 \end{cases}$$
$$f(g(x)) = \begin{cases} 2x, & se \; x \geq 0 \\ 2x, & se \; x < 0 \end{cases}$$
$Logo, f(g(x)) = 2x.$
$$(f \circ g)'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{6x}{4} + \frac{2x}{4} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{x} = 2.$$
$$(f \circ g)'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{3x - x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x}{x} = 2.$$

$* \; Como \; (f \circ g)'_+(0) = (f \circ g)'_-(0) \;, então \; f \circ g \; é \; derivável \; em \; x = 0.$
$E \; (f \circ g)'(0) = 2.$

4.

$a)\ y = \dfrac{tg(x) - 1}{\sec(x)}\ .Determinar\ a\ reta\ tangente\ em\ x = 0.$

$*\ Para\ x = 0\ temos\ y = \dfrac{tg(0) - 1}{\sec(0)} = \dfrac{0 - 1}{1} = -1.\ (0, -1)$

$y' = \dfrac{sec^2(x).\sec(x) - [tg(x) - 1]\sec(x)\,.\,tg(x)}{sec^2(x)}$

$y' = \dfrac{sec^3(x) - \sec(x)\,.\,tg^2(x) + \sec(x)\,.\,tg(x)}{sec^2(x)}$

$y' = \dfrac{sec^2(x) - tg^2(x) + tg(x)}{sec(x)}\ ; \quad tg^2(x) + 1 = sec^2(x) \rightarrow sec^2(x) - tg^2(x) = 1$

$y' = \dfrac{1 + tg(x)}{sec(x)} \rightarrow y'(0) = \dfrac{1 + tg(0)}{sec(0)} = \dfrac{1 + 0}{1} = 1.$

$*\ Logo, equação\ da\ reta\ tangente\ em\ x = 0$ é:

$$y + 1 = 1(x - 0)$$
$$y + 1 = x$$
$$y = x - 1$$

$b)\ f(x) = cos\left[tg\sqrt{\cos(x)}\right].Determinar\ f'(x).$

$Seja\ u = \cos(x)\,;\, v = \sqrt{u}\,;\, z = tg(v); y = f(z) = \cos(z)$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia\ temos:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}.\frac{dv}{du}.\frac{dz}{dv}.\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(-sen(x)\right).\frac{1}{2\sqrt{u}}.\left(sec^2(v)\right).\left(-sen(z)\right)$$

$$y' = f'(x) = \left(-sen(x)\right).\frac{1}{2\sqrt{\cos(x)}}.(sec^2\sqrt{\cos(x)}).\left(-sen\left(tg\sqrt{\cos(x)}\right)\right)$$

$$f'(x) = \frac{sen(x)sen\left(tg\sqrt{\cos(x)}\right)sec^2\sqrt{\cos(x)}}{2\sqrt{\cos(x)}}$$

$c)\ g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}\ .Determinar\ g'(x).$

$Seja\ u = x + \sqrt{x};\ y = f(u) = \sqrt{u}\ ;$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia\ temos:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}.\frac{dy}{du}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)$$

5.

$a)\ f(x) = 5^{arctg\left(sen(x^2)\right)}.Determinar\ f'(x).$

$Seja\ u = x^2; v = sen(u); z = arctg(v); y = f(z) = 5^z.$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia\ temos:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}.\frac{dv}{du}.\frac{dz}{dv}.\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x).(\cos(u)).\frac{1}{1+v^2}.5^z.\ln(5)$$

$$y' = f'(x) = (2x)(\cos(x^2))\frac{1}{1+sen^2(x^2)}.5^{arctg\left(sen(x^2)\right)}.\ln(5)$$

$$f'(x) = \frac{2x.\cos(x^2).5^{arctg\left(sen(x^2)\right)}.\ln(5)}{1+sen^2(x^2)}$$

$b)\ y = e^{kx}\ .Encontrar\ os\ valores\ de\ k\ que\ satisfazem\ a\ equação\ y'' + 5y' - 6y = 0.$
$y' = ke^{kx}\ ; y'' = k^2e^{kx}.Substituindo\ na\ equação\ temos:$
$k^2e^{kx} + 5ke^{kx} - 6e^{kx} = 0 \rightarrow Como\ e^{kx} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}, dividindo\ todos\ os\ termos\ por\ e^{kx}$
$k^2 + 5k - 6 = 0$
$\Delta = 25 + 24 = 49$
$k = \frac{-5 \pm 7}{2} \rightarrow k' = 1\ e\ k'' = -6.$
$*\ Logo, os\ valores\ de\ k\ que\ satisfazem\ a\ equação\ acima\ são\ 1\ e - 6.$

2.4 4ª Prova-01 de Dezembro de 2007

1.

$a)\ x^4 + 4x + 1000 = 0\ tem, no\ máximo, duas\ raízes\ reais.$

$Seja\ f(x) = x^4 + 4x + 1000.\ f$ é $uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ e\ derivável\ em\ todo\ seu\ domínio.$

$Suponha\ que\ f(x)\ possua\ 1\ raíz\ real\ designada\ por\ c, e\ suponhamos\ que\ f\ tenha\ uma\ segunda\ raíz\ b\ .Sendo\ f\ contínua\ e\ derivável\ no\ intervalo\ [c, b], então, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ existe\ algum\ x \in (c, b)\ tal\ que:$

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = \frac{0 - 0}{b - c} = 0$$

$f'(x) = 4x^3 + 4$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 + 4 = 0 \rightarrow x^3 = -1 \rightarrow x = -1$

$Daí, tiramos\ a\ seguinte\ consideração: c < -1 < b$

$Agora, suponhamos\ que\ f\ possua\ uma\ terceira\ raíz, então\ pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ devemos\ ter\ algum\ x \neq -1\ tal\ que\ f'(x) = 0. Um\ absurdo!\ Pois\ f'(x)$ só $possui\ uma\ raíz. Logo, f(x)\ tem, no\ máximo, duas\ raízes\ reais.$

$b)\ Se\ f$ é $contínua\ no\ intervalo\ [2, 5]\ e\ 1 \leq f'(x) \leq 4\ para\ todo\ x\ em\ (2, 5), mostre\ que\ 3 \leq f(5) - f(2) \leq 12.$

$Sendo\ f\ contínua\ no\ intervalo\ [2, 5]\ e\ derivável\ em\ (2, 5), pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ existe\ algum\ x \in [2,5]\ tal\ que:$

$$f'(x) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2}$$

$Pela\ definição\ dada\ acima\ temos:$

$$1 \leq \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \leq 4$$

$$1 \leq \frac{f(5) - f(2)}{3} \leq 4$$

$$3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$$

2.

$f(x) = ax^2 + bx - c$

$f'(1) = 0\ e\ f(1) = 7\ ;\quad Usando\ essas\ informações\ na\ análise\ da\ função, temos:$

$f(2) = -2$

$f'(x) = 2ax + b$

$f'(1) = 2a + b = 0\ (I)$

$f(1) = a + b - c = 7\ (II)$

$f(2) = 4a + 2b - c = -2\ (III)$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b - c = 7 \\ 4a + 2b - c = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a - c = 7 \rightarrow c = 2; a = -9\ ; b = 18 \\ -c = -2 \end{cases}$$

$*\ Logo, f(x) = -9x^2 + 18x - 2$

3.

$a)\ Usando\ o\ teste\ da\ segunda\ derivada\ para\ a\ função\ f(x) = ax^2 + bx + c\ temos:$

$f'(x) = 2ax + b$
$f''(x) = 2a$
$f''(x) > 0 \rightarrow 2a > 0 \therefore a > 0.$
$Logo, quando\ f''(x) > 0\ temos\ concavidade\ voltada\ para\ cima. Neste\ caso, temos$
$C.V.C\ para\ a > 0.$
$f''(x) < 0 \rightarrow 2a < 0 \therefore\ a < 0.$
$Logo, quando\ f''(x) < 0\ temos\ concavidade\ voltada\ para\ baixo. Neste\ caso, temos$
$C.V.B\ para\ a < 0.$

$b)\ \lim_{x\to 0^+} (cx+1)^{cotg(x)} = e^{-\pi}\ . Determinar\ c.$

$$\lim_{x\to 0^+} (cx+1)^{cotg(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(cx+1)^{cotg(x)}} = \lim_{x\to 0^+} e^{cotg(x).\ln(cx+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(cx+1)}{\frac{1}{cotg(x)}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(cx+1)}{\frac{1}{cotg(x)}}}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(cx+1)}{\frac{1}{cotg(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(cx+1)}{tg(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{c}{cx+1}}{sec^2(x)} = \frac{c}{c+1}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(cx+1)}{\frac{1}{cotg(x)}}} = e^{-\pi} \rightarrow e^{\frac{c}{c+1}} = e^{-\pi}$$

$$\frac{c}{c+1} = -\pi \rightarrow c = -\pi c - \pi \rightarrow c(\pi+1) = -\pi \rightarrow c = -\frac{\pi}{\pi+1}$$

$4. Esboçar\ o\ gráfico\ de\ f(x) = x^2 e^{-x^2}$
$\text{(I)}\ Interseções\ com\ os\ eixos\ coordenados:$
$f(x) = 0 \rightarrow x.e^{-x^2} = 0\ ;\ \ e^{-x^2} \neq 0\ \forall \text{x} \in \mathbb{R}$
$f(x) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0.$
$-Existe\ apenas\ o\ ponto\ (0,0)\ como\ interseção\ com\ os\ eixos.$
$\text{(II)}\ Crescimento\ e\ Decrescimento:$
$f'(x) = 2x.e^{-x^2} + x^2(-2x).e^{-x^2}$
$f'(x) = e^{-x^2}(-2x^3 + 2x)$
$f'(x) = x.e^{-x^2}(-2x^2 + 2)$
Obs: $e^{-x^2} > 0\ , \forall x \in \mathbb{R}$
$Fazendo\ o\ estudo\ do\ sinal\ de\ f'(x), temos:$

$- - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + +$	x
$- - - - (-1) + + + + + + 1 - - - - - - - -$	$(-2x^2 + 2)$
$+ +$	e^{-x^2}
$+ + + + (-1) - - - 0 + + + 1 - - - - - - -$	$f(x) = x.e^{-x^2}(-2x^2 + 2)$

$*\ Logo, f(x)\ é\ crescente\ no\ intervalo\ (-\infty, -1) \cup (0,1)\ e\ decrescente\ no\ intervalo$
$(-1,0) \cup (1, +\infty).$
$(III)\ Pontos\ Críticos:$
$-Ocorrem\ onde\ f'(x) = 0\ ou\ onde\ f'(x)\ não\ existe.$
$Neste\ caso, os\ pontos\ críticos\ ocorrem\ em\ x = -1; x = 0\ e\ x = 1.$
$f(-1) = \frac{1}{e}\ ; f(0) = 0\ ; f(1) = \frac{1}{e}.$

$Logo, os\ pontos\ críticos\ são\ \left(-1, \frac{1}{e}\right), (0,0)\ e\ \left(1, \frac{1}{e}\right).$

$(IV) Concavidades$

$f''(x) = (-2x).e^{-x^2}(-2x^3 + 2x) + e^{-x^2}(-6x^2 + 2)$

$f''(x) = e^{-x^2}(4x^4 - 4x^2 - 6x^2 + 2)$

$f''(x) = e^{-x^2}(4x^4 - 10x^2 + 2)$

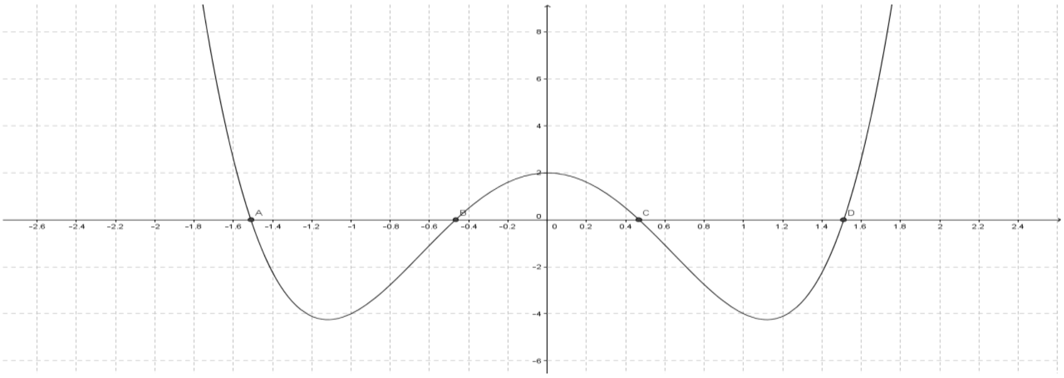
$Estudo\ do\ sinal\ de\ f''(x)$:

$seja\ y = x^2 então$

$4y^2 - 10y + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 100 - 32 = 68$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{68}}{8} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{10 \pm \sqrt{68}}{8}};$$

$Como\ a\ função\ polinomial\ g(x) = 4x^4 - 10x^2 + 2$ é $uma\ função\ par\ f(x) = f(-x)$ $podemos\ concluir\ que\ esta\ função$ é $simétrica\ em\ relação\ o\ eixo\ y. Ou\ seja,$



$Com\ essa\ análise\ podemos\ concluir\ que$:

$1 - f(x)\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ no\ intervalo$

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{10 + \sqrt{68}}{8}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{10 - \sqrt{68}}{8}}, \sqrt{\frac{10 - \sqrt{68}}{8}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{10 + \sqrt{68}}{8}}, +\infty\right)$$

$2 - f(x)\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ baixo\ no\ intervalo$

$$\left(-\sqrt{\frac{10 + \sqrt{68}}{8}}, -\sqrt{\frac{10 - \sqrt{68}}{8}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{10 - \sqrt{68}}{8}}, \sqrt{\frac{10 + \sqrt{68}}{8}}\right)$$

$(V)\ Pontos\ de\ Inflexão$:

$-Ocorrem\ nos\ pontos\ onde\ f''(x) = 0, ou\ seja, em\ x = \pm\sqrt{\frac{10 \pm \sqrt{68}}{8}}.$

$(VI) Assíntotas$:

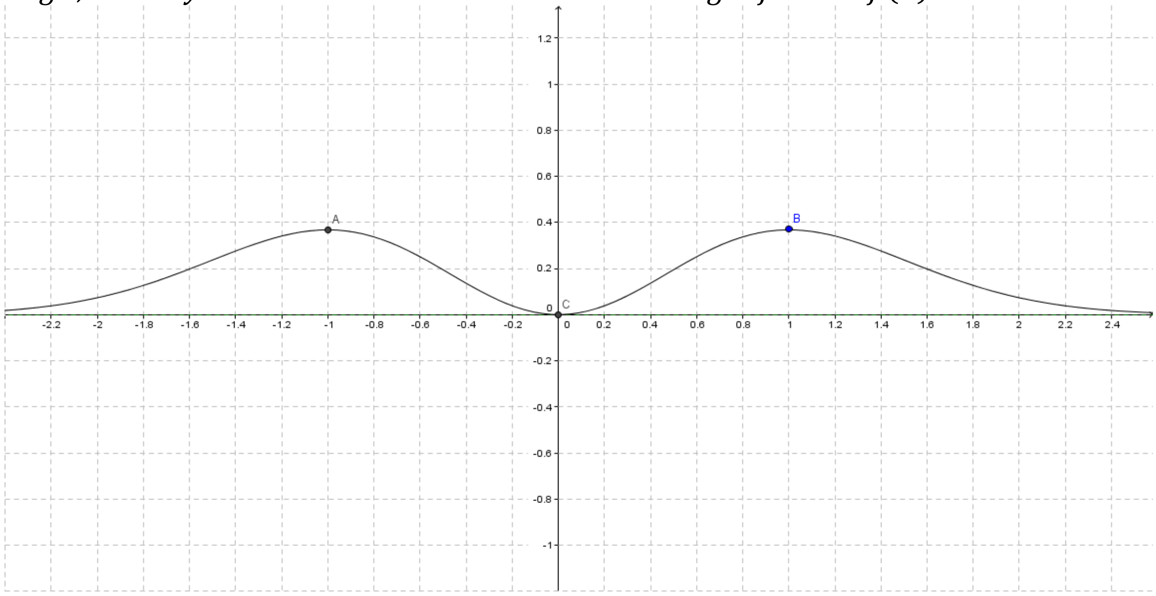
$-Verticais$: $Não\ existem!\ Pois, sendo\ f(x) = \frac{x^2}{e^{-x^2}}\ temos\ D(f) = \mathbb{R}. Logo, não$ $há\ restrinção\ para\ valores\ de\ x\ que\ possam\ gerar\ indeterminação\ no\ denominador,$ $de\ modo\ a\ obtermos\ uma\ assíntota\ vertical.$

$-Horizontais$: $Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer$ $um\ dos\ seguinte\ casos$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a\ \ ou\ \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{-x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{(-2x)e^{-x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^{-x^2}} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{(-2x)e^{-x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{e^{-x^2}} = 0.$$

$Logo, a\ reta\ y = 0$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$



5.

$a)\ x^2 - y^2 = 1$ $.Encontrar\ o\ ponto\ da\ hipérbole\ mais\ próximo\ do\ ponto\ (0,-1).$

$Dado\ um\ ponto\ (x,y)\ pertencente$ à $hipérbole, temos:$

$$D = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} = \sqrt{2y^2 + 2y + 2}$$

$$D'(y) = \frac{4y+2}{2\sqrt{2y^2+2y+2}} = \frac{2y+1}{\sqrt{2y^2+2y+2}}$$

$$D'(y) = 0 \to 2y + 1 = 0 \to y = -\frac{1}{2}$$

$Logo, para\ y = -\frac{1}{2}\ temos:$

$$x^2 - \frac{1}{4} = 1 \to x^2 = \frac{5}{4} \to x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$Os\ pontos\ da\ hipérbole\ mais\ próximos\ do\ ponto\ (0,-1)$ são $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right)\ e \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$

$b)\ A\ reta\ x + y = 0\ tangencia\ o\ gráfico\ de\ uma\ função\ f\ em\ determinado\ ponto\ e$ $que\ essa\ função$ é $tal\ que\ f''(x) = 3x^2 e\ f'(0) = 0. Determine\ a\ função\ f.$

$*\ Primeiros\ devemos\ procurar\ uma\ antiderivada\ de\ f''(x) = 3x^2.$

$Daí\ temos\ que\ f'(x) = x^3 + C$ $, onde\ C$ é $uma\ constante\ a\ ser\ determinada.$

$Como\ f'(0) = 0, concluímos\ que\ C = 0. Logo, f'(x) = x^3.$

$A\ reta\ y = -x\ possui\ coeficiente\ angular\ igual\ a -1, valor\ assumido\ por\ f'(x)$ $em\ x = -1. Portanto, o\ ponto\ de\ tangencia$ é $(-1,1).$

$*\ Encontrando\ uma\ antiderivada\ para\ f'(x) = x^3 temos\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 + K, onde$ K é $uma\ constante\ a\ ser\ determinada.$

$Como\ f(-1) = 1, então\ temos:$

$$\frac{1}{4}(-1)^4 + K = 1 \to K = 1 - \frac{1}{4} \to K = \frac{3}{4}.$$

$$Logo, \text{concluímos que } f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}.$$

2.5 4ª Prova-06 de Dezembro de 2007

1.

$a)$ *Encontrar a antiderivada mais geral da função*

$$f(x) = \sqrt{x} - 7x^{-3/4} + 3e^{x} + 7sec^{2}(x) + \pi$$

Seja F a função primitiva de f, tal que $F'(x) = f(x)$. *Calculando a antiderivada de cada parcela de* $f(x)$ *temos*:

$D_x[b.x^a] = \sqrt{x} \to ab.x^{a-1} = x^{1/2} \to \dfrac{ab.x^{a-1}}{x^{1/2}} = 1 \to ab.x^{a-3/2} = 1.$ *Então, temos*:

$\begin{cases} a - \dfrac{3}{2} = 0 \\ ab = 1 \end{cases} \to a = \dfrac{3}{2}$ *e* $b = \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{3}.$

$*$ *A primeira parcela da antiderivada é*: $\dfrac{2}{3}x^{3/2}.$

$D_x[b.x^a] = x^{-3/4} \to ab.x^{a-1} = x^{-3/4} \to \dfrac{ab.x^{a-1}}{x^{-3/4}} = 1 \to ab.x^{a+1/4} = 1.$ *Então, temos*

$\begin{cases} a + \dfrac{1}{4} = 0 \\ ab = 1 \end{cases} \to a = -\dfrac{1}{4}$ *e* $b = -4.$

$*$ *A segunda parcela é*: $(-7).\left[-4x^{-1/4}\right] = 28x^{-1/4}.$

$D_x[a.e^x] = 3e^x \to ae^x = 3e^x \to a = 3.$

$*$ *A terceira parcela é*: $3e^x.$

$*$ *A quarta parcela é* : $7.tg(x).$

$*$ *A quinta parcela é*: $\pi x.$

Logo, $F(x) = \dfrac{2}{3}x^{3/2} + 28x^{-1/4} + 3e^x + 7.tg(x) + \pi x + C.$

Onde C é uma constante, de modo que, para todo C temos $F'(x) = f(x)$.

$b)$ *Encontrar f tal que* $f''(x) = -3e^x + 4sen(x), f(0) = 0$ *e* $f(\pi) = 0.$

$*$ *Primeiro encontramos uma antiderivada de* $f''(x)$.

$f'(x) = -3e^x - 4\cos(x) + C$, *onde C é uma constante.*

$*$ *Por último encontramos a função f na seguinte forma*:

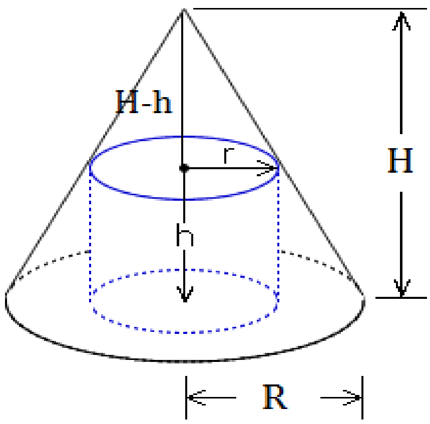
$f(x) = -3e^x - 4sen(x) + Cx + D$, *onde D é uma constante.*

$$\begin{aligned} f(0) = 0 \to -3e^0 - 4sen(0) + C.0 + D &= 0 \\ -3 - 0 + 0 + D &= 0 \\ D &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\pi) = 0 \to -3e^{\pi} - 4sen(\pi) + C.\pi + 3 &= 0 \\ -3e^{\pi} - 0 + C.\pi + 3 &= 0 \\ C.\pi &= 3e^{\pi} - 3 \\ C &= \frac{3e^{\pi} - 3}{\pi}. \end{aligned}$$

Logo, $f(x) = -3e^x - 4sen(x) + \dfrac{3e^{\pi} - 3}{\pi}x + 3.$

2.



$Por\ semelhança\ de\ triângulos\ temos:$

$$\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r} \to RH - Rh = rH \to h = \frac{H(R-r)}{R}.$$

$$V = \pi r^2 h \to V = \pi r^2 . \frac{H}{R}(R-r) \to V = \frac{\pi H}{R}(Rr^2 - r^3).$$

$Por\ meio\ da\ primeira\ derivada\ encontraremos\ o\ ponto\ onde\ V\ é\ máximo.$

$$V'(r) = \frac{\pi H}{R}(2Rr - 3r^2); V'(r) = 0 \to 2Rr - 3r^2 = 0\ ;$$

$$Resolvendo, obtemos\ \ r = \frac{2R}{3};$$

$Obs: Note\ que\ r = 0\ não\ pode\ ser\ solução\ do\ problema!$

$$Sendo\ r = \frac{2R}{3}, encontramos\ h = \frac{H\left(R - \frac{2R}{3}\right)}{R} \to h = \frac{H\left(\frac{R}{3}\right)}{R} \to h = \frac{H}{3}$$

$$*\ Substituindo\ H = 1\ e\ R = 1\ temos: r = \frac{2}{3}\ e\ h = \frac{1}{3}.$$

$$Dessa\ forma\ temos\ V_{máx} = \pi.r^2.h = \pi.\left(\frac{2}{3}\right)^2.\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}\pi\ u.V$$

3.

$$a)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\ln(\cos x)^{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\cos x.\ln(\cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\ln(\cos x)}{\sec x}} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\cos x)}{\sec x}}.$$

$Calculando\ o\ limite\ do\ expoente\ temos:$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos x)}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-sen\ x}{\cos x}}{\sec x\,.\,tg\ x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-tg\ x}{\sec x\,.\,tg\ x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\cos x) = 0.$$

$Logo,$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\cos x} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\cos x)}{\sec x}} = e^0 = 1.$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x.\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}}.$$

$Calculando\ o\ limite\ do\ expoente\ temos$:

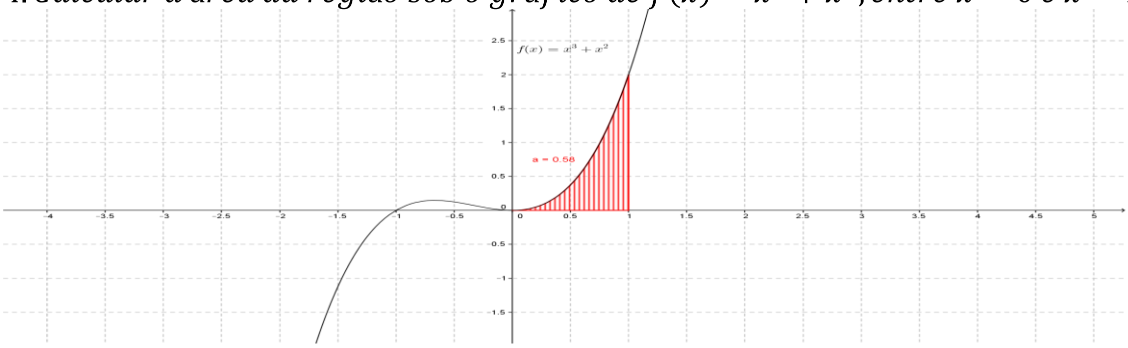
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\left(-\frac{3}{x^2}-\frac{10}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2\left(-\frac{3}{x^2}-\frac{10}{x^3}\right)}{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{10}{x}}{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}=$$

$$\frac{3+0}{1+0+0}=\frac{3}{1}=3.$$

$Logo,$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)^x=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^3.$$

4. $Calcular\ a\ área\ da\ região\ sob\ o\ gráfico\ de\ f(x)=x^3+x^2, entre\ x=0\ e\ x=1.$



$Utilizando\ o\ método\ da\ Soma\ de\ Rienman$:

$$Área=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

$Onde$ $\Delta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$ $; assim$ $x_i=\frac{i}{n}$. $Substituindo\ na\ expressão, temos$:

$$Área=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^3}{n^3}+\frac{i^2}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^3+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right]$$

$$*\ Obs_1:\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$*\ Obs_2:\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$$

$$Área=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^3}\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}+\frac{1}{n^2}\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{(n^2+2n+1)}{4n}+\frac{(2n^2+3n+1)}{6n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{6(n^2+2n+1)+4(2n^2+3n+1)}{24n}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{14n^2+24n+10}{24n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{14n^2}{n^2}+\frac{24n}{n^2}+\frac{10}{n^2}}{\frac{24n^2}{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{14+\frac{24}{n}+\frac{10}{n^2}}{24}$$
$$= \frac{14+0+0}{24}$$
$$Área = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} u.A$$

$5. Fazer\ o\ gráfico\ de\ f(x) = \dfrac{x^3-x+1}{x^2}$;

$a)$ *Domínio da função*;

$*$ f é *uma função racional e, como seu numerador* é *uma função polinomial com o domínio sendo o conjunto dos números reais, o domínio da função* f *fica restrito ao denominador, o qual deve ser diferente de zero.*

$*$ *Portanto*, $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

$b)$ *Interseções com os eixos coordenados*;

$*$ *Não há interseção com o eixo* y, *pois* $x = 0$ *não pertence ao domínio de* f;

$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - x + 1 = 0$

Calculemos $f(-2)$ *e* $f(-1)$:

$$f(-2) = \frac{-8+2+1}{4} = -\frac{5}{4} \quad e \quad f(-1) = \frac{-1+1+1}{1} = 1.$$

$*$ *Como* f é *uma função polinomial racional e, portanto, contínua em* $[-2,-1]$, *e* $f(-2) < 0 < f(-1)$, *podemos garantir pelo Teorema do Valor Intermediário que existe algum* $x \in (-2,-1)$ *tal que* $f(x) = 0$. *Ou seja,* $f(x)$ *possui uma raíz entre* $x = -2$ *e* $x = -1$.

$c)$ *Extremos Relativos*;

$$f'(x) = \frac{(3x^2-1)x^2-(x^3-x+1)2x}{x^4}$$
$$f'(x) = \frac{3x^4-x^2-2x^4+2x^2-2x}{x^4}$$
$$f'(x) = \frac{x^4+x^2-2x}{x^4} \ ; com\ x \neq 0\ temos:$$
$$f'(x) = \frac{x^3+x-2}{x^3}$$

$$Fazendo\ f'(x) = 0 \ \rightarrow \ \frac{x^3+x-2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3+x-2 = 0$$

Fazendo o teste das raízes prováveis $-2, -1, 1$ *e* 2 *temos*:

$$f'(-2) = \frac{-8-2-2}{-8} = \frac{10}{8} \ ; \quad f'(-1) = \frac{-1-1-2}{-1} = 4\ ;$$

$$f'(1) = \frac{1+1-2}{1} = 0\ ;\quad f'(2) = \frac{8+2-2}{8} = 1.$$

$*\ Portanto, para\ x = 1\ temos\ f'(x) = 0.$

$Fatorando\ o\ numerador\ de\ f'(x)\ temos:$

$x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2+x+2)$

$Note\ que\ o\ segundo\ fator\ é\ irredutível, ou\ seja, não\ podemos\ decompor\ em\ fatores\ lineares. Logo, f'(x)\ só\ possui\ uma\ raiz\ real\ (x = 1).$

$$f(1) = \frac{1^3 - 1 + 1}{1^2} = 1.\ Temos\ o\ ponto\ de\ extremo\ relativo\ (1,1).$$

$d)\ Crescimento\ e\ Decrescimento;$

$*\ Analisando\ o\ comportamento\ (sinal)\ de\ f'(x):$

$- - - - - - - - - - - - - 1 + + + + + + + + + + + + +$	$(x-1)$
$+ +$	(x^2+x+2)
$- - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + + + + + + +$	x^3
$+ + + + + + + 0 - - - - 1 + + + + + + + + + + + +$	$f'(x) = \frac{x^3+x-2}{x^3}$

$*\ Da\ análise\ concluímos\ que:$

$f(x)\ é\ crescente\ no\ intervalo\ (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$f(x)\ é\ decrescente\ no\ intervalo\ (0,1)$

$e)\ Concavidade;$

$$f''(x) = \frac{(3x^2+1)x^3 - (x^3+x-2)3x^2}{x^6}$$

$$f''(x) = \frac{3x^5 + x^3 - 3x^5 - 3x^3 + 6x^2}{x^6}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^3 + 6x^2}{x^6}\ ;com\ x \neq 0$$

$$f''(x) = \frac{-2x+6}{x^4}$$

$*\ Analisando\ o\ comportamento\ (sinal)\ de\ f''(x):$

$+ + + + + + + + + + + + + 3 - - - - - - - - - - - -$	$(-2x+6)$
$+ + + + + + + +\ + 0 + + + + + + + + + + + + + + + + +$	x^4
$+ + + + + + + +\ 0 + + + + 3 - - - - - - - - - - - -$	$f''(x) = \frac{-2x+6}{x^4}$

$*\ Da\ análise\ concluímos\ que:$

$f(x)\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ no\ intervalo\ (-\infty, 0) \cup (0,3)$

$f(x)\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ baixo\ no\ intervalo\ (3, +\infty)$

$f)\ Pontos\ de\ Inflexão;$

$*\ Onde\ f''(x) = 0, . Portanto, em\ x = 3.$

$$f(3) = \frac{3^3 - 3 + 1}{3^2} = \frac{25}{9}$$

$$Ponto\ de\ Inflexão:\ \left(3, \frac{25}{9}\right)$$

$g)\ Assíntotas:$

$*\ Verticais: Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$\to Verificando\ se\ a\ reta\ x = 0\ é\ uma\ assíntota\ vertical:$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - x + 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x^3 - x + 1}^{\substack{1 \\ \uparrow}}}{\underbrace{x^2}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}}} = +\infty$$

Logo, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $f(x)$.

* *Horizontais: Dizemos que a reta $y = a$ é uma assíntota horizontal se ocorrer um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x + 1}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - 1}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{6x}{2} = \lim_{x\to +\infty} 3x = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3 - x + 1}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2 - 1}{2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{6x}{2} = \lim_{x\to -\infty} 3x = -\infty$$

Logo, não existem assíntotas horizontais ao gráfico de $f(x)$.

* *Oblíquas: Dizemos que a reta $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua se*

$$\lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

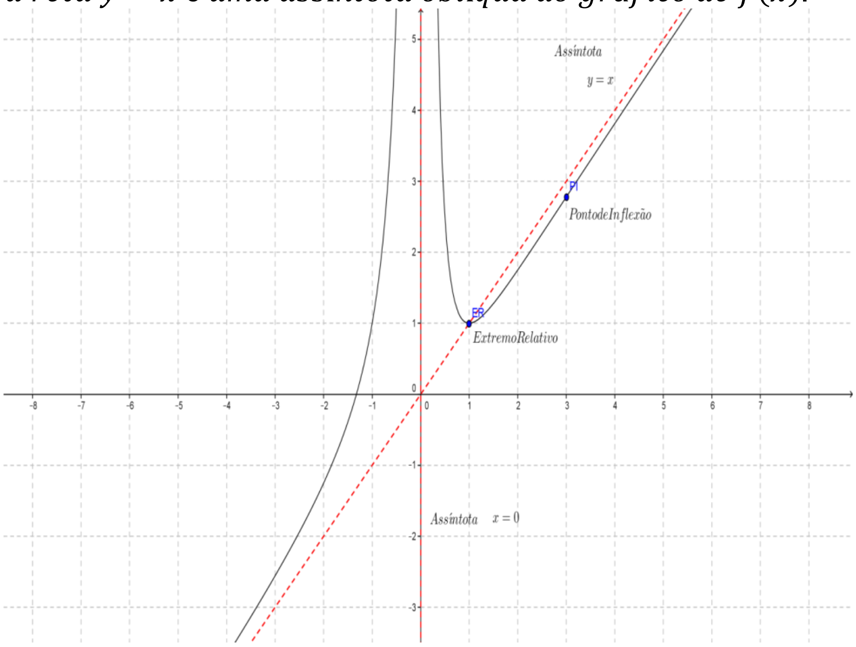
$$* \, f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2} = x - \frac{x - 1}{x^2}$$

$$f(x) - x = -\frac{x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{-x + 1}{x^2}\right) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{-\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right] = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{-1}{x} + \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0 + 0 = 0$$

Portanto, a reta $y = x$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de $f(x)$.



2.6 Reavaliação da 2ª média-07 de Dezembro de 2007

1.

$Seja\ V\ o\ volume\ de\ água\ que\ permanece\ no\ cone, V_e\ o\ volume\ de\ água\ que\ entra\ e\ V_s\ o\ volume\ de\ água\ que\ escoa\ (vaza)\ do\ cone. Então:$

$$V = V_e - V_s$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_e}{dt} - \frac{dV_s}{dt}$$

$De\ modo\ que, \frac{dV_e}{dt}\ é\ a\ taxa\ com\ a\ qual\ entra\ água\ no\ cone, que\ é\ 8cm^3/min\ . Logo,$

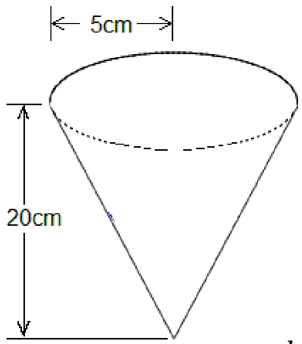
$$\frac{dV}{dt} = 8 - \frac{dV_s}{dt}$$

$Na\ questão\ ele\ pede\ a\ velocidade\ de\ escoamento, ou\ seja, \frac{dV_s}{dt}\ . Assim,$

$$\frac{dV_s}{dt} = 8 - \boldsymbol{\frac{dV}{dt}}$$

$Calculando\ \frac{dV}{dt}\ temos:$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dh}{dt} \cdot \frac{dV}{dh} \quad Obs: \frac{dh}{dt} = 1mm/min = 0{,}1cm/min$$



$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.\ Por\ semelhança\ de\ triângulos\ temos: \frac{h}{r} = \frac{20}{5} \Rightarrow r = \frac{h}{4}. Então:$

$V = \frac{\pi h^3}{48}\ , logo\ \frac{dV}{dh} = \frac{3\pi h^2}{48} = \frac{\pi h^2}{16}.\ \ Assim, \frac{dV}{dt} = 0{,}1 \times \frac{\pi h^2}{16} \Rightarrow \frac{0{,}1\pi h^2}{16}.$

$$\frac{dV_e}{dt} = 8 - \frac{0{,}1\pi h^2}{16}\ . Quando\ h = 16cm\ temos:$$

$$\frac{dV_e}{dt} = 8 - \frac{0{,}1\pi(16)^2}{16} = (8 - 1{,}6\pi)cm^3/min$$

2.

$a) Equação\ para\ a\ reta\ tangente\ à\ curva\ x^y = y^x\ no\ ponto\ em\ que\ x = 1.$

$Para\ x = 1\ temos: 1^y = y^1 \to 1 = y.$

$O\ ponto\ em\ questão\ é\ (1, 1).$

$*\ Aplicando\ o\ logarítmo\ em\ ambos\ os\ membros\ da\ igualdade, temos:$

$\ln x^y = \ln y^x$

$y. \ln x = x. \ln y \to por\ diferenciação\ logarítmica\ e\ implícita, temos:$

$$y'. \ln x + y. \frac{1}{x} = \ln y + x. \frac{y'}{y}$$

$$y'.\ln x - y'.\frac{x}{y} = \ln y - \frac{y}{x}$$
$$y'.\left[\ln x - \frac{x}{y}\right] = \ln y - \frac{y}{x}$$
$$y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$$

Calculando o valor de y' *no ponto* $(1,1)$ *temos*:

$$y' = \frac{\ln 1 - \frac{1}{1}}{\ln 1 - \frac{1}{1}} = \frac{0-1}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Assim, a expressão da reta tangente no ponto $(1,1)$ *e coeficiente angular igual a* 1:

$$y - 1 = 1(x-1)$$
$$y - 1 = x - 1$$
$$y = x$$

$b)$*Encontrar o ponto onde a curva* $y = \cosh x$ *possui a derivada igual a* 1.

$y' = senh(x)$

$y' = 1 \quad \rightarrow \quad senh(x) = 1 \quad (I)$

$senh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; *substituindo na equação* (I):

$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$

$e^x - e^{-x} = 2$

$e^x - \dfrac{1}{e^x} - 2 = 0$

$e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$

Fazendo a substituição $b = e^x$ *obtemos a seguinte expressão do segundo grau*:

$$b^2 - 2b - 1 = 0$$

$*$ *Obs*: *se* $b = e^x$, *então* $b > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Resolvendo a equação acima, temos:

$\Delta = 4 + 4 = 8$

$b = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \rightarrow \ b = 1 + \sqrt{2}$ *ou* $b = 1 - \sqrt{2} \ (b < 0)$

O termo em destaque não satisfaz a condição anteriormente citada!

Voltando à expressão:

$b = e^x$

$1 + \sqrt{2} = e^x$

$x = \ln(1 + \sqrt{2})$

$*$ *Dessa forma, calculando o valor da curva em* $x = \ln(1 + \sqrt{2})$:

$y = \cosh(ln(1 + \sqrt{2}))$

$y = \dfrac{e^{ln(1+\sqrt{2})} + e^{-ln(1+\sqrt{2})}}{2}$

$y = \dfrac{1 + \sqrt{2} + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}{2} = \dfrac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1}{2 + 2\sqrt{2}} = \dfrac{4 + 2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

$*$ *Logo, o ponto é* $(\ln(1 + \sqrt{2}), \sqrt{2})$.

3.
$a)\ f(x) = ax.e^{bx^2}$ *tem um valor máximo em* $(2,1)$. *Determinar a e b.*
Temos, portanto, que $f(2) = 1$ *e* $f'(2) = 0$. *Logo,*
$f(2) = 2a.e^{4b} = 1$
$f'(x) = a.e^{bx^2} + 2abx^2.e^{bx^2}$
$f'(2) = a.e^{4b} + 8ab.e^{4b} = 0$; *Como* $e^{4b} \neq 0\ \forall b \in \mathbb{R}$ *dividimos ambos os termos.*
$\begin{cases} 2a.e^{4b} = 1 \\ a + 8ab = 0 \end{cases} \rightarrow$ *Da segunda expressão, temos:*
$a(1 + 8b) = 0$
Ou $a = 0$ *ou* $1 + 8b = 0 \rightarrow b = -\frac{1}{8}$; *Se* $a = 0$, *então* $f(x) = 0$. *Um absurdo! Pois,* $f(2) = 1$.
Logo, $b = -\frac{1}{8}$. *Substituindo na primeira expressão:*
$2a.e^{-1/2} = 1$
$\frac{2a}{\sqrt{e}} = 1 \rightarrow 2a = \sqrt{e} \rightarrow a = \frac{1}{2}\sqrt{e}$;
$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{e}.x.e^{-x^2/8}$

$b)\ \lim_{x\to 0}(1 + ax)^{b/x}$.
$*$ *Façamos* $x = \frac{1}{at}$, *e ajustando a expressão do limite, se* $x \rightarrow 0$ *então* $t \rightarrow \infty$.
$$\lim_{x\to 0}(1 + ax)^{b/x} = \lim_{t\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{abt} = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{ab} = e^{ab}$$
$*$ *Obs: Limite Fundamental Exponencial* $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$

4.
Perímetro $= 20\ u.C$
$P = 2(b + l) = 20 \rightarrow b + l = 10 \rightarrow l = 10 - b\ (I)$
$V = \pi.b^2.l \rightarrow V = \pi.b^2.(10 - b)$
$V = \pi(10b^2 - b^3)$
$V'(b) = \pi(20b - 3b^2)$
Fazendo $V'(b) = 0$ *obtemos:*
$20b - 3b^2 = 0 \rightarrow b = 0$ *ou* $b = \frac{20}{3}$. *Note que* $b = 0$ *não serve como solução!*
$l = 10 - b \rightarrow l = 10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$.
Logo, as dimensões do cilindro de maior volume são $b = \frac{20}{3}$ *e* $l = \frac{10}{3}$.

5. *Esboçar o gráfico de* $y = \frac{2x^2}{9 - x^2}$. *Consideremos* $f(x) = y = \frac{2x^2}{9 - x^2}$
(I) *Domínio:*
$D(f) = x \in \mathbb{R};\ 9 - x^2 \neq 0$
$D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

(II) *Interseções com os eixos coordenados*:

$-$*Com o eixo* y:

$$f(0) = \frac{2.0^2}{9-0^2} = \frac{0}{9} = 0. \quad Ponto\ (0,0)$$

$-$*Com o eixo* x:

$$f(x) = 0 \rightarrow 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0. \quad Ponto\ (0,0)$$

(III)*Assíntotas*:

$-$*Verticais*: *Dizemos que a reta* $x = a$ *é uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos*:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*$ *Vamos verificar se as retas* $x = -3$ *e* $x = 3$ *são assíntotas verticais*:

$$* \lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{2x^2}{9-x^2};$$

Analisando o denominador da função temos:

$$- - - - - - - -(-3) + + + + + + + (3) - - - - - - - - \qquad (9-x^2)$$

Obs_1: *Se* $x \rightarrow -3^+$, *então* $x > -3$. *Logo*, $9 - x^2 > 0$ *então* $9 - x^2 \rightarrow 0^+$.

Dessa forma o limite se apresenta na forma $\frac{k}{0^+}$, *com* $k > 0$. *Portanto*,

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{2x^2}{9-x^2} = +\infty$$

$$* \lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{2x^2}{9-x^2};$$

Obs_2: *Se* $x \rightarrow -3^-$, *então* $x < -3$. *Logo*, $9 - x^2 < 0$ *então* $9 - x^2 \rightarrow 0^-$.

Dessa forma o limite se apresenta na forma $\frac{k}{0^-}$, *com* $k > 0$. *Portanto*,

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{2x^2}{9-x^2} = -\infty.$$

$\rightarrow$ *Logo, a reta* $x = -3$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$$* \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2}{9-x^2};$$

Obs_3: *Se* $x \rightarrow 3^+$, *então* $x > 3$. *Logo*, $9 - x^2 < 0$ *então* $9 - x^2 \rightarrow 0^-$.

Dessa forma o limite se apresenta na forma $\frac{k}{0^-}$, *com* $k > 0$. *Portanto*,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2}{9-x^2} = -\infty$$

$$* \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2}{9-x^2};$$

Obs_2: *Se* $x \rightarrow 3^-$, *então* $x < 3$. *Logo*, $9 - x^2 > 0$ *então* $9 - x^2 \rightarrow 0^+$.

Dessa forma o limite se apresenta na forma $\frac{k}{0^+}$, *com* $k > 0$. *Portanto*,

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{2x^2}{9-x^2} = +\infty.$$

$\rightarrow$ *Logo, a reta* $x = 3$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$-Horizontais$: *Dizemos que a reta* $y = a$ *é uma assíntota horizontal se ocorrer um dos seguintes casos*:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{9-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{9-x^2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\frac{9}{x^2}-1} = \frac{2}{-1} = -2.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{9-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{9-x^2}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\frac{9}{x^2}-1} = \frac{2}{-1} = -2.$$

$\rightarrow$ *Logo, a reta* $y = -2$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

(IV) *Crescimento e Decrescimento*:

$$f'(x) = \frac{4x.(9-x^2) - 2x^2.(-2x)}{(9-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{36x - 4x^3 + 4x^3}{(9-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{36x}{(9-x^2)^2};$$

$*$ *Analisando o comportamento (sinal) de* $f'(x)$, *temos*:

$- - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + +$	$36x$
$+ + + + (-3) + + + + + + + + (3) + + + + + +$	$(9-x^2)^2$
$- - - - (-3) - - - 0 + + + (3) + + + + + +$	$f'(x) = \frac{36x}{(9-x^2)^2}$

Da análise do sinal de $f'(x)$ *concluímos que*:

$f(x)$ é *crescente no intervalo* $(0,3) \cup (3,+\infty)$ *e*
$f(x)$ é *decrescente no intervalo* $(-\infty,-3) \cup (-3,0)$

(V) *Extremos Relativos*:

$-$*Só há um ponto de extremo relativo, ocorre em* $f'(x) = 0$, *ou seja, em* $x = 0$
$f(0) = 0$. *Ponto* $(0,0)$.

(VI) *Concavidade e Pontos de Inflexão*:

$$f''(x) = \frac{36(9-x^2)^2 - 36x(2)(-2x)(9-x^2)}{(9-x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{36(9-x^2) + 144x^2}{(9-x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{108x^2 + 324}{(9-x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{108(x^2+3)}{(9-x^2)^3}$$

$* \ Fazendo \ o \ estudo \ do \ sinal \ de \ f''(x), temos:$

$+++++++++++++++++++++ \qquad 108(x^2+3)$

$------(-3)++++++(3)------- \qquad (9-x^2)^3$

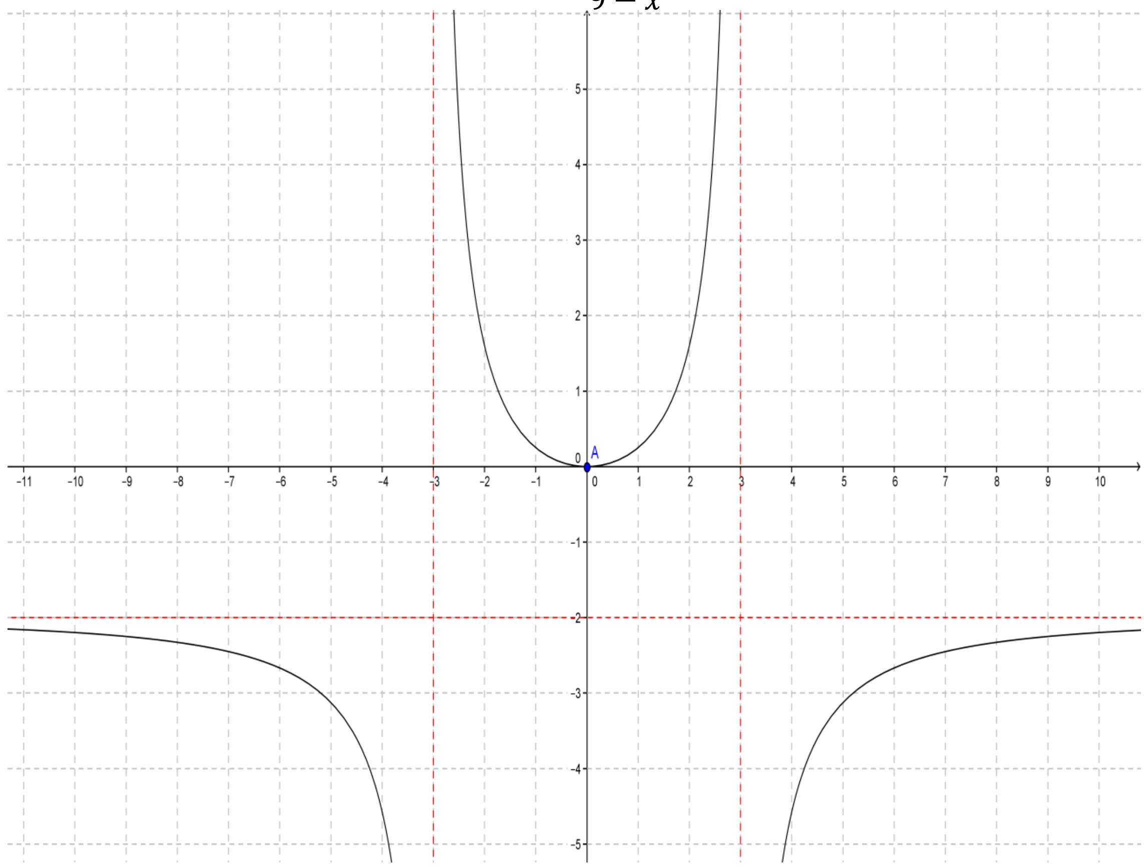
$------(-3)++++++(3)------- \qquad f''(x) = \frac{108(x^2+3)}{(9-x^2)^3}$

$Da \ análise \ do \ sinal \ de \ f''(x) \ concluímos \ que:$

$f(x) \ tem \ concavidade \ voltada \ para \ cima \ no \ intervalo \ (-3, 3) \ e$
$f(x) \ tem \ concavidade \ voltada \ para \ baixo \ no \ intervalo \ (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

$* \ Não \ há \ pontos \ de \ inflexão \ em \ f(x), pois \ \nexists x \in \mathbb{R}; f''(x) = 0.$

$Logo, o \ esboço \ do \ gráfico \ de \ f(x) = y = \dfrac{2x^2}{9-x^2} \ $ é:



Capítulo 3 2008

3.1 1ª Prova-14 de Março de 2008

1.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$; *encontrar a reta tangente no ponto* $(-2, 1/4)$

$*$ *A inclinação (coeficiente angular) da reta será dada pelo valor da derivada de* $f(x)$ *no ponto em que* $x = -2$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x^2 - (x+\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 - x^2 - 2x.\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x[x^2(x+\Delta x)^2]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x.\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x[x^2(x+\Delta x)^2]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-2x - \Delta x)}{\Delta x[x^2(x+\Delta x)^2]} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x - \Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2} = \frac{-2x}{x^4}.$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

$$f'(-2) = \frac{-2}{(-2)^3} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}.$$

Dado um ponto e o coeficiente angular da reta a equação da reta é da forma:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

$$y - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x+2)$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

2.

$$a)\ \lim_{x \to 0} \frac{tg(x-\pi)}{senx} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{sen(x-\pi)}{\cos(x-\pi)}}{senx} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(x-\pi)}{senx[\cos(x-\pi)]} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx.\cos\pi - sen\pi.\cos x}{senx[\cos(x-\pi)]} = \lim_{x \to 0} \frac{-senx}{senx[\cos(x-\pi)]} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{[\cos(x-\pi)]} = \frac{-1}{\cos(-\pi)}$$

$$= \frac{-1}{-1} = 1.$$

$$b)\ \lim_{x \to \infty} \frac{(x^3+2x)^2}{(2x-1)^3(x^3-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^6 + 4x^4 + 4x^2}{(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)(x^3-1)} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^6 + 4x^4 + 4x^2}{8x^6 - 12x^5 + 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 6x + 1} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^6 + 4x^4 + 4x^2}{x^6}}{\frac{8x^6 - 12x^5 + 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 6x + 1}{x^6}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^4}}{8 - \frac{12}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{9}{x^3} + \frac{12}{x^4} - \frac{6}{x^5} + \frac{1}{x^6}} = \frac{1+0+0}{8-0+0-0+0-0+0} = \frac{1}{8}.$$

$c)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tgx - \sec x + \cos x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{senx}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} + \cos x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx - 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} =$
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx - 1 + 1 - sen^2x}{1 - sen^2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx - sen^2x}{1 - sen^2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx(1 - senx)}{(1 - senx)(1 + senx)} =$
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx}{(1 + senx)} = \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{2}.$

3.
Se f e g são funções contínuas num intervalo fechado $[a, b]$ *são equivalentes as seguintes proposições*:
$*$ *f e g são contínuas no intervalo aberto* (a, b),

$$1)\ f(a)\ e\ g(a)\ existem;$$
$$2)\ \lim_{x\to a^+} f(x)\ \ e\ \ \lim_{x\to a^+} g(x)\ \ existem;$$
$$3)\ \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)\ \ e\ \ \lim_{x\to a^+} g(x) = g(a)$$

De modo similar, temos:

$$1)\ f(b)\ e\ g(b)\ existem;$$
$$2)\ \lim_{x\to b^-} f(x)\ \ e\ \ \lim_{x\to b^-} g(x)\ \ existem;$$
$$3)\ \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)\ \ e\ \ \lim_{x\to b^-} g(x) = g(b);$$

$*$ *Fazendo as interrelações com a questão, temos*:
$f(-2) = 7\ ;\quad g(-2) = 2\quad ;\quad f(5) = 4\quad e\quad g(5) = 5.$

$a)\ \lim_{x\to 5^-} \frac{g^2(x) - 25}{g(x) - 5} = \lim_{x\to 5^-} \frac{[g(x) - 5][g(x) + 5]}{g(x) - 5} = \lim_{x\to 5^-} [g(x) + 5] =$
$\lim_{x\to 5^-} g(x) + \lim_{x\to 5^-} 5 = 5 + 5 = 10.$
$b)\ (g - f)(x) = g(x) - f(x)$

$$\begin{aligned}(g - f)(-2) &= g(-2) - f(-2)\\ &= 2 - 7\\ &= -5.\\ (g - f)(5) &= g(5) - f(5)\\ &= 5 - 4\\ &= 1.\end{aligned}$$

$c)$ *Vimos no Cálculo* 1 *que a soma de funções contínuas é uma função contínua e, portanto*, $(g - f)(x)$ *é contínua no intervalo* $[-2, 5]$, *e ainda*, $(g - f)(-2) < 0 < (g - f)(5)$. *Logo, podemos garantir pelo Teorema do Valor Intermediário que existe algum* $c \in (-2, 5)$ *tal que* $(g - f)(c) = 0$. *Ou seja*,

$$(g - f)(c) = 0 \to g(c) - f(c) = 0 \to f(c) = g(c).$$

4.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x + 5, & se\ x \le 2,\\ -x^2 + bx + (1 - b), & se\ x > 2 \end{cases}$$

Determinar b para que f seja contínua em $x = 2$.
$*$ *Basta encontrarmos b tal que* $f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$ *, pois o limite lateral* à

$esquerda\ já\ satisfaz\ a\ igualdade\ f(2). Logo,$

$f(2) = -\frac{3}{2}(2) + 5 = -3 + 5 = 2\ \ (I)$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}[-x^2 + bx + (1-b)] = -4 + 2b - 1 = 2b - 5\ (II)$

$Pela\ igualdade, temos:$

$2b - 5 = 2 \to 2b = 7 \to b = \frac{7}{2}.$

$*$ *Como* $f(x)$ *é uma função sentencial, ela é contínua no domínio de cada sentença, onde elas existem, com exceção do ponto onde há mudança de comportamento da função, neste caso em* $x = 2$. *Como ambas as sentenças são funções polinomiais, elas são contínuas em todo seu domínio de abrangência. Logo, já temos que* f *é contínua no intervalo* $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. *De modo que, para* $b = 7/2$, f *é contínua em* $x = 2$ *e, portanto,* f *é contínua no intervalo* $(-\infty, +\infty)$. *Logo,* f *é contínua em* $\mathbb{R}$.

5. *Determinar as assíntotas da função* $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

$*$ *Primeiramente, vamos definir o domínio da função!*

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0, x \neq 1\}$$

$-$*Assíntotas Verticais: Dizemos que a reta* $x = a$ *é uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*$ *Verificando se a reta* $x = 1$ *é uma assíntota vertical:*

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = +\infty\ ;\ \ Obs: \sqrt{x} - 1 \to 0^+$

Obs: *se* $x \to 1^+$ *então* $x > 1$ *e, ainda,* $\sqrt{x} > 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 > 0$;

$*$ *Logo, a reta* $x = 1$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$-$*Assíntota Horizontal: Dizemos que a reta* $y = a$ *é uma assíntota horizontal se ocorrer um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

$*$ *Como* $f(x)$ *só existe para os reais positivos, com exceção de* $x = 1$, *não faz sentido calcular* $\lim_{x\to -\infty} f(x)$. *Logo, calculamos apenas o limite com* $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Logo, a reta $y = 1$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

3.2 2ª VPA-12 de Abril de 2008

1.

$$f(x) = 1 + senx + \frac{sen^2x}{2} + \frac{sen^3x}{3} + \cdots + \frac{sen^{10}x}{10}$$

$a)\ f'(x) = 0 + \cos x + senx.\cos x + sen^2x.\cos x + \cdots + sen^9x.\cos x$
$\quad f'(x) = \cos x\,(1 + senx + sen^2x + sen^3x + \cdots + sen^9x)$

$b) f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\left(1 + sen\frac{\pi}{6} + sen^2\frac{\pi}{6} + sen^3\frac{\pi}{6} + \cdots + sen^9\frac{\pi}{6}\right)$

$*\ Entre\ parênteses\ temos\ uma\ progressão\ geométrica\ (P.G)\ de\ razão\ q = sen\frac{\pi}{6},$
$q = \frac{1}{2}.$

$A\ soma\ dos\ n\ primeiros\ termos\ de\ uma\ P.G\ é\ dado\ pela\ expressão:$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_n = \frac{1\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_n = \frac{\frac{2^{10}-1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_n = \frac{2(1024-1)}{1024} = \frac{1023}{512}$$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1023}{512} = \frac{1023\sqrt{3}}{1024}$

$c) f'(x) = \cos x\,(1 + senx + sen^2x + sen^3x + \cdots + sen^9x)$

$(1 + senx + sen^2x + sen^3x + \cdots + sen^9x) = \frac{1-sen^{10}x}{1-senx}$

$f'(x) = \cos x \Leftrightarrow \frac{1-sen^{10}x}{1-senx} = 1$

$Resolvendo\ a\ expressão, temos:$
$1 - sen^{10}x = 1 - senx$
$senx(sen^9x - 1) = 0$
$\begin{cases} senx = 0 \\ sen^9x - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0\ ou\ x = \frac{\pi}{2};$

$*\ Como\ consideramos\ o\ intervalo\ aberto\ \left(0,\frac{\pi}{2}\right), não\ existe\ um\ x \in \mathbb{R}\ tal\ que$
$f'(x) = \cos x.$

2.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & se\ x \leq 1 \\ ax + b, & se\ x > 1. \end{cases}$$

$a)\ Para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ x = 1\ basta\ resolvermos\ a\ seguinte\ expressão:$

$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, *pois o limite lateral esquerdo já satisfaz a igualdade* $f(1)$.
$f(1) = 3.1^2 = 3.1 = 3$
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} [ax + b] = a + b$
Logo, temos a relação: $a + b = 3 \quad (I)$

$b)$ *Encontrar* a *e* b *para que* f *seja diferenciável em* $x = 1$.
$*$ *Já temos a relação para a continuidade em* $x = 1$. *Calculando as derivadas laterais em* $x = 1$, *temos:*

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} [3x + 3] = 6$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax + b - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax + (3 - a) - 3}{x - 1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{a(x-1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} a = a.$$

Para que f *seja diferenciável em* $x = 1$ *a derivadas laterais devem ser iguais.*
Logo, $f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow a = 6$. *E, pela equação* (I) *temos* $b = -3$.

3.

$a)$ *Achar* y' *onde* $x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2 = \frac{15}{2}$
Por diferenciação implícita, temos:
$2x - y - xy' + 3yy' = 0$
$y'(3y - x) = y - 2x$
$$y' = \frac{y - 2x}{3y - x}$$

$b)$ *O coeficiente da reta normal num ponto é dado pelo inverso simétrico do valor assumido pela derivada naquele ponto. Ou seja,*

$m_n = -\frac{1}{y'} = \frac{x - 3y}{y - 2x}$; *no ponto* $(-2, 1)$ *temos:*

$$m_n = \frac{-2 - 3}{1 + 4} = -\frac{5}{5} = -1.$$

Logo, a equação da reta normal no ponto $(-2, 1)$ *é:*

$$y - 1 = -1(x + 2)$$
$$y - 1 = -x - 2$$
$$y = -x - 1$$

Substituindo $y = -x - 1$ *na expressão da curva encontraremos o ponto onde a reta intercepta a curva uma segunda vez.*

$$x^2 - x(-x - 1) + \frac{3}{2}(-x - 1)^2 = \frac{15}{2}$$
$$x^2 + x^2 + x + \frac{3}{2}(x^2 + 2x + 1) = \frac{15}{2}$$
$4x^2 + 2x + 3x^2 + 6x + 3 = 15$
$7x^2 + 8x - 12 = 0$
$\Delta = 64 + 336 = 400$

$x = \frac{-8 \pm 20}{14} \to x = \frac{12}{14}$ *e* $x = -2$. *Mas* $x = -2$ *já foi dado no ponto* $(-2,1)$

Usaremos, portanto, $x = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$.

$y = -x - 1$
$y = -\frac{6}{7} - 1 = -\frac{13}{7}.$
$Logo, a\ reta\ normal\ intercepta\ a\ curva, uma\ segunda\ vez, no\ ponto\ \left(\frac{6}{7}, -\frac{13}{7}\right).$
4.
$a)\ f(x) = 10^{x^2+x+1}\ . Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (0, 10).$
$f'(x) = 10^{x^2+x+1}.(2x+1).\ln(10)$
$f'(0) = 10.\ln 10$
$Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (0, 10):$
$$y - 10 = 10.\ln 10\,(x - 0)$$
$$y = (10.\ln 10)x + 10$$

$b)\ H(x) = e^{[f(x)]^2}\ ; f(1) = f'(1) = 1.$
$Determinar\ a\ equação\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ H(x)\ no\ ponto\ em\ que\ x = 1.$
$H(1) = e^{[f(1)]^2} = e^{1^2} = e. \quad ponto\ de\ tangencia\ (1, e).$
$H'(x) = 2f(x).f'(x).e^{[f(x)]^2}$
$H'(1) = 2f(1).f'(1).e^{[f(1)]^2}$
$H'(1) = 2.1.1.e = 2e$

$Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (1, e)\ :$
$$y - e = 2e(x - 1)$$
$$y - e = 2ex - 2e$$
$$y = 2ex - e$$
5.
$a)\ f(x) = cossecx + cotgx\ ; \quad Determinar\ a\ equação\ da\ reta\ tangente\ em\ x = \frac{\pi}{4}.$
$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = cossec\frac{\pi}{4} + cotg\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} + 1. \quad ponto\ de\ tangencia: \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} + 1\right)$
$f'(x) = -cossecx.cotgx - cossec^2x$
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - 2$
$Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2} + 1\right):$
$$y - \left(\sqrt{2} + 1\right) = -\left(\sqrt{2} + 2\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$y = \left(-\sqrt{2} - 2\right)x + \frac{\left(\sqrt{2} + 2\right)}{4}\pi + \sqrt{2} + 1$$
$$y = \left(-\sqrt{2} - 2\right)x + \frac{\sqrt{2}(\pi + 4) + 2(\pi + 2)}{4}$$
$b)\ g(x) = sen^2(\cos(x^2 + 1))\ . Determinar\ a\ derivada\ de\ g(x).$
$Seja\ u = x^2 + 1\ ; v = \cos u\ ; y = g(v) = sen^2 v$
$Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}.\frac{dv}{du}.\frac{dy}{dv}$$
$$y' = f'(x) = (2x).\left(-sen(u)\right).2senv.\cos v$$
$$f'(x) = -2x.sen(x^2 + 1).sen(2v)$$
$$f'(x) = -2x.sen(x^2 + 1).sen(2\cos(x^2 + 1))$$

3.3 3ª Avaliação-17 de Maio de 2008

1.

$a)\ f(x) = x^{\ln x}\ ; Por\ diferenciação\ logarítmica, determinar\ f'(x).$

$\ln f(x) = \ln x^{\ln x}$

$\ln f(x) = (\ln x)^2$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2.\ln x\, .\frac{1}{x}$

$f'(x) = 2x^{\ln x}.\ln x\, .\, x^{-1}$

$f'(x) = 2x^{\ln x - 1}.\ln x$

$b) Encontrar\ o\ ponto\ onde\ a\ curva\ y = \cosh x\ \ possui\ a\ derivada\ igual\ a\ 1.$

$*\ Explicação{:}\ o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ é\ a\ tangente\ do\ ângulo\ formado$
$entre\ a\ reta\ e\ o\ sentido\ positivo\ do\ eixo\ dos\ x, portanto, tg\frac{\pi}{4} = 1. Lembrando$
$a\ derivada\ é\ numericamente\ igual\ à\ inclinação\ da\ reta, ou\ seja, igual\ a\ 1.$

$y' = senh(x)$

$y' = 1 \quad \rightarrow \quad senh(x) = 1 \quad (I)$

$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ \ ; substituindo\ na\ equação\ (I){:}$

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$

$e^x - e^{-x} = 2$

$e^x - \frac{1}{e^x} - 2 = 0$

$e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$

$Fazendo\ a\ substituição\ b = e^x\ obtemos\ a\ seguinte\ expressão\ do\ segundo\ grau{:}$

$$b^2 - 2b - 1 = 0$$

$*\ Obs{:}\ se\ b = e^x, então\ b > 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$

$Resolvendo\ a\ equação\ acima, temos{:}$

$\Delta = 4 + 4 = 8$

$b = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \rightarrow\ b = 1 + \sqrt{2}\ \ ou\ b = 1 - \sqrt{2}\ (b < 0)$

$O\ termo\ em\ destaque\ não\ satisfaz\ a\ condição\ anteriormente\ citada!$

$Voltando\ à\ expressão{:}$

$b = e^x$

$1 + \sqrt{2} = e^x$

$x = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

$*\ Dessa\ forma, calculando\ o\ valor\ da\ curva\ em\ x = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right){:}$

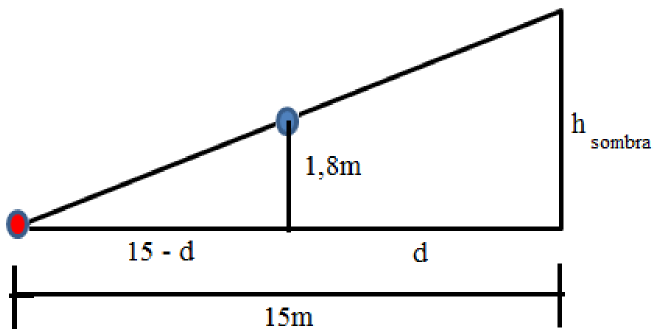
$y = \cosh\left(ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$

$y = \frac{e^{ln\left(1+\sqrt{2}\right)} + e^{-\,ln\left(1+\sqrt{2}\right)}}{2}$

$y = \frac{1 + \sqrt{2} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}{2} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

$*\ Logo, o\ ponto\ é\ \left(\ln\left(1 + \sqrt{2}\right), \sqrt{2}\ \right).$

2.



$Por\ semelhança\ de\ triângulo, temos:$

$$\frac{h_{sombra}}{1{,}8} = \frac{15}{15-d} \rightarrow h_{sombra} = \frac{27}{15-d}$$

$Da\ questão\ temos\ que\ \frac{dd}{dt} = 1{,}5m/s$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dd} \cdot \frac{dd}{dt}$$

$$h'(t) = \frac{27}{(15-d)^2} \cdot 1{,}5$$

$$Quando\ d = 9m \ldots$$

$$h'(t) = \frac{27}{(15-9)^2} \cdot 1{,}5$$

$$h'(t) = \frac{27}{36} \cdot 1{,}5$$

$$h'(t) = \frac{3}{4} \cdot 1{,}5 = \frac{4{,}5}{4} m/s$$

3.

$a)\ Estimar\ \sqrt[3]{8{,}01}\ usando\ diferenciais.$

$Estimar\ o\ valor\ de\ \sqrt[3]{8{,}01}. A\ função\ original\ para\ o\ cálculo\ é:$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\ e\ f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

$Dos\ valores\ próximos\ a\ 8{,}01, temos\ como\ valor\ conhecido\ \sqrt[3]{8}$

$Logo, queremos\ f(8 + 0{,}01).$

$Sobre\ diferenciais\ temos:$

$$dy = f'(x).dx\ \ e\ \Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

$Sabemos\ que\ em\ diferenciais\ dy \cong \Delta y, então:$

$$f(x + dx) - f(x) \cong f'(x).dx$$

$Se\ queremos\ f(8 + 0{,}01)\ temos\ que\ x = 8\ e\ \ dx = 0{,}01, logo:$

$$f(8 + 0{,}01) - f(8) \cong \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} .(0{,}01)$$

$$f(8{,}01) - \sqrt[3]{8} \cong \frac{0{,}01}{12}$$

$$f(8{,}01) \cong \frac{0{,}01}{12} + 2$$

$$f(8{,}01) \cong \frac{24{,}01}{12}$$

$b)$ Se g é crescente em $(0,+\infty)$ implica dizer que $g'(x) > 0$ nesse intervalo e g decrescente em $(-\infty,0)$ implica em $g'(x) < 0$ nesse intervalo.
$f(x) = g(x^2)$. Determinar onde f é crescente e decrescente.
Só podemos calcular $f'(x)$ pelo fato de que g é derivável sobre toda reta $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 2x.g'(x^2)$
$*$ Note que $g'(x^2) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Logo, o comportamento (sinal) de $f'(x)$ depende, exclusivamente pelo fator $2x$. Logo
$f'(x) > 0$ para $x > 0$. Ou seja, f é crescente em $(0,+\infty)$ e
$f'(x) < 0$ para $x < 0$. Ou seja, f é decrescente em $(-\infty,0)$.

4. Provar que $f(x) = e^{\frac{x^4}{4}-6x^2+ax}$ tem, no máximo, um ponto crítico no intervalo $(-1,1)$, para qualquer valor de a.

$f'(x) = (x^3 - 12x + a).e^{\frac{x^4}{4}-6x^2+ax}$
$*$ Sabemos que uma função possui algum ponto crítico, se existe algum $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 0$ ou quando $f'(x)$ não existe.
$*$ Como não há restrinção em $f'(x)$, implica dizer, que $f'(x)\exists\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, devemos procurar onde $f'(x) = 0$.
Obs: note que $e^{\frac{x^4}{4}-6x^2+ax} > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
$f'(-1) = (11 + a).e^{\frac{1}{4}-6-a}$
$f'(1) = (-11 + a).e^{\frac{1}{4}-6+a}$

$*$ Suponhamos que $a > 11$, neste caso, $f'(-1) > 0$ e $f'(1) > 0$. Nessa situação, não podemos afirmar que f possui algum ponto crítico no intervalo $(-1,1)$;
$*$ Suponhamos que $a < -11$, neste caso, $f'(-1) < 0$ e $f'(1) < 0$. Nessa situação, não podemos afirmar que f possui algum ponto crítico no intervalo $(-1,1)$;
$*$ Suponhamos que $-11 < a < 11$, neste caso, $f'(-1) < 0 < f'(1)$ e, sendo f uma função contínua em $(-1,1)$, podemos afirmar pelo Teorema do Valor Intermediário que existe algum $x \in (-1,1)$ tal que $f'(x) = 0$. Nesta situação, temos um ponto crítico em $f(x)$.

Provamos que $f(x)$ possui um ponto crítico em $(-1,1)$ para $-11 < a < 11$. Devemos mostrar que para essa convençao f não possui outro ponto crítico.
Seja $c \in (-1,1)$ tal que $f'(c) = 0$. Usando o dispositivo de Briot − Ruffini em $g(x) = x^3 - 12x + a$, obtemos:

c	1	0	-12	a
	1	c	c^2-12	c (c^2-12)+a
				0
	$\boxed{x^2 + cx + (c^2-12)}$			

$\Delta = c^2 - 4(c^2 - 12) \rightarrow \ \Delta = -3c^2 + 48.$
$(1)\ Se\ \Delta = 0 \Rightarrow c = \pm 4\ \Rightarrow a = \pm 16\ ;$
$Definimos\ anteriormente\ que - 11 < a < 11. Logo, não\ há\ outro\ ponto\ crítico$
$no\ intervalo\ (-1{,}1)\ para\ \ \Delta = 0.$

$(2)\ Se\ \ \Delta > 0\ , c > 4\ ou\ c < -4\ e, consequentemente, a > 16\ ou\ a < -16.\ \ Essa$
$situação\ é\ análoga\ à\ anterior.$

$(3)\ Se\ \ \Delta < 0, então\ c\ é\ a\ única\ raiz\ real\ de\ g(x)\ de\ tal\ modo\ que\ f'(x) = 0\ se,$
$somente\ se, x = c.$

$*\ Com\ essas\ análises\ concluímos\ que\ f\ possui, no\ máximo, um\ ponto\ crítico\ no$
$intervalo\ (-1, 1)\ para\ qualquer\ valor\ de\ a, tal\ que - 11 < a < 11.$

5.
$a)\ f(x) = -\dfrac{x}{(x-2)^2}\ ;$
$(1) O\ domínio\ de\ f;$
$*\ \ D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
$(2) Interseções\ com\ os\ eixos;$
$f(0) = 0 \qquad\qquad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
$*\ Interseção\ (0, 0).$
$(3) Assíntotas;$
$-Verticais: Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um$
$dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*\ Verificando\ se\ a\ reta\ x = 2\ é\ uma\ assíntota\ vertical:$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -\frac{x}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\overbrace{-x}^{\substack{-2\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-2)^2}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = -\infty$$

$*\ Obs: se\ x \to 2^+, então\ x > 2\ e, portanto, x - 2 > 0 \Rightarrow x - 2 \to 0^+.$
$Como\ o\ denominador\ tende\ a\ zero\ por\ valores\ maiores\ que\ zero\ e\ o\ numerador$
$tende\ a\ uma\ constante\ k < 0, o\ limite\ se\ apresenta\ na\ forma\ \dfrac{k}{0^+}\ com\ k\ negativo.$
$*\ Logo, a\ reta\ x = 2\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$
$-Horizontais: Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a\ é\ uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer$
$um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} -\frac{x}{(x-2)^2} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{x}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{x}{x^2 - 4x + 4} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} -\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\substack{0\\ \uparrow}}}{1 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\substack{\downarrow\\ 0}} + \underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\substack{\downarrow\\ 0}}} = \frac{0}{1 - 0 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$* \; Logo, a \; reta \; y = 0$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

$(4) Crescimento \; e \; Decrescimento;$

$$f'(x) = \frac{-(x-2)^2 + x.2(x-2)}{(x-2)^4}$$
$$f'(x) = \frac{-x+2+2x}{(x-2)^3}$$
$$f'(x) = \frac{x+2}{(x-2)^3}$$

$* \; Analisando \; o \; comportamento \; (sinal) \; de \; f'(x):$

$- - - - - - (-2) + + + + + + + + + + + + + + \quad (x+2)$

$- - - - - - - - - - - - - - - - (2) + + + + + + \quad (x-2)^3$

$+ + + + + + (-2) - - - - - - - - (2) + + + + + \quad f'(x) = (x+2)/(x-2)^3$

$* \; Da \; análise \; acima, concluímos \; que:$

$f(x)$ é $crescente \; no \; intervalo \; (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \; e$
$f(x)$ é $decrescente \; no \; intervalo \; (-2, 2)$

$(5) Concavidades \; e \; Pontos \; de \; Inflexão;$

$$f''(x) = \frac{(x-2)^3 - 3(x+2)(x-2)^2}{(x-2)^6}$$
$$f''(x) = \frac{x-2-3x-6}{(x-2)^4}$$
$$f''(x) = \frac{-2x-8}{(x-2)^4}$$

$* \; Analisando \; o \; comportamento \; de \; f''(x):$

$+ + + + + + (-4) - - - - - - - - - - - - - - \quad (-2x-8)$

$+ + + + + + + + + + + + + + + (2) + + + + + + \quad (x-2)^4$

$+ + + + + + (-4) - - - - - - - (2) - - - - - - - \quad f''(x) = (-2x-8)/(x-2)^4$

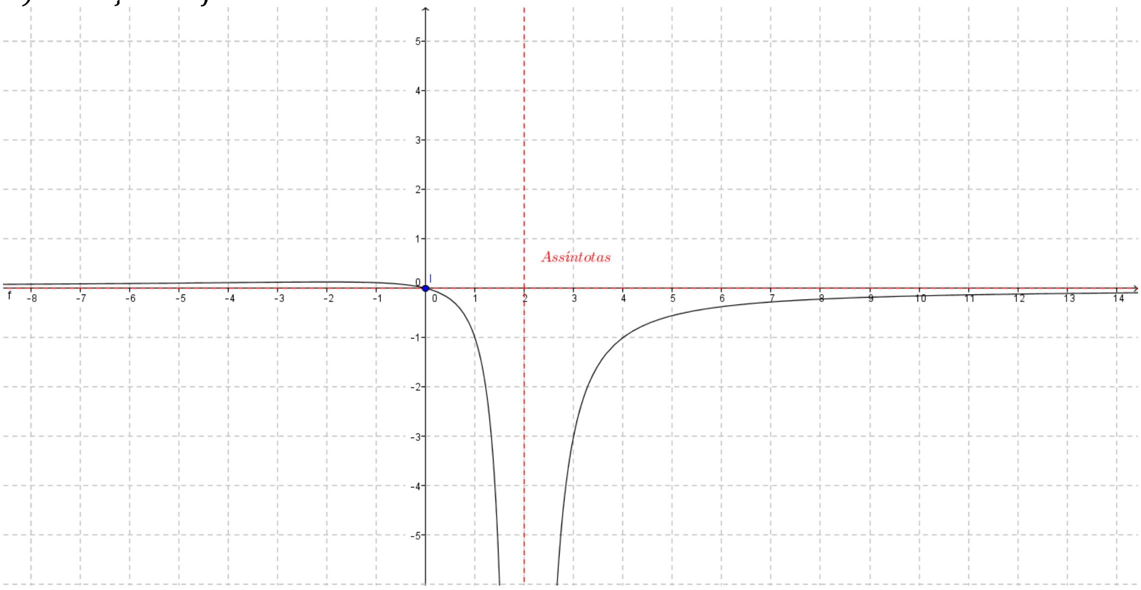
$* \; Da \; análise \; acima, concluímos \; que:$

$f(x) \; possui \; concavidade \; voltada \; para \; cima \; no \; intervalo \; (-\infty, -4) \; e$
$f(x) \; possui \; concavidade \; voltada \; para \; baixo \; no \; intervalo \; (-4,2) \cup (2, +\infty).$

$Os \; pontos \; de \; inflexão \; ocorrem \; quando \; há \; mudança \; na \; direção \; da \; concavidade,$
$em \; um \; número \; no \; domínio \; da \; funçao.$

$* \; Analisando \; a \; segunda \; derivada \; concluímos \; que \; \left(-4, \frac{1}{9}\right)$ é $ponto \; de \; inflexão!$

$b)$ $Esboço\ Gráfico!$



3.4 4ª Prova-14 de Junho de 2008

1.

$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x+1}\right]^x$

$Obs: fazendo\ a\ mudança\ de\ variável\ t = x+1\ , e\ ajustando\ o\ limite\ temos:$

$*\ se\ x\to+\infty\ , então\ t\to+\infty.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x+1}\right]^x = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{t-1}{t}\right]^{t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left[1-\frac{1}{t}\right]^{t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{t}\right)^t\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-1}\right] =$$

$Seja\ t = -n\ ;\ se\ t\to+\infty, então\ n\to-\infty$

$$\lim_{n\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right] = \lim_{n\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}\times\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = e^{-1}\times 1 = \frac{1}{e}$$

$*\ Limite\ Fundamental\ Exponencial\ \lim_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

$$b)\lim_{x\to1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right] = \lim_{x\to1}\left[\frac{x.\ln x - x+1}{(x-1).\ln x}\right] = \lim_{x\to1}\left[\frac{x(\ln x-1)+1}{(x-1).\ln x}\right];$$

$*\ Usando\ a\ Regra\ de\ L'Hôpital:$

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{\ln x-1+1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to1}\left[\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to1}\left[\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right] = \lim_{x\to1}\left[\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x^2}}\right] = \lim_{x\to1}\left[\frac{x}{x+1}\right]$$
$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$2. f'(x) = 3x^2 e\ a\ reta\ y = 3x\ é\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ f. Determine\ f.$

$*\ A\ antiderivada\ de\ f'(x) = 3x^2\ é\ f(x) = x^3 + C, onde\ C\ é\ uma\ constante\ a\ ser\ determinada.$

$Se\ a\ reta\ y = 3x\ é\ tangente\ à\ f, então\ o\ ponto\ de\ tangencia\ se\ dá\ quando\ a\ derivada\ de\ f\ for\ igual\ ao\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente. Logo,$

$f'(x) = 3;\quad 3x^2 = 3\to x = \pm1$

$Para\ x = 1, temos\ y = 3.\ Logo, o\ ponto\ em\ questão\ é\ (1,3)$

$f(1) = 1^3 + C = 1 + C = 3\to C = 2.$

$f(x) = x^3 + 2$

$Para\ x = -1, temos\ y = -3. Logo, o\ ponto\ em\ questão\ é\ (-1,-3)$

$f(-1) = (-1)^3 + C = -1 + C = -3\to C = -2$

$f(x) = x^3 - 2.$

3.

$x^2 + y^2 = 25\ ;\quad A = (-2,0)\ \ e\ \ B = (2,0)$

$*\ Determinar\ o\ ponto\ da\ curva\ acima\ tal\ que\ a\ soma\ das\ distância\ aos\ pontos\ A\ e\ B\ sejam:$

$a) máxima:$

$Dado\ um\ ponto\ (x,y)\ pertencente\ a\ curva, temos:\ \left(x,\pm\sqrt{25-x^2}\right)$

$Calculando\ a\ distância\ deste\ ponto\ aos\ pontos\ A\ e\ B, temos:$

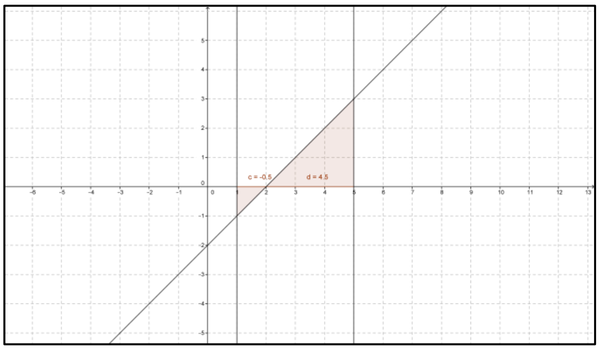
$d_{AP} = \sqrt{(x+2)^2 + 25 - x^2} = \sqrt{4x+29}$

$d_{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + 25 - x^2} = \sqrt{-4x+29}$
$S = \sqrt{4x+29} + \sqrt{-4x+29}$
$S'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x+29}}.4 + \frac{1}{2\sqrt{-4x+29}}.(-4)$
$S'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+29}} - \frac{2}{\sqrt{-4x+29}}$

Fazendo $S'(x) = 0$, *obtemos*:
$\frac{2}{\sqrt{4x+29}} - \frac{2}{\sqrt{-4x+29}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-4x+29} = \sqrt{4x+29}$
$\sqrt{-4x+29} = \sqrt{4x+29} \rightarrow \sqrt{\frac{4x+29}{-4x+29}} = 1 \rightarrow 4x+29 = -4x+29 \rightarrow x = 0.$
Para $x = 0$, *temos* $y = \pm 5$. *Logo, podemos ter* $P = (0,5)$ *ou* $P = (0,-5)$
$*$ *Vamos verificar se para esses pontos temos a soma das distâncias sendo máxima.*
$S = \sqrt{4.0+29} + \sqrt{-4.0+29} = \sqrt{29} + \sqrt{29} = 2\sqrt{29}$
$*$ *Lembre − se que x e y estão limitados a certos valores! Como estamos calculando a distância em função de x devemos considerar sua limitação* $-5 \leq x \leq 5$. *Note que* $S(x) = S(-x)$. *Logo, S é uma função par!*
$*$ Obs_1: *Como ambas as parcelas da função S são funções contínuas em* $(-5,5)$ *podemos encontrar os extremos relativos da função. E como S é uma função par só precisamos calcular* $S(5) = S(-5)$.
$S(5) = \sqrt{4.5+29} + \sqrt{-4.5+29} = \sqrt{49} + \sqrt{9} = 7 + 3 = 10 < 2\sqrt{29}$
$*$ *Portanto,* $S = 2\sqrt{29}$ *é a soma máxima da distâncias!*

b) mínima:
$*$ *A soma das distâncias sendo mínima já foi calculada no item anterior, de modo que, confirmado pela geometria analítica, temos a menor soma das distâncias entre 3 pontos, quando estes estão alinhados. De fato, encontramos a menor distância para* $x = 5$.
$*$ *Para* $x = 5$, *temos* $y = 0$ *e, de modo simétrico,* $x = -5 \rightarrow y = 0$.
$S(5) = 10$ *e* $S(-5) = 10$.

4.
a) $f(x) = x - 2$; *eixo* $- x$; $x = 1$ *e* $x = 5$.



Como $f(x) < 0$ *para* $x < 2$, *então vamos calcular a área pedida separadamente*
Área entre $x = 1$ *e* $x = 2$:

$A = \frac{1}{2}(2-1).\big(f(2)-f(1)\big) = \frac{1}{2}.(1).\big(0-(-1)\big) = \frac{1}{2}u.A$

$\acute{A}rea\ entre\ x = 2\ e\ x = 5$:

$A = \frac{1}{2}(5-2)\big(f(5)-f(2)\big) = \frac{1}{2}.(3).(3-0) = \frac{9}{2}u.A$

$*\ Logo, a\ \text{área}\ entre\ x = 1\ e\ x = 5\ \text{é}$:

$A_{1\to 5} = \ \frac{1}{2}+\frac{9}{2} = \frac{10}{2} = 5\ u.A$

$b)\ \int_1^5 (x-2)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\Big|_1^5\right] = \frac{1}{2}(5)^2 - 2.(5) - \frac{1}{2}(1)^2 + 2.(1) = \frac{25}{2} - 10 - \frac{1}{2} + 2$
$= \frac{24}{2} - 8 = 12 - 8 = 4.$

$*\ Obs$: $Note\ que, nem\ sempre\ o\ valor\ da\ integral\ corresponde\ ao\ valor\ da\ \text{área}!$

$c)\ \int_0^2 (x-2)\,dx\ ;Usando\ somas\ de\ Riemann$

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}\ ;\ x_i = \frac{2i}{n}\ ; e\ f(x) = x - 2$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (x-2)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}-2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}-\sum_{i=1}^{n}2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i - 2n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\frac{2}{n}.\frac{n(n+1)}{2} - 2n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(n+1)}{n} - 4\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n}+\frac{2}{n} - 4\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - 2\right) \\
&= -2.
\end{aligned}$$

5.

$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2};$

$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2};$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$

$(I) Domínio\ de\ f$:

$*\ D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$;

$(II)\ Interseções\ com\ os\ eixos\ coordenados$:

$f(0) = 0\ ; f(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$

$interseção\ \ (0,0).$

$(III)\ Assíntotas$:

$-Verticais$: $Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a$ é $uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos$:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*\ Verificando\ se\ as\ reta\ x = -1\ e\ x = 1$ são $assíntotas$:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{x^3}^{\substack{-1\\ \uparrow}}}{\underbrace{(1+x)}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}\underbrace{(1-x)}_{\substack{\downarrow\\ 2}}} = -\infty$$

$*\ Logo, a\ reta\ x = -1$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{x^3}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{(1+x)}_{\substack{\downarrow\\ 2}}\underbrace{(1-x)}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = -\infty$$

$*\ Logo, a\ reta\ x = 1$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$-Horizontais$: $Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos$:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{-2x} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{3x}{2} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2}{-2x} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{3x}{2} = +\infty.$$

$*\ Logo,$ não há $assíntotas\ horizontais\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$-Oblíqua$: $Dizemos\ que\ a\ reta\ y = ax + b$ é $uma\ assíntota\ obliqua\ se$

$$\lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}$$

$$f(x) - (-x) = \frac{x}{1-x^2}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{x\to \pm\infty} -\frac{1}{2x} = 0.$$

$*\ Logo, a\ reta\ y = -x$ é $uma\ assíntota\ oblíqua\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$(IV)\ Crescimento\ e\ Decrescimento$:

$$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$*\ Fazendo\ o\ estudo\ do\ sinal\ de\ f'(x), temos:$

$+ + + + + + + + + + + + + + 0 + + + + + + + + + + + +$	x^2
$- - - - (-\sqrt{3}) + + + + + + + + + + + + + (\sqrt{3}) - - - -$	$(3-x^2)$
$+ + + + + + + + + + (-1) + + + + (1) + + + + + + + +$	$(1-x^2)^2$
$- - - - (-\sqrt{3}) + + + (-1) + + 0 + + (1) + + (\sqrt{3}) - - - -$	$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$

$*\ Da\ análise\ acima, concluímos\ que:$

$f(x)$ *é crescente no intervalo* $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \sqrt{3})$ *e*
$f(x)$ *é decrescente no intervalo* $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

$*\ Pontos\ Críticos\ (f'(x) = 0\ ou\ quando\ f'(x)\ não\ existe)$

$-f'(x)$ *não existe em* $x = -1$ *e em* $x = 1$. *Porém,* $x = -1$ *e* $x = 1$ *não pertence ao domínio da função e, portanto, não são pontos críticos!*
$-f'(x) = 0$ *ocorre em* $x = \pm\sqrt{3}$ *e em* $x = 0$.

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{1-(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{-2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.\quad Ponto\ de\ Máximo\ Relativo\ \left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{1-(-\sqrt{3})^2} = \frac{-3\sqrt{3}}{-2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.\quad Ponto\ de\ Mínimo\ Relativo\ \left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$(V)\ Concavidade\ e\ Pontos\ de\ Inflexão:$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$

$*\ Analisando\ o\ comportamento\ (sinal)\ de\ f''(x), temos:$

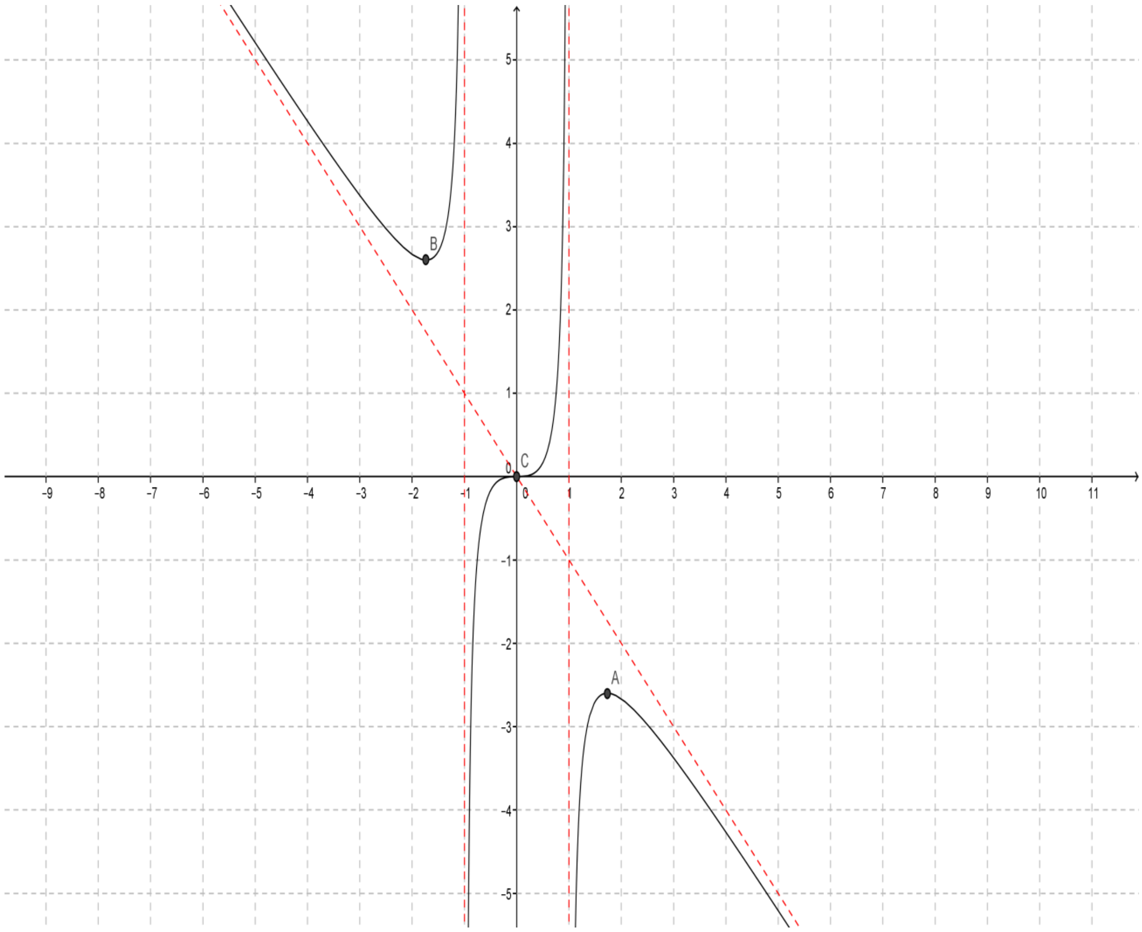
$- - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + + +$	$2x$
$+ +$	(x^2+3)
$- - - - - - (-1) + + + + + + + + + + + (1) - - - - - - - -$	$(1-x^2)^3$
$+ + + + + + (-1) - - - - 0 + + + + + + (1) - - - - - - - -$	$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$

$*\ Da\ análise\ acima, concluímos\ que:$

$f(x)$ *possui concavidade voltada para cima em* $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ *e*
$f(x)$ *possui concavidade voltada para baixo em* $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

$*\ Ponto\ de\ Inflexão\ ocorre\ quando\ há\ mudança\ na\ direção\ da\ concavidade.$
Nesse caso, temos em $x = 0$ *um ponto de inflexão.* $P.I(0,0)$

$Esboço\ do\ Gráfico$:



3.5 Reavaliação da 2ª média-21 de Junho de 2008

1.

$a)\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x.f'''(x)}{f''(x)} = 1.$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x.f'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)+x.f''(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)+x.f''(x)}{f'(x)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f''(x)+f''(x)+x.f'''(x)}{f''(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2f''(x)+x.f'''(x)}{f''(x)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2f''(x)}{f''(x)} + \lim_{x\to\infty} \frac{x.f'''(x)}{f''(x)} = 2+1 = 3.$$

$b)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4\,.\,Determinar\ o\ valor\ de\ c.$

$*\ Façamos\ uma\ mudança\ de\ variável\ t = x-c\ e\ ajustando\ o\ limite\ temos:$
$Obs: se\ x \to \infty, então\ t \to \infty.$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t+2c}{t}\right)^{t+c} = \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{2c}{t}\right)^{t+c} \quad ;$$

$Fazendo\ uma\ última\ mudança\ de\ variável\ \ t = 2cn\ e\ ajustando\ o\ limite:$

$$\lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{2c}{t}\right)^{t+c} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2cn+c} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2cn} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{c} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2cn} \times \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{c}$$

$Calculando\ o\ termo\ em\ destaque:$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2cn} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{2c} = e^{2c}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{c} = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = e^{2c} = 4 \ \Rightarrow 2c = \ln 4 \ \Rightarrow c = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 4^{1/2} \ \therefore c = \ln 2$$

$*\ Obs: podemos\ obter\ o\ mesmo\ resultando\ mudando\ a\ expressão\ no\ limite$
$colocando-o\ na\ base\ neperiana\ e\ usar\ a\ Regra\ de\ L'Hôpital\ depois\ de\ tê-lo$
$transformado\ numa\ fração\ cuja\ indeterminação\ ocorra\ em\ ambos\ os\ membros.$

2.

$f(x) = e^{x^2-x}\ ; encontrar\ os\ valores\ máximo\ e\ mínimos\ no\ intervalo\ [0,1].$
$f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$
$Obs: note\ que\ e^{x^2-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}. Logo, o\ sinal\ de\ f'(x)\ é\ determinado\ pelo$
$fator\ (2x-1).$

$f'(x) > 0 \; se \; x > \dfrac{1}{2} \;\; ; f'(x) = 0 \; se \; x = \dfrac{1}{2} \; e \; f'(x) < 0 \; se \; x < \dfrac{1}{2}.$

$- - - - - - - - - - - - - \dfrac{1}{2} + + + + + + + + + + + + \quad f'(x)$

$* \; Logo, temos \; um \; ponto \; mínimo \; em \; x = \dfrac{1}{2}.$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}};$

$* \; Calculando \; os \; valores \; nas \; extremidades \; do \; intervalo, temos:$

$f(0) = e^0 = 1;$

$f(1) = e^0 = 1;$

$* \; Portanto, o \; valor \; máximo \; no \; intervalo \; [0,1] \; é \; 1 \; e \; o \; valor \; mínimo \; é \; \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}.$

3.

$f(x) = ax^2 + bx - c$

$f'(1) = 0 \; e \; f(1) = 7 \;\; ; \quad Usando \; essas \; informações \; na \; análise \; da \; função, temos:$

$f(2) = -2$

$f'(x) = 2ax + b$

$f'(1) = 2a + b = 0 \; (I)$

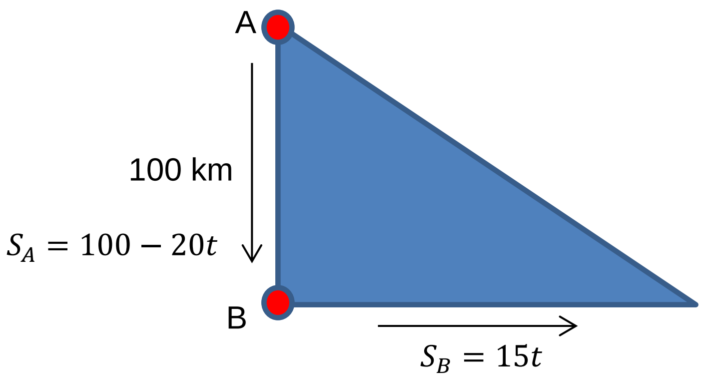
$f(1) = a + b - c = 7 \; (II)$

$f(2) = 4a + 2b - c = -2 \; (III)$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b - c = 7 \\ 4a + 2b - c = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a - c = 7 \\ -c = -2 \end{cases} \rightarrow c = 2; a = -9 \,; b = 18$$

$* \; Logo, f(x) = -9x^2 + 18x - 2$

4.



$* \; A \; distância \; entre \; A \; e \; B \; será \; representada \; pela \; hipotenusa \; do \; triângulo \; acima, visto \; que \; B \; se \; movimenta \; na \; direção \; perpendicular \; à \; trajetória \; do \; navio \; A.$

$$D(t)^2 = S_A(t)^2 + S_B(t)^2$$
$$2D(t).D'(t) = 2S_A(t).S_A'(t) + 2S_B(t).S_B'(t)$$
$$D(t).D'(t) = S_A(t).S_A'(t) + S_B(t).S_B'(t)$$

$$D'(t) = \frac{(100-20t)(-20)+(15t)(15)}{\sqrt{(100-20t)^2+(15t)^2}}$$

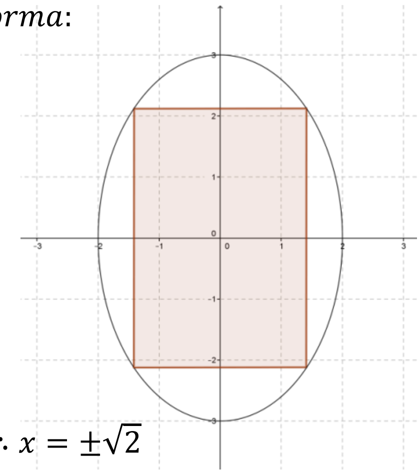
Às 16h terão se passado 3h em relação ao momento em que A estava a 100km de B.

$$D'(3) = \frac{(100-20.3)(-20)+(15.3)(15)}{\sqrt{(100-20.3)^2+(15.3)^2}}$$
$$D'(3) = \frac{-800+675}{\sqrt{40^2+225.9}}$$
$$D'(3) = \frac{-125}{\sqrt{1600+2025}}$$
$$D'(3) = \frac{-125}{\sqrt{3625}}\ km/h$$

$*$ *Logo, os navios A e B estão se aproximando! Note que a distância entre A e B diminuiu, o que explica o fato de que* $D'(3) < 0$.

5.

Dado um ponto da elipse, as coordenadas dele será na forma: $\left(x, \pm\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\right)$. *Pela figura ao lado, note que a área do retângulo será dada como* $A = 2x.2y$, *ou ainda,* $A = |2x.2y|$ *em caso de encontrarmos valores negativos para x ou para y. Então:*



$A = \left|6x\sqrt{4-x^2}\right|$. *Seja* $f(x) = 6x\sqrt{4-x^2}$;

$A = |f(x)|$

$f'(x) = 6\sqrt{4-x^2} - \frac{6x^2}{\sqrt{4-x^2}}$. *fazendo* $f'(x) = 0$

$6\sqrt{4-x^2} = \frac{6x^2}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow x^2 = 4-x^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \therefore x = \pm\sqrt{2}$

Para $x = \pm\sqrt{2}$ *teríamos um ponto de máximo e mínimo para* $f(x)$. *No entanto, note que a função da ÁREA é o módulo dos valores assumidos por* $f(x)$, *sendo assim, para* $x = \pm\sqrt{2}$ *teremos o valor máximo de A. Logo:*

$$A = \left|6.\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{2}^2}\right| = \left|6\sqrt{2}\sqrt{4-2}\right| = \left|6\sqrt{2}\sqrt{2}\right| = |6.2| = |12| = 12\ u.A$$

$$A = \left|-6.\sqrt{2}\sqrt{4-\left(-\sqrt{2}\right)^2}\right| = \left|-6\sqrt{2}\sqrt{4-2}\right| = \left|-6\sqrt{2}\sqrt{2}\right| = |-6.2| = |-12| = 12u.A$$

3.6 VPA 1-12 de Setembro de 2008

1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ cx + k, & 1 < x < 4 \\ -2x, & x \geq 4 \end{cases}$$

$a)\ Encontrar\ o\ valor\ de\ c\ e\ k\ para\ que\ f\ seja\ contínua\ nos\ reais.$

$*\ Obs: como\ todas\ as\ sentenças\ são\ funções\ polinomiais\ e, portanto, contínuas\ onde\ predominam.$

$Desta\ observação\ já\ podemos\ dizer\ que\ f$ é $contínuas\ no\ intervalo\ (-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty). Basta\ encontrarmos\ os\ valores\ de\ c\ e\ k\ para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ x = 1\ e\ em\ x = 4.$

$*\ Em\ x = 1, devemos\ ter\ a\ seguinte\ igualdade\ satisfeita:$

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$1)\ f(1) = 1^2 = 1.$

$2)\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} cx + k = c + k.$

$3)\ Pela\ igualdade\ acima, temos: \quad c + k = 1 \quad (I)$

$*\ Em\ x = 4, devemos\ ter\ a\ seguinte\ igualdade\ satisfeita:$

$$f(4) = \lim_{x \to 4^-} f(x)$$

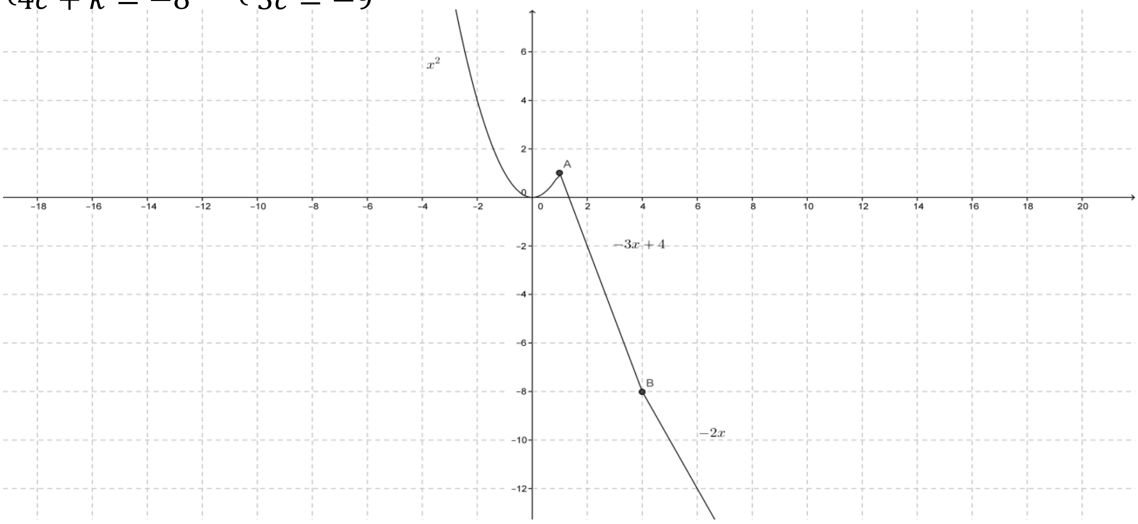
$1) f(4) = -2.(4) = -8.$

$2)\ \lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} cx + k = 4c + k.$

$3)\ Pela\ igualdade\ acima, temos: 4c + k = -8\ \ (II)$

$*\ Resolvendo\ o\ seguinte\ sistem:$

$\begin{cases} c + k = 1 \\ 4c + k = -8 \end{cases} \to \begin{cases} c + k = 1 \\ 3c = -9 \end{cases} \to c = -3; k = 4.$



2.

$a)\ f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}\ ; determinar\ f'(x)\ pela\ definição.$

$Pela\ definição\ de\ derivada\ de\ uma\ função\ num\ ponto, temos\ a\ seguinte\ expressão:$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$* \, Vamos \; usar \; a \; segunda \; expressão:$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(x+\Delta x)^2}{x+\Delta x - 1} - \frac{x^2}{x-1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(x-1)(x+\Delta x)^2 - x^2(x+\Delta x - 1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 2x^2\Delta x + x\Delta x^2 - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 - x^3 - x^2\Delta x + x^2}{\Delta x(x+\Delta x - 1)(x-1)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2\Delta x + x\Delta x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(x^2 + x\Delta x - 2x - \Delta x)}{\Delta x(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + x\Delta x - 2x - \Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)} = \frac{x^2-2x}{(x-1)(x-1)} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$b) \; f(x) = 4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x-1} = 4$

$x^2 = 4x - 4 \to x^2 - 4x + 4 = 0 \to (x-2)^2 = 0 \therefore x = 2$

$* \, Calculando \; a \; inclinação \; (coeficiente \; angular) \; da \; reta \; tangente:$

$$f'(2) = \frac{2^2 - 2.2}{(2-1)^2} = \frac{4-4}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

$Equação \; da \; reta \; tangente \; no \; ponto \; (2,4):$

$$y - y_o = m(x - x_o)$$
$$y - 4 = 0(x-2)$$
$$y = 4$$

3.

$a) \; f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt[4]{16x^4 + 3x + 2}} \;\; ; Determinar \; as \; assíntotas, caso \; existam.$

$* \, Primeiro, vamos \; definir \; o \; domínio \; de \; f.$

$\sqrt[4]{16x^4 + 3x + 2} \neq 0.$

$16x^4 + 3x + 2 > 0$

$* \, Com \; esta \; informação \; ainda \; é \; inviável \; determinar \; um \; x \; tal \; que \; o \; denominador \; seja \; zero, provável \; ponto \; de \; descontinuidade \; da \; função.$

$-Considerações: 16x^4 \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \; e \;\; 3x > 0 \; se \; x \geq 0.$

$Então, para \; x > 0 \; : \; 16x^4 + 3x + 2 > 0$

$* \, Quando \; temos \; 16x^4 + 3x < 0 \; para \; x < 0 \; ?$

$1) 16x^4 + 3x = 0 \to x = 0 \; ou \; x = -\sqrt[3]{\dfrac{3}{16}}$

$$g(x) = 16x^4 + 3x = x\left(x + \sqrt[3]{\frac{3}{16}}\right)\left(16x^2 - 16\sqrt[3]{\frac{3}{16}}x + \sqrt[3]{\frac{9}{256}}\right)$$

$* \, O \; terceiro \; fator$ é $um \; polinômio \; do \; 2º \; grau \; irredutível, ou \; seja, não \; possui \; raízes \; reais. Logo, ou \; ele$ é $estritamente \; positivo \; ou \; negativo. Usando \; qualquer$

$valor\ para\ x\ nesse\ fator, notamos\ que\ ele$ é $sempre\ positivo!$
$*\ Pela\ derivada\ de\ g(x)\ descobriremos\ qual$ é $o\ menor\ valor\ de\ g\ e, se\ este\ valor\ em\ módulo\ for\ inferior\ a\ 2, concluímos\ que\ 16x^4 + 3x + 2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$

$g'(x) = 64x^3 + 3$

$g'(x) = 0 \ \Rightarrow 64x^3 + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt[3]{3}}{4}$

$g\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{4}\right) = 16.\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{4}\right)^4 + 3\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{4}\right) = -\frac{9\sqrt[3]{3}}{16}$; $esse\ valor$ é $menor\ que\ 2.$

$*\ Portanto, D(f) = \mathbb{R}.$

$Obs: dessa\ forma\ desconsideramos\ a\ hipótese\ de\ existir\ alguma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$-Horizontais: Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-9}{\sqrt[4]{16x^4+3x+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-9}{|x|}}{\frac{\sqrt[4]{16x^4+3x+2}}{|x|}}\ ;$$

$Obs: |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt[4]{x^4}. se\ x \to +\infty, então\ |x| = x.$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-9}{|x|}}{\frac{\sqrt[4]{16x^4+3x+2}}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-9}{x}}{\frac{\sqrt[4]{16x^4+3x+2}}{\sqrt[4]{x^4}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{9}{x}}{\sqrt[4]{16+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}} =$$

$$\frac{1-0}{\sqrt[4]{16+0+0}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}.$$

$-Logo, a\ reta\ y = \frac{1}{2}$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-9}{\sqrt[4]{16x^4+3x+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x-9}{|x|}}{\frac{\sqrt[4]{16x^4+3x+2}}{|x|}}\ ;$$

$Obs: |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt[4]{x^4}. se\ x \to -\infty, então\ |x| = -x.$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x-9}{|x|}}{\frac{\sqrt[4]{16x^4+3x+2}}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x-9}{-x}}{\frac{\sqrt[4]{16x^4+3x+2}}{\sqrt[4]{x^4}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1+\frac{9}{x}}{\sqrt[4]{16+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}} =$$

$$\frac{-1+0}{\sqrt[4]{16+0+0}} = \frac{-1}{\sqrt[4]{16}} = -\frac{1}{2}.$$

$-Logo, a\ reta\ y = -\frac{1}{2}$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$Comentário: Quando\ foi\ preciso\ mostrar\ que\ f(x)\ não\ possui\ assíntotas\ verticais, utilizamos\ o\ conceito\ de\ ponto\ crítico\ ao\ fazer\ g'(x) = 0.$

$b)\ y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}\ ;\quad y = f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

$-Assíntota\ Verticais:$

$*\ Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a\ é\ uma\ assíntotas\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ casos\ a\ seguir:$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*\ Verificando\ se\ as\ retas\ x = 1\ e\ x = 2\ são\ assíntotas\ verticais\ ao\ gráfico\ de\ f(x), pois\ são\ os\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ função.$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\underbrace{(x-1)}_{\downarrow\ 0^+}\underbrace{(x-2)}_{\downarrow\ -1}} = -\infty$$

$Obs: se\ x \to 1^+, então\ x > 1. Logo, x - 1 > 0.$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\underbrace{(x-1)}_{\downarrow\ 0^-}\underbrace{(x-2)}_{\downarrow\ -1}} = +\infty$$

$Obs: se\ x \to 1^-, então\ x < 1. Logo, x - 1 < 0.$

$*\ Logo, a\ reta\ x = 1\ é\ uma\ assíntota\ vertical.$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\underbrace{(x-1)}_{\downarrow\ 1}\underbrace{(x-2)}_{\downarrow\ 0^+}} = +\infty$$

$Obs: se\ x \to 2^+, então\ x > 2. Logo, x - 2 > 0.$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\underbrace{(x-1)}_{\downarrow\ 1}\underbrace{(x-2)}_{\downarrow\ 0^-}} = -\infty$$

$Obs: se\ x \to 2^-, então\ x < 2. Logo, x - 2 < 0.$

$*\ Logo, a\ reta\ x = 2\ é\ uma\ assíntota\ vertical.$

$Portanto, o\ gráfico\ assintota\ as\ retas\ assíntotas\ por\ ambos\ os\ lados, pois\ os\ limites\ laterais\ em\ x = 1\ e\ em\ x = 2\ não\ existem.$

4.

$a)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x^3 - 8}\ ;\quad Obs:\ |x-2| = \begin{cases} x-2, & se\ x \geq 2 \\ -(x-2), & se\ x < 2 \end{cases}.$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^3-8} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^3-8} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x^2+2x+4)} = \frac{1}{12}$$

$*\ Obs: se\ x \to 2^+, então\ x > 2. Logo, |x-2| = x - 2$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^3-8} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^3-8} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-1}{(x^2+2x+4)} = -\frac{1}{12}$$

$*\ Obs: se\ x \to 2^-, então\ x < 2. Logo, |x-2| = -(x-2).$

$Como\ \lim_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x^3-8} \neq \lim_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x^3-8}, dizemos\ que\ \lim_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x^3-8} \nexists.$

$b) Mostre\ que\ \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt[3]{x}\cdot 2^{sen\frac{\pi}{2}}\right) = 0$

$$-1 \le sen\frac{\pi}{2} \le 1$$
$$2^{-1} \le 2^{sen\frac{\pi}{2}} \le 2^1$$
$$\frac{1}{2} \le 2^{sen\frac{\pi}{2}} \le 2$$
$$\frac{\sqrt[3]{x}}{2} \le \sqrt[3]{x}\cdot 2^{sen\frac{\pi}{2}} \le 2\sqrt[3]{x}$$

$Sejam\ f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2}\ , g(x) = \sqrt[3]{x}\cdot 2^{sen\frac{\pi}{2}}\ e\ h(x) = 2\sqrt[3]{x}\ . Então, temos:$

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

$E\ ainda, \lim_{x\to 0} f(x) = 0\ e\ \lim_{x\to 0} h(x) = 0, ou\ seja, \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x)\ , podemos\ garantir\ pelo\ Teorema\ do\ Confronto\ que\ se\ f(x) \le g(x) \le h(x)\ e\ \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x)\ , então\ \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0. Portanto,$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt[3]{x}\cdot 2^{sen\frac{\pi}{2}}\right) = 0$$

5.

$y = \dfrac{1}{x}$. $\quad Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ de\ abscissa\ x = a.\quad a > 0.$

$*\ Ponto\ de\ tangencia: P = \left(a, \dfrac{1}{a}\right).$

$y' = -\dfrac{1}{x^2}\ . \quad y'(a) = -\dfrac{1}{a^2}.$

$$y - y_o = m(x - x_o)$$
$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$
$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

$*\ Interseções\ da\ reta\ tangente\ com\ os\ eixos\ coordenados:$

$A = \left(0, \dfrac{2}{a}\right)\ e\ B = (2a, 0)$

$*\ Portanto, a\ área\ do\ triângulo\ formado\ pela\ reta\ tangente\ e\ os\ eixos\ coordenados$ é:

$$Área = \frac{1}{2}(x_B - x_O)\cdot(y_A - y_O) = \frac{1}{2}(2a)\left(\frac{2}{a}\right) = 2\ u.A$$

3.7 VPA 1-13 de Setembro de 2008

1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \quad , & x \leq 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 4, & 1 < x \leq 4 \\ \quad 2 \quad , & x > 4 \end{cases}$$

$*\ f$ *é uma função sentencial, na qual suas sentenças são funções polinomiais e, portanto, contínuas em seus domínios.*

Logo, f *é contínua em* $(-\infty, 1) \cup (1{,}4) \cup (4, +\infty)$.

Vamos verificar se f *é contínua nos pontos onde há mudança de comportamento da função, ou seja, em* $x = 1$ *e* $x = 4$.

$*$ *Dizemos que* f *é contínua num ponto* $x = a$ *se, e somente se,*

$$1)\ f(a)\ existe;$$
$$2)\ \lim_{x \to a} f(x)\ \ existe;$$
$$3)\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$-Em\ x = 1$:

$1)\ f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$

$$2)\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(-\frac{x^2}{2} + 4\right) = \lim_{x \to 1^+} -\frac{x^2}{2} + \lim_{x \to 1^+} 4 = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}.$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + \lim_{x \to 1^-} 1 = 1 + 1 = 2.$$

$*\ Como\ \lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)\ \ então\ \lim_{x \to 1} f(x)\ \nexists.$

$*\ Consequentemente,$ f *não é contínua em* $x = 1$.

$-Em\ x = 4$:

$$1)\ f(4) = -\frac{4^2}{2} + 4 = -8 + 4 = -4.$$

$$2)\ \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} 2 = 2.$$

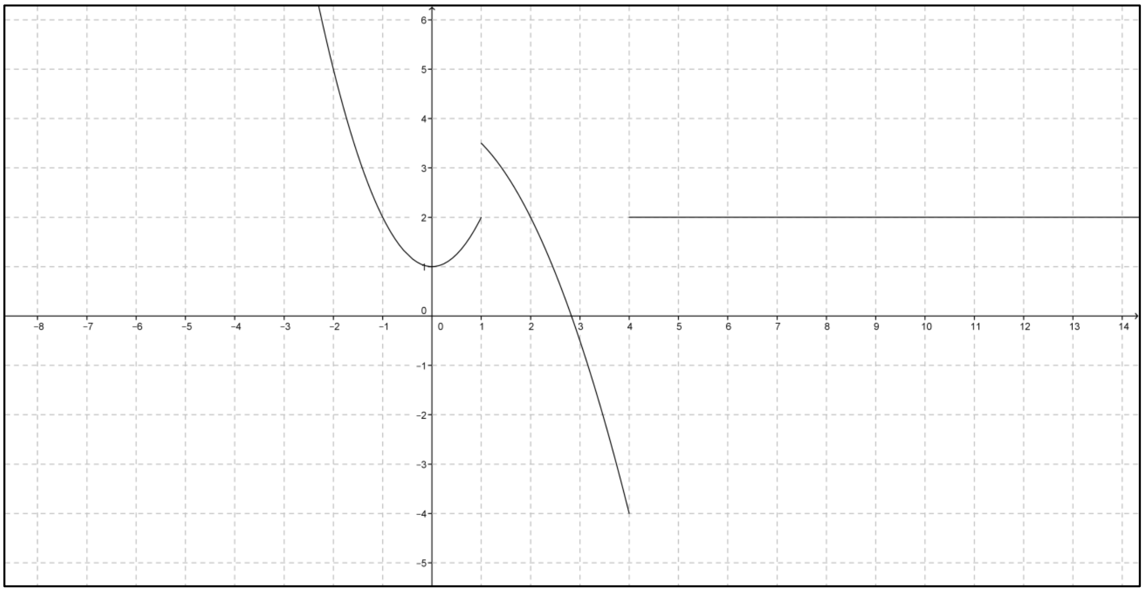
$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \left(\frac{-x^2}{2} + 4\right) = \lim_{x \to 4^-} \frac{-x^2}{2} + \lim_{x \to 4^-} 4 = -8 + 4 = -4.$$

$*\ Como\ \lim_{x \to 4^+} f(x) \neq \lim_{x \to 4^-} f(x)\ \ então\ \lim_{x \to 4} f(x)\ \nexists.$

$*\ Consequentemente,$ f *não é contínua em* $x = 4$.

$*\ Sendo$ f *descontínua em* $x = 1$ *e* $x = 4$ *temos, portanto, que* f *não é contínua nos reais.*

$b)$ *Esboço do gráfico de* $f(x)$:



2.

$a)\ f(x) = \dfrac{5-3x}{x-2}$; *Determinar, pela definição,* $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{5-3(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)-2} - \dfrac{5-3x}{x-2}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(x-2)[5-3(x+\Delta x)] - [(x+\Delta x)-2](5-3x)}{(x-2)[(x+\Delta x)-2]}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x - 3x^2 - 3x\Delta x - 10 + 6x + 6\Delta x - [5x + 5\Delta x - 10 - 3x^2 - 3x\Delta x + 6x]}{\Delta x(x-2)[(x+\Delta x)-2]} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x - 3x^2 - 3x\Delta x - 10 + 6x + 6\Delta x - 5x - 5\Delta x + 10 + 3x^2 + 3x\Delta x - 6x}{\Delta x(x-2)[(x+\Delta x)-2]} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(x-2)[(x+\Delta x)-2]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x-2)[(x+\Delta x)-2]} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

$b)$ *Equação da reta tangente no ponto* $(3,-4)$

$*\ f'(3) = \dfrac{1}{(3-2)^2} = \dfrac{1}{1^2} = 1.$

$*$ *Dado um ponto e o coeficiente angular da reta, temos:*

$$y - y_o = m(x - x_o)$$
$$y - (-4) = 1(x-3)$$
$$y + 4 = x - 3$$
$$y = x - 7$$

3.

$a)\ h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; *Determinar as assíntotas.*

$*$ *Primeiro vamos determinar o domínio da função* h.

$\sqrt{x^2+1} > 0 \Rightarrow x^2+1>0\,; x^2 > -1\,;\ Obs\colon x^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$
$Portanto\ x^2+1>0\ \forall x \in \mathbb{R}.$
$Logo, D(h) = \mathbb{R}.$
$*\ Como\ h$ é $contínua\ nos\ reais, ou\ seja,$ não há $ponto\ de\ descontinuidade, podemos\ afirmar\ que\ h$ não $possui\ assíntotas\ verticais$!!!

$Assíntotas\ Horizontais$:
$-Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ casos\ a\ seguir$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} h(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1. \quad Obs\colon se\ x\to+\infty, então\ |x| = x.\ |x| = \sqrt{x^2}.$$

$*\ Logo, a\ reta\ y = 1$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ h(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+0}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} = -1. \quad Obs\colon se\ x\to+\infty, então\ |x| = x.\ |x| = \sqrt{x^2}.$$

$*\ Logo, a\ reta\ y = -1$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ h(x).$

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}};$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{|x|}+\frac{\sqrt{x^2-x}}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}+\frac{\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{|x|}+\frac{\sqrt{x^2-x}}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}+\frac{\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{-2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

$*\ Logo, \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) \nexists.$

4.

$$a)\ \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{|x-a|}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{|x-a|}\ ;Obs\colon |x-a|=\begin{cases} x-a, & se\ x\geq a\\ -(x-a), & se\ x<a\end{cases}.$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)(x+a)}{|x-a|}=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)}=\lim_{x\to a^+}(x+a)=2a.$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{(x-a)(x+a)}{|x-a|}=\lim_{x\to a^-}\frac{(x-a)(x+a)}{-(x-a)}=\lim_{x\to a^+}-(x+a)=-2a.$$

$*\ Como\ os\ limites\ laterais\ existem, mas\ são\ diferentes, então\ \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{|x-a|}\ \nexists.$

$$b)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}\cdot\frac{\left(\sqrt{6-x}+2\right)}{\left(\sqrt{6-x}+2\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{3-x}+1\right)}{\left(\sqrt{3-x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}{-(x-2)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{3-x}+1\right)}{\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=\frac{\sqrt{3-2}+1}{\sqrt{6-2}+2}=\frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt{4}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

5.

$a)\ |g(x)+4|<2(x-3)^4\ ;Determinar\ \lim_{x\to 3}g(x).$

$*\ Usando\ a\ desigualdade\ modular\ temos\colon$

$$-2(x-3)^4<g(x)+4<2(x-3)^4$$
$$-2(x-3)^4-4<g(x)<2(x-3)^4-4$$

$Sejam\ f(x)=-2(x-3)^4-4\ e\ h(x)=2(x-3)^4-4, então\ temos\colon$

$$f(x)<g(x)<h(x)$$

$E\ ainda, \lim_{x\to 3}f(x)=0\ e\ \lim_{x\to 3}h(x)=0, ou\ seja, \lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}h(x)\ , podemos\ garantir\ pelo\ Teorema\ do\ Confronto\ que\ se\ f(x)<g(x)<h(x)\ e\ \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}h(x)\ , então\ \lim_{x\to 3}g(x)=\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}h(x)=-4. Portanto,$

$$\lim_{x\to 3}g(x)=-4$$

$$b)\ h(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}\ ;\ h(x)=\frac{1}{(x+2)(x+3)}.$$

$*\ Temos\ que\ D(h)=\mathbb{R}-\{-2,-3\}. Logo, vamos\ verificar\ se, nos\ pontos\ onde\ h\ é\ descontínua, temos\ uma\ assíntota\ vertical.$

$-Dizemos\ que\ a\ reta\ x=a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos\colon$

$$\lim_{x\to a^+}h(x)=\pm\infty\quad ou\quad \lim_{x\to a^-}h(x)=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}h(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{\underbrace{(x+2)}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}\underbrace{(x+3)}_{\substack{\downarrow\\ 1}}}=+\infty$$

$Obs\colon se\ x\to -2^+, então\ x>-2\ \therefore x+2>0.$

$$\lim_{x\to -2^-}h(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{\underbrace{(x+2)}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}\underbrace{(x+3)}_{\substack{\downarrow\\ 1}}}=-\infty$$

$Obs: se\ x \to -2^-, então\ x < -2\ \therefore x + 2 < 0.$

$*\ Logo, a\ reta\ x = -2$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ h(x).$

$$\lim_{x\to -3^+} h(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{\underbrace{(x+2)}_{\substack{\downarrow\\ -1}}\underbrace{(x+3)}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = -\infty$$

$Obs: se\ x \to -3^+, então\ x > -3\ \therefore x + 3 > 0.$

$$\lim_{x\to -3^-} h(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{\underbrace{(x+2)}_{\substack{\downarrow\\ -1}}\underbrace{(x+3)}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = +\infty$$

$Obs: se\ x \to -3^-, então\ x < -3\ \therefore x + 3 < 0.$

$*\ Logo, a\ reta\ x = -3$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ h(x).$

3.8 2ª Prova-03 de Outubro de 2008

1.

$a)\ f(x) = \ln|\cos\sec(3x)\,.\,\text{cotg}(3x)|\ \ .\,Determinar\ f'(x).$

$$f'(x) = \frac{D_x[\cos\sec(3x)\,.\,\text{cotg}(3x)]}{\cos\sec(3x)\,.\,\text{cotg}(3x)}$$

$$f'(x) = \frac{-3\cos\sec(3x)\,.\,\text{cotg}^2(3x) - 3\cos\sec^3(3x)}{\cos\sec(3x)\,.\,\text{cotg}(3x)}$$

$$f'(x) = \frac{-3\cos\sec(3x)[\text{cotg}^2(3x) + \cos\sec^2(3x)]}{\cos\sec(3x)\,.\,\text{cotg}(3x)}\ ;\quad 1 + \text{cotg}^2(x) = \cos\sec^2(x)$$

$$f'(x) = \frac{-3[2\cos\sec^2(3x) - 1]}{\text{cotg}(3x)}.$$

$b)\ x\,\text{sen}\,y + \cos 2y = \text{sen}\,x\ \ ; Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (0, \pi/4).$

$*\ Por\ derivação\ implícita, temos:$

$\text{sen}\,y + xy'.\cos y + 2y'.(-\text{sen}\,2y) = \cos x$

$y'.(x.\cos y - 2\cos 2y) = \cos x - \text{sen}\,y$

$$y' = \frac{\cos x - \text{sen}\,y}{x.\cos y - 2\,\text{sen}\,2y}$$

$Substituindo\ o\ ponto\ em\ questão\ na\ expressão\ da\ derivada, temos:$

$$y' = \frac{\cos 0 - \text{sen}\frac{\pi}{4}}{-2.\,\text{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-2} = \frac{\sqrt{2} - 2}{4}.$$

$Equação\ da\ reta\ tangente:$

$$y - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - 2}{4}(x - 0)$$

$$y = \frac{\sqrt{2} - 2}{4}x + \frac{\pi}{4}\quad ou\quad y = \frac{(\sqrt{2} - 2)x + \pi}{4}$$

$2.\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}(2-x)^5}{(x+3)^4}\ \ ;\ \ Determinar\ f'(0)\ por\ diferenciação\ logarítmica.$

$$\ln f(x) = \ln\frac{\sqrt{x+1}(2-x)^5}{(x+3)^4}$$

$$\ln f(x) = \ln\sqrt{x+1} + \ln(2-x)^5 - \ln(x+3)^4$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{2}\ln(x+1) + 5\ln(2-x) - 4\ln(x+3)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)} + 5\cdot\frac{(-1)}{(2-x)} - 4\cdot\frac{1}{(x+3)}$$

$$f'(x) = f(x)\cdot\left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{5}{(2-x)} - \frac{4}{(x+3)}\right]$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+1}(2-x)^5}{(x+3)^4}\left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{5}{(2-x)} - \frac{4}{(x+3)}\right]$$

$$f'(0) = \frac{\sqrt{0+1}(2-0)^5}{(0+3)^4}\left[\frac{1}{2(0+1)} - \frac{5}{(2-0)} - \frac{4}{(0+3)}\right] = \frac{\sqrt{1}(2)^5}{3^4}\left[\frac{1}{2} - \frac{5}{2} - \frac{4}{3}\right] =$$

$$\frac{32}{81}\left[-2 - \frac{4}{3}\right] = \frac{32}{81}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right) = -\frac{320}{243}.$$

3.
$a)\ y = \log_3(\log_2 x)$. $Calcular\ f'(2).$
$*\ Seja\ u = \log_2 x$, $então\ y = \log_3 u.$
$Pela\ Regra\ da\ Cadeia,$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x.\ln 2} \cdot \frac{1}{u.\ln 3}$$
$$y' = f'(x) = \frac{1}{(x.\log_2 x)\ln(2).\ln(3)}\ ; \quad \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}\ (mudança\ de\ base!)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x.\ln x.\ln 3}\ \therefore f'(x) = \frac{1}{\ln x^x.\ln 3}.$$
$$f'(2) = \frac{1}{\ln 4.\ln 3}.$$

$b)\ y = |x|^{e^{x^2}}.Determinar\ y'.$
$$\ln y = e^{x^2}.\ln|x|$$
$$\frac{y'}{y} = (2x).e^{x^2}.\ln|x| + e^{x^2}.\frac{1}{x}$$
$$y' = y.e^{x^2}\left[2x.\ln|x| + \frac{1}{x}\right]$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = |x|^{e^{x^2}}.e^{x^2}\left[2x.\ln|x| + \frac{1}{x}\right].$$

4.
$a)\ y = \mathrm{senh}(x)\ ; encontrar\ o\ ponto\ onde\ y' = 1.$
$$y' = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
$$y' = 1 \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$$
$$e^x + e^{-x} = 2$$
$$e^x + e^{-x} - 2 = 0$$
$$e^x + \frac{1}{e^x} - 2 = 0$$
$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$; $seja\ b = e^x$. $Obs: b > 0, pois\ e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$
$b^2 - 2b + 1 = 0 \rightarrow (b-1)^2 = 0\ \therefore b = 1\ (procede\ com\ a\ obs\ acima).$
$b = e^x \rightarrow 1 = e^x\ ; x = \ln 1\ \therefore x = 0.$

$*\ Logo, o\ ponto\ em\ questão$ é $(0, \mathrm{senh}(0)) = (0,0).$

$b)\ f(x) = 2^{\mathrm{arctg}\, x^2}.Calcular\ f'(1).$
$*\ Seja\ u = x^2\ e\ v = \mathrm{arctg}\, u$. $Então, f(v) = 2^v.$
$Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{dy}{dv}$$
$$f'(x) = (2x) \cdot \frac{1}{1+u^2} \cdot 2^v \cdot \ln(2)$$

$$f'(x) = \frac{2.\,2^{\operatorname{arctg} x^2}.\,x.\ln(2)}{1 + x^4}$$
$$f'(1) = \frac{2.\,2^{\operatorname{arctg}(1)}.\,1.\ln(2)}{1 + 1^4} = \frac{2.\,2^{\operatorname{arctg}(1)}.\,1.\ln(2)}{1 + 1} = \frac{2.2^{\frac{\pi}{4}}.\ln(2)}{2} = 2^{\frac{\pi}{4}}.\ln(2)$$

5.

$a)\ f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x + c \operatorname{tg} x\ ;\ \ f(0) = 2, f'(\pi) = 0\ e\ f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4.$

$f(0) = a.\operatorname{sen}(0) + b.\cos(0) + c.\operatorname{tg}(0)$
$f(0) = b\,; f(0) = 2\ \therefore\ b = 2.$

$f'(x) = a.\cos x - 2.\operatorname{sen} x + c.\sec^2 x$
$f'(\pi) = a.\cos\pi - 2.\operatorname{sen}\pi + c.\sec^2\pi$
$f'(\pi) = -a + c\,; f'(\pi) = 0 \therefore\ -a + c = 0\ \ (I)$

$f''(x) = -a.\operatorname{sen} x - 2.\cos x + c(2.\sec^2 x\,.\operatorname{tg} x)$
$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -a.\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - 2.\cos\frac{\pi}{6} + c\left(2.\sec^2\frac{\pi}{6}.\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$$
$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{a}{2} - \sqrt{3} + c\left(2.\frac{4}{3}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{a}{2} - \sqrt{3} + \frac{8\sqrt{3}}{9}c\,; f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \therefore = -\frac{a}{2} - \sqrt{3} + \frac{8\sqrt{3}}{9}c = 4\ \ (II)$$

$*\ Da\ equação\ (I)\ temos\ a = c. Substituindo\ em\ (II), temos:$
$$-\frac{a}{2} - \sqrt{3} + \frac{8\sqrt{3}}{9}a = 4 \to a\left(-\frac{1}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{9}\right) = 4 + \sqrt{3} \to a\left(\frac{-9 + 16\sqrt{3}}{18}\right) = 4 + \sqrt{3}$$
$$\to a = \frac{18\left(4 + \sqrt{3}\right)}{16\sqrt{3} - 9}\ ;$$
$$Logo, temos\ a = c = \frac{18\left(4 + \sqrt{3}\right)}{16\sqrt{3} - 9}\ e\ b = 2.$$

$$b) \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)(x+2)};$$
$*\ Façamos\ a\ substituição\ \theta = x - 1\ e\ ajustando\ a\ expressão\ do\ limite, temos:$
$*\ Obs: se\ x \to 1, então\ \theta \to 0.$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta(\theta+3)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}.\frac{1}{(\theta+3)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} \times \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{(\theta+3)}$$
$$= 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$
$$*\ Portanto, \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3}.$$

3.9 2ª Avaliação-04 de Outubro de 2008

1.

$$y = \frac{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{(e^{2x}+1)^3}\ ; Determinar\ y' por\ diferenciação\ logarítmica.$$

$$\ln y = \ln \frac{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{(e^{2x}+1)^3}$$
$$\ln y = \ \ln(\cos^2 x) + \ln(\operatorname{tg}^4 x) - \ln(e^{2x}+1)^3$$
$$\ln y = 2.\ln(\cos x) + 4.\ln(\operatorname{tg} x) - 3.\ln(e^{2x}+1)$$
$$\frac{y'}{y} = -2.\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 4.\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} - 3\frac{2.e^{2x}}{(e^{2x}+1)}$$
$$y' = y\left[-2.\operatorname{tg} x + 4(\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x) - \frac{6.e^{2x}}{(e^{2x}+1)}\right]$$
$$y' = y \cdot \left[-2.\operatorname{tg} x + 4(\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x) - \frac{6.e^{2x}}{(e^{2x}+1)}\right]$$
$$y' = \ y \cdot \left[2.\operatorname{tg} x + 4.\operatorname{cotg} x - \frac{6.e^{2x}}{(e^{2x}+1)}\right]$$
$$y' = 2y \cdot \left[\operatorname{tg} x + 2.\operatorname{cotg} x - \frac{3.e^{2x}}{(e^{2x}+1)}\right]$$
$$y' = \frac{2 \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{(e^{2x}+1)^3} \cdot \left[\operatorname{tg} x + 2.\operatorname{cotg} x - \frac{3.e^{2x}}{(e^{2x}+1)}\right].$$

2. $x^2y^2 + xy = 2\ ;\ Esta\ curva\ possui\ algum\ ponto\ onde\ y' = 0\ ?$
$*\ Derivando\ implicitamente, temos:$
$$2xy^2 + 2yy'x^2 + y + xy' = 0$$
$$y'(2x^2y + x) = -(2xy^2 + y)$$
$$y' = -\frac{2xy^2 + y}{2x^2y + x} = -\frac{y(2xy+1)}{x(2xy+1)} \therefore y' = -\frac{y}{x}; y' = 0 \ \Leftrightarrow y = 0.$$
$*\ Note\ que\ para\ y = 0\ temos\ a\ seguinte\ expressão\ na\ curva:$
$$x^2.0^2 + x.0 = 2$$
$$0 = 2\ (Um\ absurdo!), 0 \neq 2.$$

$*\ Isto\ implica\ dizer, que\ a\ curva\ acima\ não\ possui\ algum\ ponto\ onde\ y' = 0\ e,$ $portanto, não\ existe\ reta\ tangente\ horizontal\ que\ seria\ paralela\ a\ reta\ y = 5.$

3.

$a)\ y = 3^{\cos(2x)}\ ; Equação\ da\ reta\ tangente\ em\ y = 1\ com\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
$$y = 1 \Rightarrow 3^{\cos(2x)} = 1 \rightarrow 3^{\cos(2x)} = 3^0 \ \therefore \cos(2x) = 0.$$
$$*\ 2x = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \quad ou \ \ 2x = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi$$
$$*\ x = \frac{\pi}{4} \pm k\pi \quad ou \ \ x = \frac{3\pi}{4} \pm k\pi.$$
$Como\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, ou\ seja, x\ é\ um\ arco\ do\ 1^{\underline{o}}\ quadrante, então\ x = \frac{\pi}{4}.$
$*\ Seja\ u = 2x\ e\ v = \cos u,\ \ então\ y = 3^v.$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{dy}{dv}$$

$$y' = 2.(-\operatorname{sen} u).3^v.\ln(3)$$

$$y' = -2.3^{\cos(2x)}.\operatorname{sen}(2x).\ln(3)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.3^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right).\ln(3)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.3^0.1.\ln(3)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.\ln(3)$$

$*\ Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ \left(\frac{\pi}{4}, 1\right):$

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

$$y - 1 = -2.\ln(3)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = -2.\ln(3)\,x + \frac{\pi}{2}\ln(3) + 1$$

$b)\ y = (\ln x)^{\operatorname{sen}(2x)}\ ; Determinar\ \frac{dy}{dx}.$

$\ln y = \operatorname{sen}(2x).\ln(\ln x)$

$\frac{y'}{y} = 2.\cos(2x).\ln(\ln x) + \operatorname{sen}(2x).\frac{1}{x}.\frac{1}{\ln x}$

$y' = y\left[2.\cos(2x).\ln(\ln x) + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x\ln x}\right]$

$y' = (\ln x)^{\operatorname{sen}(2x)}\left[2.\cos(2x).\ln(\ln x) + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x\ln x}\right].$

4.

$a)\ y = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\ ; Determinar\ \frac{dy}{dx}, sendo\ 0 < x < 1.$

$*\ Sejam\ u = 1 - x^2\ e\ v = \sqrt{u}. Então\ y = \operatorname{arcsen} v.$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{dy}{dv}$$

$$y' = (-2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-1+x^2}}$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{x^2}}\ ;\ obs: \sqrt{x^2} = |x|$$

$$y' = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

$b)\ f(x) = \frac{\log_\pi x}{x^2}\ ;\ Determinar\ f'(1).$

$$f'(x) = \frac{D_x[\log_\pi x].x^2 - D_x[x^2].\log_\pi x}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x\ln\pi}\cdot x^2 - (2x).\log_\pi x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{1-2\log_\pi x}{x^3.\ln\pi} \therefore f'(1) = \frac{1-2\log_\pi 1}{1^3.\ln\pi} = \frac{1-2.0}{\ln\pi} = \frac{1}{\ln\pi}.$$

5.

$a)y = x\,\text{tgh}(\sqrt{x})$; *Equação da reta normal no ponto* $(0{,}0)$.

$*$ *A inclinação (coeficiente angular)* m_n *da reta normal é o inverso simétrico do coeficiente angular da reta tangente naquele ponto. Logo,*

$$m_n = \frac{1}{y'}$$

$$y' = D_x[x].\text{tgh}(\sqrt{x}) + x.D_x[\text{tgh}(\sqrt{x})]$$

$$y' = \text{tgh}(\sqrt{x}) + x.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).\text{sech}^2(\sqrt{x})$$

$*$ *Calculando o valor de* y' *no ponto* $(0,0)$*, temos*:

$$y'(0) = \text{tgh}(\sqrt{0}) + x.\left(\frac{1}{2\sqrt{0}}\right).\text{sech}^2(\sqrt{x});$$

$*$ *Note que há uma indeterminação na derivada para* $x = 0$.

$*$ *Analisando com cuidado, notamos que* $y' = \text{tgh}(\sqrt{x}) + x.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).\text{sech}^2(\sqrt{x})$ *só existe para* $x > 0$. *Logo,* y *só possui* ${y'}_+(0)$ *e podemos calculá* $-$ *lo.*

$$\lim_{x\to0^+} y' = \lim_{x\to0^+}\left[\text{tgh}(\sqrt{x}) + x.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).\text{sech}^2(\sqrt{x})\right] = \lim_{x\to0^+}\text{tgh}(\sqrt{x}) + \lim_{x\to0^+}\frac{x.\text{sech}^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

$*$ *O valor da primeira parcela da expressão acima é zero*!

$*$ *A indeterminação em* y' *aparece devido à segunda parcela.*

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x.\text{sech}^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}};\ se\ x\to0^+\ então\ x>0.\ Logo, \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}.$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x.\text{sech}^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}.\text{sech}^2(\sqrt{x})}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.$$

$*$ *Portanto,* ${y'}_+(0) = 0$. *No entanto,* ${y'}_-(0)\ \nexists$. *Isto implica dizer que* $y'(0)\ \nexists$. *Logo, não há reta tangente horizontal no ponto* $(0,0)$ *e, consequentemente, não há reta normal neste ponto*!

$*$ *Obs*: *Caso pensássemos em usar como referencia de coeficiente angular o valor assumido por* ${y'}_+(0)$*, estaríamos cometendo um grande equívoco, pois, essa função não é contínua em* $x = 0$*, portanto, não é derivável neste ponto.*

$b)\ f(x) = \arccos\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$; *Determinar* $f''\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$f'(x) = (1-x^2)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^2}}$$

$$f'(x) = -\frac{(1-x^2)}{\sqrt{1-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^2}} = -\frac{(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2+\frac{2x^4}{3}-\frac{x^6}{9}}} = -\frac{3(1-x^2)}{\sqrt{9-9x^2+6x^4-x^6}}.$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{(1-1/4)}{\sqrt{1-121/576}} = -\frac{24.(3/4)}{\sqrt{455}} = -\frac{18}{\sqrt{455}}.$$

$$\ln f'(x) = \ln -\frac{3(1-x^2)}{\sqrt{9-9x^2+6x^4-x^6}}$$

$$\ln f'(x) = \ln(-3+3x^2) - \ln\sqrt{9-9x^2+6x^4-x^6}$$

$$\ln f'(x) = \ln(-3+3x^2) - \frac{1}{2}\ln(9-9x^2+6x^4-x^6)$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{6x}{-3+3x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(-6x^5+24x^3-18x)}{(9-9x^2+6x^4-x^6)}$$

$$f''(x) = f'(x)\cdot\left[\frac{-2x}{(1-x^2)} - \frac{(-6x^5+24x^3-18x)}{2(9-9x^2+6x^4-x^6)}\right]$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right).\left[\frac{-2\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}\right)} - \frac{\left(-6.\frac{1}{32}+24.\frac{1}{8}-18.\frac{1}{2}\right)}{2\left(9-9.\frac{1}{4}+6.\frac{1}{16}-\frac{1}{64}\right)}\right]$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{18}{\sqrt{455}}\left[-\frac{4}{3} - \frac{\left(-\frac{3}{16}+3-9\right)}{2\left(9-\frac{9}{4}+\frac{3}{8}-\frac{1}{64}\right)}\right]$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{18}{\sqrt{455}}\left[-\frac{4}{3} - \frac{\left(-\frac{99}{16}\right)}{\left(\frac{455}{32}\right)}\right]$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{18}{\sqrt{455}}\left[-\frac{4}{3}+\frac{198}{455}\right]$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{24}{\sqrt{455}} - \frac{3564}{455\sqrt{455}}.$$

3.10 3ª Prova-01 de Novembro de 2008

1.

$a)\ Linearização\ de\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\ em\ torno\ de\ a = 7.$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$* \ f(7) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7+1}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{2}.$

$* \ f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2} = -\dfrac{1}{3(x+1)\sqrt[3]{x+1}};$

$f'(7) = -\dfrac{1}{3(7+1)\sqrt[3]{7+1}} = -\dfrac{1}{3.(8).\sqrt[3]{8}} = -\dfrac{1}{48}.$

$-Substituindo\ os\ valores\ na\ expressão\ da\ linearização:$

$$L(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{48}(x-7)$$
$$L(x) = -\frac{1}{48}x + \frac{31}{48}$$

$b)\ Calcular\ \ln(1{,}08)$.

$A\ função\ original\ para\ o\ cálculo$ é:

$$f(x) = \ln x \quad e \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$*\ Dos\ valores\ próximos\ a\ 1{,}08, temos\ como\ valor\ conhecido\ \ \ln 1 = 0.$
$Logo, queremos\ f(1+0{,}08).$
$*\ Sobre\ diferenciais\ temos:$

$$dy = f'(x).dx\ \ e\ \Delta y = f(x+dx) - f(x)$$

$*\ Sabemos\ que\ em\ diferenciais\ dy \cong \Delta y, então:$

$$f(x + dx) - f(x) \cong f'(x).dx$$

$*\ Se\ queremos\ f(1 + 0{,}08)\ temos\ que\ x = 1\ e\ \ dx = 0{,}08, logo:$

$$f(1+0{,}08) - f(1) \cong \frac{1}{1}.(0{,}08)$$
$$f(1{,}08) - 0 \cong 0{,}08$$
$$f(1{,}08) \cong 0{,}08$$

2.

$a)\ f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos(2x)\ \ . Encontrar\ os\ números\ críticos\ em - \pi \le x \le \pi.$
$*\ Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f$ é $um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde$
$ou\ f'(c) = 0\ ou\ f'(c)\ não\ existe.$

$f'(x) = 2\cos x - 2\operatorname{sen}(2x)$
$f'(x) = 2\cos x - 4\operatorname{sen} x . \cos x$
$f'(x) = 2\cos x\,(1 - 2\operatorname{sen} x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\cos x = 0 \\ 1 - 2\operatorname{sen} x = 0 \end{cases}$

$2\cos x = 0\,; x = -\dfrac{\pi}{2}$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$. *Lembre que o intervalo é* $[-\pi, \pi]$.

$1 - 2\,\text{sen}\,x = 0 \to \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}\,;\quad x = \dfrac{\pi}{6}$ e $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

$*$ *Portanto, os números críticos de* f *são*: $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{5\pi}{6}$.

b) *Pelo Método do Intervalo Fechado, para encontrarmos os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua* f *em um intervalo fechado* $[a, b]$.

1) *Encontrar os valores de* f *nos números críticos de* f *em* (a, b);
2) *Encontrar os valores de* f *nos extremos do intervalo*;
3) *O maior valor encontrado em* 1 *e* 2 *é o valor máximo absoluto, e o menor dos valores é o mínimo absoluto*.

$*$ 1) $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\,\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \cos(-\pi) = -2 - 1 = -3.$

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\,\text{sen}\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{3} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}.$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\,\text{sen}\dfrac{\pi}{2} + \cos\pi = 2 - 1 = 1.$

$f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2\,\text{sen}\dfrac{5\pi}{6} + \cos\dfrac{5\pi}{3} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}.$

$*$ 2) $f(\pi) = 2\text{sen}\,\pi + \cos 2\pi = 0 + 1 = 1.$

$f(-\pi) = 2\,\text{sen}(-\pi) + \cos(-2\pi) = 0 + 1 = 1.$

$*$ 3) *Com a análise acima temos, portanto, o valor máximo é* $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2}$ *e o valor mínimo é* $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -3.$

3.

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$; *provar que não existe* $c \in [0{,}5]$ *tal que* $f'(c) = \dfrac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$.

$f'(c) = \dfrac{\frac{8}{3} + \frac{3}{2}}{5} = \dfrac{25}{30} = \dfrac{5}{6}.$

$f'(x) = \dfrac{x - 2 - x - 3}{(x-2)^2} = -\dfrac{5}{(x-2)^2}$

$*$ *Resolvendo a seguinte igualdade*:

$-\dfrac{5}{(c-2)^2} = \dfrac{5}{6} \to\ (c-2)^2 = -6 \to (c-2) = \sqrt{-6}\,.$

$*$ *Logo, não há* $c \in \mathbb{R}$ *que satisfaça a equação acima.*
$*$ *Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?*
$-$*Seja* f *uma função que satisfaça as seguinte hipóteses*:
1) f *é contínua no intervalo fechado* $[a, b]$;
2) f *é derivável no intervalo aberto* (a, b);
Então existe algum $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

1) *A função* $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ *não é contínua em* $[0, 5]$, *pois, note que* $x = 2$ *não*

$pertence\ ao\ domínio\ de\ f. Logo, f\ \text{é}\ descontínua\ em\ x = 2.$

2) $A\ função\ f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ $não\ \text{é}\ diferenciável\ em\ (0{,}5), pois, f'(x) = -\dfrac{5}{(x-2)^2}$
$só\ existe\ para\ x \neq 2, e\ 2 \in (0{,}5).$

$*\ Logo, o\ fato\ de\ não\ existir\ um\ c \in [0{,}5]\ tal\ que\ f'(c) = \dfrac{f(5)-f(0)}{5-0}\ não$
$contradiz\ o\ Teorema\ do\ Valor\ Médio!$

$b)\ f(x) = x^3 + 9x^2 + 33x - 8\ possui\ exatamente\ uma\ raíz\ real.$
$f(0) = -8\ \ e\ f(1) = 35.\ \ Seja\ c \in \mathbb{R}\ tal\ que\ f(c) = 0.$
$*\ f\ \text{é}\ uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ [0,1]\ , e\ f(0) < 0 < f(1),$
$podemos\ garantir\ pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ que\ existe\ um\ número\ c$
$, c \in (0,1)\ tal\ que\ f(c) = 0.$
$Com\ isso, provamos\ a\ existência\ de\ uma\ raíz\ real\ no\ intervalo\ (0{,}1).$
$*\ Suponhamos\ que\ f\ tenha\ 2\ raízes\ reais, ou\ seja, f(c) = f(b) = 0, com\ b \neq c.$
$Como\ f\ \text{é}\ uma\ função\ contínua\ e\ derivável\ nos\ reais, pelo\ Teorema\ do\ Rolle,$
$existe\ um\ número\ d \in (c,b)\ tal\ que\ f'(d) = 0.$
$f'(x) = 3x^2 + 18x + 33$
$f'(x) = 0 \to 3x^2 + 18x + 33 = 0$
$x^2 + 6x + 11 = 0$
$\Delta = 36 - 44 = -8.\ \ Com\ \ \Delta < 0, temos\ que\ f'(x)\ não\ possui\ raíz\ real.$
$*\ Portanto, f(x)\ tem\ no\ exatamente\ uma\ raíz\ real.$

4.
$y = \sqrt{1+x^3};\ \dfrac{dy}{dt} = 4m/s\ quando\ y = 3$
$x^3 = y^2 - 1 \to x = \sqrt[3]{y^2-1}\ .$
$*\ y = 3 \to \sqrt{1+x^3} = 3 \to 1 + x^3 = 9 \to x^3 = 8 \therefore x = 2.$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}(2y)\frac{1}{\sqrt[3]{(y^2-1)^2}} \cdot 4$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{8y}{3\sqrt[3]{(y^2-1)^2}}$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{8.3}{3\sqrt[3]{(3^2-1)^2}}$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{8}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{8}{4} = 2m/s$$

$*\ De\ forma\ análoga, temos\ que\ y\ \text{é}\ uma\ função\ em\ x\ e\ ambos\ estão\ em\ função$
$do\ tempo, logo:$
$y(t) = \sqrt{1+x(t)^3} \to y'(t) = \dfrac{1}{2}\big(3x(t)^2.x'(t)\big).\dfrac{1}{\sqrt{1+x(t)^3}}$

$$4 = \frac{1}{2}\left(3.(2)^2.x'(t)\right).\frac{1}{\sqrt{1+2^3}}$$
$$4 = \frac{1}{2}\left(12x'(t)\right).\frac{1}{3}$$
$$24 = 12.x'(t) \rightarrow x'(t) = 2m/s$$

5.

$* \, De\ uma\ esfera\ temos\ as\ seguintes\ expressões$:

$$A = 4\pi R^2 \quad e \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$* \, No\ enunciado\ temos\ \ \frac{dA}{dt} = 4cm^2/min\ \ e\ \ \frac{dR}{dt} = 0{,}1cm/min$

$* \, Determinar\ \frac{dV}{dt}$.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dR}\cdot\frac{dR}{dt}$$
$$4 = 8\pi R.(0{,}1)$$
$$R = \frac{5}{\pi}cm$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dR}\cdot\frac{dR}{dt}$$
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2.(0{,}1)$$
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi.\frac{25}{\pi^2}.(0{,}1)$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{10}{\pi}cm^3/min$$

3.11 Reposição da 1ª Média-13 de Dezembro de 2008

1.

$a)\ y = e^{\cosh x}\ ; equação\ da\ reta\ normal\ no\ ponto\ em\ que\ y = e.$

$y = e \rightarrow e^{\cosh x} = e \rightarrow \cosh x = 1\ \therefore x = 0.\ \ Ponto\ da\ curva: (0, e).$

$y' = \operatorname{senh} x\,.\,e^{\cosh x}\ .\ *\ Obs: Lembre\ que\ o\ valor\ de\ y'\ é\ o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente\ à\ curva. Queremos\ o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal, ou\ seja,$

$$m_n = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{\operatorname{senh} x\,.\,e^{\cosh x}}$$

$*\ No\ ponto\ em\ que\ x = 0, temos\ m_n = -\frac{1}{0}\ ???$

$*\ Isso\ acontece\ quando\ temos\ uma\ reta\ tangente\ horizontal\ no\ ponto\ em\ questão.$

$*\ Logo, a\ reta\ normal\ é\ uma\ reta\ vertical. A\ reta\ normal\ é\ da\ forma\ x = x_o$

$$y - y_o = m_n(x - x_o)$$
$$y - e = -\frac{1}{0}(x - 0)$$
$$(y - e)0 = -x$$
$$x = 0.$$

$b)\ y = \frac{\sqrt{3x^2 + 2}}{4x - 3}\ ; Determinar\ as\ assíntotas\ verticais\ e\ horizontais.$

$*\ Primeiro\ definimos\ o\ domínio\ de\ y = f(x).$

$D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{4}\right\}.$

$*\ Assíntotas:$

$-Verticais: Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad ou \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*\ Verificamos\ a\ existência\ de\ assíntota\ vertical\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ função. Logo, verificando\ se\ a\ reta\ x = 3/4\ é\ um\ assíntota\ vertical:$

$$\lim_{x\to\frac{3}{4}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{4}^+} \frac{\sqrt{3x^2+2}}{4x-3} = \lim_{x\to\frac{3}{4}^+} \frac{\overbrace{\sqrt{3x^2+2}}^{\sqrt{59}/4}}{\underbrace{4x-3}_{0^+}} = +\infty$$

$*\ Obs: se\ x \rightarrow 3/4^+, então\ x > 3/4\quad e\quad x - 3/4 > 0.$

$$\lim_{x\to\frac{3}{4}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{4}^-} \frac{\sqrt{3x^2+2}}{4x-3} = \lim_{x\to\frac{3}{4}^-} \frac{\overbrace{\sqrt{3x^2+2}}^{\sqrt{59}/4}}{\underbrace{4x-3}_{0^-}} = -\infty$$

$*\ Obs: se\ x \rightarrow 3/4^-, então\ x < 3/4\quad e\quad x - 3/4 < 0.$

$*\ Logo, a\ reta\ x = \frac{3}{4}\ é\ uma\ assíntota\ vertical.$

$-Horizontais: Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a\ é\ uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer$

um dos seguintes casos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \qquad ou \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2}}{4x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{3x^2+2}}{|x|}}{\frac{4x-3}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{4x-3}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{4-\frac{3}{x}} =$$

$$\frac{\sqrt{3+0}}{4-0} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$*\, Obs: se\ x \to +\infty\ então\ |x| = x\,;\ \ |x| = \sqrt{x^2}.$

$-Logo, a\ reta\ y = \frac{\sqrt{3}}{4}$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2}}{4x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{3x^2+2}}{|x|}}{\frac{4x-3}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{4x-3}{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{-4+\frac{3}{x}} =$$

$$\frac{\sqrt{3+0}}{-4+0} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$*\, Obs: se\ x \to -\infty\ então\ |x| = -x\,;\ \ |x| = \sqrt{x^2}.$

$-Logo, a\ reta\ y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

2.

$a)\ f(x) = x.|x|\,;\quad f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \geq 0 \\ -x^2, & se\ x < 0 \end{cases}.$

$*\, Analisando\ a\ diferenciabilidade\ da\ função\ f, temos:$

$*\, Seja\ x + \Delta x > 0, então:$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

$*\, Seja\ x + \Delta x < 0, então:$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-(x+\Delta x)^2 + x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 + x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-2x\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(-2x-\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(-2x-\Delta x) = -2x.$$

$-Com\ isso, temos\ a\ seguinte\ expressão\ para\ f'(x):$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & se\ x \geq 0 \\ -2x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

$*\, Como\ ambas\ as\ sentenças\ de\ f'(x)\ são\ polinomiais\ e, portanto, contínuas\ em\ seus\ domínios, temos\ então\ que\ f$ é $diferenciável\ em\ (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$

$*\, Falta\ verificar\ se\ f$ é $diferenciável\ em\ x = 0. Logo,$

$$f'_{+}(0) = 2.0 = 0 \qquad e \qquad f'_{-}(0) = -2.(0) = 0$$

$*\, Como\ f'_{+}(0) = f'_{-}(0)\ concluímos\ que\ f$ é $derivável\ em\ x = 0\ e, com\ isso, f$ é $diferenciável\ em\ \mathbb{R}.$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+25x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+25x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+25x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+25x}+x\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+25x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+25x}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{25x}{\sqrt{x^2+25x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{25x}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+25x}+x}{|x|}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{25x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+25x}}{\sqrt{x^2}}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{25}{\sqrt{1+\frac{25}{x}}+1}=\frac{25}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{25}{1+1}=\frac{25}{2}.$$

$*\ Obs: se\ x\to+\infty\ então\ |x|=x\ ;\ \ |x|=\sqrt{x^2}.$

3.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}ax+b, & se\ x<2\\ 2x^2-1, & se\ x\geq 2\end{cases}.$$

$*\ Dizemos\ que\ uma\ função\ f\ é\ contínua\ num\ ponto\ x=a\ se, e\ somente\ se,$ $temos:$

$$1)\ f(a)\ existe;$$
$$2)\ \lim_{x\to a}f(x)\ \ existe;$$
$$3)\ \lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

$*\ Usando\ essa\ informação\ em\ x=2, temos:$

$1)\ f(2)=2.(2)^2-1=8-1=7.$

$2)\ \lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(ax+b)=2a+b.$

$Obs: Não\ há\ necessidade\ em\ se\ calcular\ o\ limite\ lateral\ à\ direita\ de\ x=2, pois$ $\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2).$

$3)\ \lim_{x\to2^-}f(x)=f(2)\to 2a+b=7\ \ (I)$

$*\ Essa\ é\ a\ relação\ entre\ a\ e\ b\ para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ x=2.$

$b)\ Para\ que\ f\ seja\ derivável\ em\ x=2:$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2-1-7}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2(x^2-4)}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)}=\lim_{x\to2^+}2(x+2)=2(2+2)=8.$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{ax+b-7}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{ax+7-2a-7}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{a(x-2)}{(x-2)}=\lim_{x\to2^-}a=a.$$

$*\ Para\ que\ f\ seja\ derivável\ em\ x=2\ devemos\ ter\ f'_+(2)=f'_-(2). Logo,$

$a=8. Substituindo\ na\ equação\ (I)\ temos:$

$2.a+b=7\to 16+b=7\to b=-9.$

$*\ Solução:\ \ a=8\ e\ b=-9.$

4.

$a)\ x^3+y^3=6xy\ ; equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (3{,}3).$

$*\ Por\ derivação\ implícita, temos:$

$3x^2+3y^2y'=6y+6xy'$

$x^2 + y^2y' = 2y + 2xy'$
$y'.(y^2 - 2x) = 2y - x^2$
$y' = \dfrac{2y - x^2}{y^2 - 2x}; no\ ponto\ (3,3)\ temos\ y' = \dfrac{2.3 - 3^2}{3^2 - 2.3} = \dfrac{6-9}{9-6} = \dfrac{-3}{3} = -1.$
$*\ Equação\ da\ reta\ tangente:$

$$y - y_o = m(x - x_o)$$
$$y - 3 = -1(x - 3)$$
$$y - 3 = -x + 3$$
$$y = -x + 6$$

$b) Onde\ a\ reta\ tangente\ é\ horizontal?\ (onde\ y' = 0?)$
$y' = 0 \Leftrightarrow 2y - x^2 = 0\ \ e\ y^2 - 2x \neq 0$
$x^2 = 2y \rightarrow y = \dfrac{x^2}{2}.$
$Substituindo\ na\ expressão\ da\ curva, temos:$
$x^3 + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^3 = 6x\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$
$x^3 + \dfrac{x^6}{8} = 3x^3 \rightarrow 2x^3 = \dfrac{x^6}{8} \rightarrow x^6 - 16x^3 = 0 \rightarrow x^3(x^3 - 16) = 0$
$Logo,$
$\begin{cases} x^3 = 0 \\ x^3 - 16 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0\ ou\ x = \sqrt[3]{16}.$

$*\ Para\ x = 0\ temos:$
$0^3 + y^3 = 6.0.y \rightarrow y^3 = 0 \rightarrow y = 0. \quad Ponto\ (0,0).$
$-Obs: o\ ponto\ (0,0)\ não\ satisfaz\ a\ condição\ y^2 \neq 2x. Logo, não\ reta\ tangente$
$horizontal\ em\ neste\ ponto.$

$*\ Para\ x = \sqrt[3]{16}\ temos:$
$\left(\sqrt[3]{16}\right)^3 + y^3 = 6.\sqrt[3]{16}.y \rightarrow y^3 - 6\sqrt[3]{16}y + 16 = 0$
$-Na\ condição\ acima\ temos\ que\ y^2 \neq 2x. Vamo\ supor\ que\ y^2 = 2x.$
$Logo, y = \sqrt{2\sqrt[3]{16}}\ . Substituindo\ na\ equação\ acima, temos:$
$\left(\pm\sqrt{2\sqrt[3]{16}}\right)^3 - 6\sqrt[3]{16}\left(\pm\sqrt{2\sqrt[3]{16}}\right) + 16 = 0$
$2\sqrt[3]{16}\left(\pm\sqrt{2\sqrt[3]{16}}\right) - 6\sqrt[3]{16}\left(\pm\sqrt{2\sqrt[3]{16}}\right) + 16 = 0$
$\sqrt{2\sqrt[3]{16}}\left(2\sqrt[3]{16} - 6\sqrt[3]{16}\right) + 16 = 0$
$-4\sqrt[3]{16}\sqrt{2\sqrt[3]{16}} + 16 \neq 0.$
$Logo, temos\ que\ y^2 \neq 2x. Assim, temos\ reta\ tangente\ horizontal\ em\ um\ ponto\ da$
$curva\ onde\ x = \sqrt[3]{16}.$
$Comona\ expressão\ da\ derivada\ tinhamos\ a\ condição\ y = \dfrac{x^2}{2} \rightarrow y = \dfrac{\sqrt[3]{16^2}}{2}.$

$* \; Portanto, temos\ reta\ tangente\ horizontal\ no\ ponto\ \left(\sqrt[3]{16}, \frac{\sqrt[3]{16^2}}{2}\right).$

5.

$a)\ y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)\ ; calcular\ y'.$

$*\ Sejam\ u = \operatorname{sen} x\,, v = \sqrt{u}\ e\ z = \operatorname{tg} v\,, então\ y = \operatorname{sen} z$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{dz}{dv} \cdot \frac{dy}{dz}$$

$$y' = (\cos x).\frac{1}{2\sqrt{u}}.(\sec^2 v).(\cos z)$$

$$y' = \frac{\cos x\,.\sec^2\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right).\cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

$b)$

$$f(x) = 2^{3^{x^2}}$$

$*\ Determinar\ f'(1).$

$Sejam\ u = x^2, v = 3^u\ . então\ f(v) = 2^v.$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{dy}{dv}$$

$$f'(x) = (2x) \cdot 3^u \cdot \ln(3) \cdot 2^v \cdot \ln(2)$$

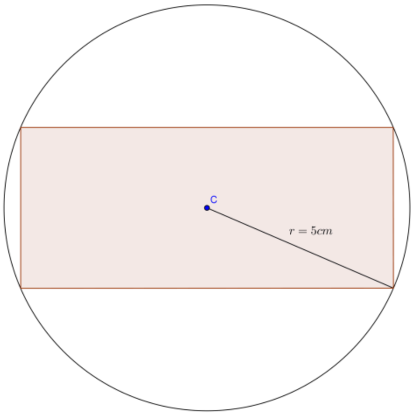
$$f'(x) = (2x) \cdot 3^{x^2} \cdot \ln(3) \cdot 2^{3^{x^2}} \cdot \ln(2)$$

$$f'(1) = 2 \cdot 3^1 \cdot \ln(3) \cdot 2^{3^1} \cdot \ln(2)$$

$$f'(1) = 48 \cdot \ln(3) \cdot \ln(2)$$

3.12 Reavaliação da 2ª média-13 de Dezembro de 2008

1.



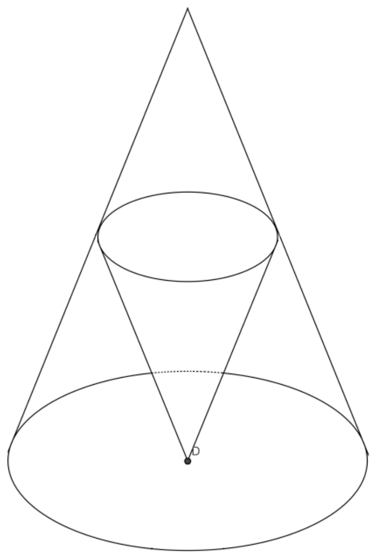
$* \, Observando \ a \ ilustração \ acima, conseguimos \ extrair \ as \ seguintes \ expressões:$
$(2r)^2 = l^2 + b^2, onde \ l \ é \ a \ largura \ e \ b \ é \ comprimento \ do \ retângulo$
$A = b.l \, ;$
$* \, Na \ questão \ temos \ que \ \dfrac{db}{dt} = -2cm/s$
$-Com \ essas \ informações, temos:$

$$l^2 + b^2 = 100$$
$$l(t)^2 + b(t)^2 = 100$$
$$2l(t).l'(t) + 2b(t).b'(t) = 0$$
$$l'(t) = -\frac{b(t).b'(t)}{l(t)}$$
$$Obs: b'(t) = -2cm/s$$
$$A(t) = b(t).l(t)$$
$$A'(t) = b'(t).l(t) + b(t).l'(t)$$
$$A'(t) = -2l(t) + 2\frac{b(t)^2}{l(t)}$$
$$A'(t) = -2\sqrt{100 - b(t)^2} + 2\frac{b(t)^2}{\sqrt{100 - b(t)^2}}$$

$* \, Quando \ b(t) = 6cm \ temos:$

$$\frac{dA}{dt} = A'(t) = -2\sqrt{100-36} + 2\frac{36}{\sqrt{100-36}} = -2\sqrt{64} + \frac{72}{\sqrt{64}} = -16 + 9 = -7cm^2/s$$

2.



$Sejam, r\ e\ h\ o\ raio\ e\ a\ altura\ do\ cone\ invertido, e\ R\ e\ H\ o\ raio\ e\ a\ altura\ do\ cone\ reto. Por\ relação\ de\ triângulos\ retângulos, temos:$

$$\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r} \rightarrow Hr = HR - hR \rightarrow h = \frac{H(R-r)}{R}$$

$$V_{cone\ menor} = \frac{1}{3}\pi r^2 . h = \frac{1}{3}\pi r^2 . \frac{H(R-r)}{R} \rightarrow V = \frac{\pi H(Rr^2 - r^3)}{3R}$$

$* \ Obs: R\ e\ H\ são\ constantes!$

$V'(r) = \frac{\pi H}{3R}(2Rr - 3r^2)\ ; fazendo\ V'(r) = 0\ temos:$

$2Rr - 3r^2 = 0$

$r(2R - 3r) = 0 \therefore r = \frac{2}{3}R.$

$Para\ r = \frac{2}{3}R\ , vamos\ calcular\ h:$

$$h = \frac{H(R-r)}{R} = h = \frac{H\left(R - \frac{2}{3}R\right)}{R} = \frac{\frac{HR}{3}}{R} = \frac{H}{3}.$$

$Portanto, teremos\ o\ cone\ invertido\ de\ maior\ volume\ para\ r = \frac{2}{3}R\ e\ h = \frac{1}{3}H.$

$$V_{máximo} = \frac{1}{3}\pi . r^2 . h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4R^2}{9}\right).\left(\frac{H}{3}\right) = \frac{4\pi R^2 H}{81}\ u.V$$

3.

$a)\ \int_a^b (x+5)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 5x\right|_a^b\Big] = \frac{1}{2}b^2 + 5b - \frac{1}{2}a^2 - 5a = \frac{b^2 - a^2}{2} + 5(b-a).$

$b)\ f(x) = x^3 - x^2 + x - 1\ tem\ uma$ única $raíz\ real.$

$Calculemos\ f(0)\ e\ f(2):$

$f(0) = 0^3 - 0^2 + 0 - 1 = -1.$

$f(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 1 = 5.$

$*\ Assim, f(0) < 0 < f(2), isto$ é, $f(c) = 0$ é $um\ número\ entre\ f(0)\ e\ f(2). Como\ f$

é contínua no intervalo $[0,2]$, o Teorema do Valor Intermediário estabelece que existe um número c entre 0 e 2 tal que $f(c) = 0$. Em outras palavras, a função $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ tem pelo menos uma raíz real c no intervalo $(0,2)$.
$*$ Suponhamos que f tenha 2 raízes reais c e b. Como f é contínua e diferenciável em (c,b), uma vez que é um polinômio, pelo Teorema de Rolle existe um número $d \in (c,b)$ tal que $f'(d) = 0$.
$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$; $\Delta = 4 - 12 = -8$. Logo, $f'(x)$ não possui raíz real.
Portanto, não existe um número d tal que $f'(d) = 0$ e, consequentemente, $f(x)$ tem uma única raíz real.

$*$ Obs: A raíz em questão é uma das raízes notáveis de um polinômio do 3º grau. $x = 1$ é raíz de $f(x)$. Ou seja, $f(x) = (x-1)(x^2+1)$. Note que o segundo fator é irredutível, portanto, não possui raíz real. Somente para $x = 1$, $f(x) = 0$.

4.
$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \text{ ; Esboçar o gráfico!}$$
1) Domínio de f: $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.
2) Interseções com os eixos: Ponto $(0,0)$.
3) Crescimento e Decrescimento:
$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3.2.(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3};$$
$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$
$*$ Fazendo o estudo do comportamento (sinal) de $f'(x)$, temos:

+ + + +	0	+ + + + + + +		+ + + + + + + + + + +		x^2
− − − − − − − − − − − − − −					3 + + + + + + + +	$(x-3)$
− − − − − − − −			1	+ + + + + + + + + + + + + + +		$(x-1)^3$
+ + + +	0	+ +	1	− − − − −	3 + + + + + + + +	$f'(x) = x^2(x-3)/(x-1)^3$

$*$ Da análise acima, concluímos:
f é crescente no intervalo $(-\infty,1) \cup (3,+\infty)$
f é decrescente no intervalo $(1,3)$

4) Pontos Críticos:
Onde $f'(x) = 0$ ou quando $f'(x)$ não existe.
$f'(x) = 0$ para $x = 0$ e $x = 3$.
$$f(0) = 0; \quad f(3) = \frac{3^3}{(3-1)^2} = \frac{27}{4}. \text{ Pontos Críticos : } (0,0) \text{ e } \left(3, \frac{27}{4}\right).$$
$f'(x)$ não existe em $x = 1$. No entanto, $x = 1$ não pertence ao domínio de f e, portanto, não é um número crítico.

5) Concavidade:
$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2).3.(x-1)^2}{(x-1)^6}$$
$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

Fazendo o estudo do comportamento $(sinal)$ *de* $f''(x)$ *temos*:

$- - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + +$	$6x$
$+ + + + + + + + + + + + + + + + + 1 + + + + + + +$	$(x-1)^4$
$- - - - - - - - - - - 0 + + + + + 1 + + + + + + +$	$f''(x) = 6x/(x-1)^4$

$*$ *Da análise acima, concluímos*:
f *possui concavidade voltada para cima em* $(0,1) \cup (1,+\infty)$ *e*
f *possui concavidade voltada para baixo em* $(-\infty, 0)$

6) *Pontos de Inflexão*:
$f''(x) = 0$ *ocorre apenas em* $x = 0$.
$f(0) = 0$. *Ponto de inflexão* $(0,0)$.

7) *Assíntotas*:
$*$ *Verticais*: *Dizemos que a reta* $x = a$ é *uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos*:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*$ *Sabemos que* f é *descontínua em* $x = 1$. *Verificando se a reta* $x = 1$ é *uma assíntota vertical*:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x^3}^{\overset{1}{\uparrow}}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = +\infty$$

$*$ *Obs*: *se* $x \to 1^+$, $x > 1$ *então* $x - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)^2 > 0$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x^3}^{\overset{1}{\uparrow}}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = +\infty$$

$*$ *Obs*: *se* $x \to 1^-$, $x < 1$ *então* $x - 1 < 0 \Rightarrow (x-1)^2 > 0$.
$-$*Logo, a reta* $x = 1$ é *uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$*$ *Horizontais*: *Dizemos que a reta* $y = a$ é *uma assíntota horizontal se ocorrer um dos seguintes casos*:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{2x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{2} = \lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty.$$

Logo, f *não possui assíntota horizontal*.

$*$ *Oblíqua*: *Dizemos que a reta* $y = ax + b$ é *uma assíntota oblíqua se, somente se*

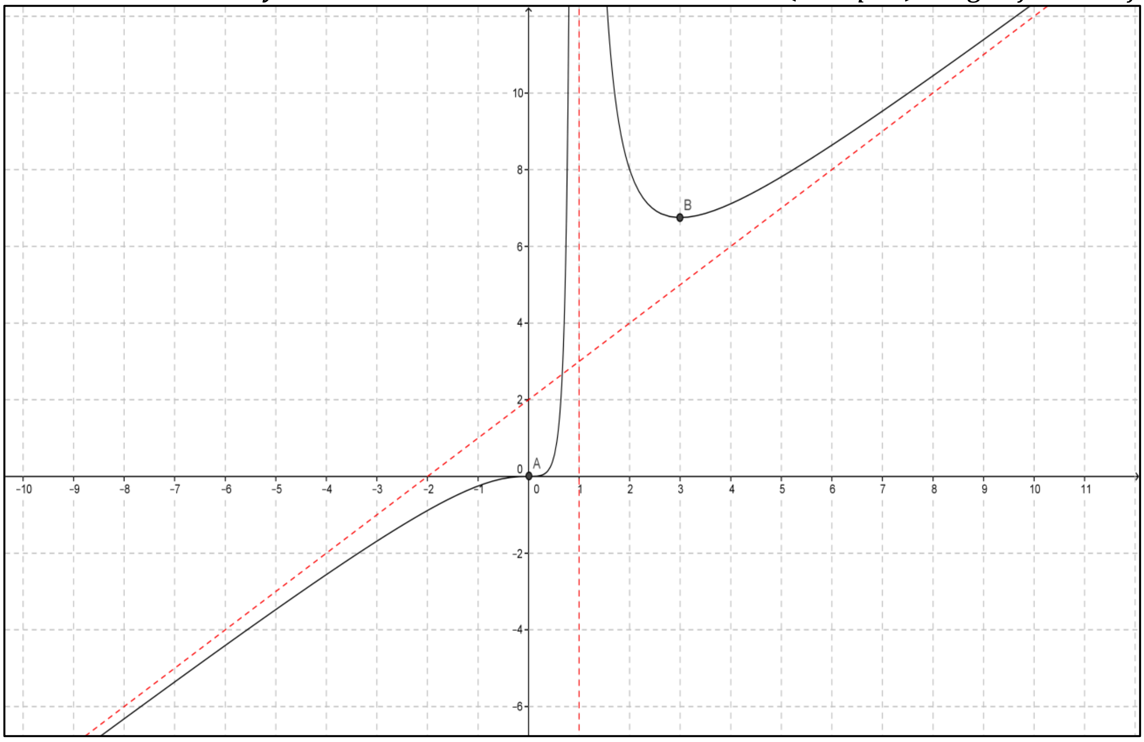
$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-2x+1}=(x+2)+\frac{3x-2}{x^2-2x+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3x-2}{x^2}}{\frac{x^2-2x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}1-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{0-0}{1-0+0}=\frac{0}{1}=0.$$

$*$ *Portanto, a reta* $y=x+2$ é *uma assíntota inclinada (oblíqua) ao gráfico de* $f(x)$



5.

$$a)\ \lim_{x\to 0}(2x+1)^{1/\mathrm{sen}(x+x^2)}=\lim_{x\to 0}e^{\ln(2x+1)^{1/\mathrm{sen}(x+x^2)}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(2x+1)}{\mathrm{sen}(x+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{\mathrm{sen}(x+x^2)}};$$

$*$ *Calculando o limite do expoente temos*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{\mathrm{sen}(x+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{2x+1}}{(2x+1)\cos(x+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(2x+1)^2\cos(x+x^2)}=$$

$$\frac{2}{(0+1)^2.\cos(0+0^2)}=\frac{2}{\cos 0}=\frac{2}{1}=2.$$

$$*\ \lim_{x\to 0}(2x+1)^{1/\mathrm{sen}(x+x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{\mathrm{sen}(x+x^2)}}=e^2.$$

$b)\ f''(x)=-\pi+x^{2/3}+2\cos x-e^x\ ;\quad f'(0)=1\ \ e\ \ f(0)=e.$

$*$ *A antiderivada mais geral para* $f''(x)$ é:

$$f'(x)=-\pi x+\frac{3}{5}x^{5/3}+2\,\mathrm{sen}\,x-e^x+C$$

$f'(0)=-1+C\,;\quad f'(0)=1\ \therefore\ -1+C=1\to C=2.$

$f'(x) = -\pi x + \frac{3}{5}x^{5/3} + 2\,\mathrm{sen}\,x - e^x + 2$

$* \, A \; antiderivada \; mais \; geral \; para \; f'(x\,)$ é:

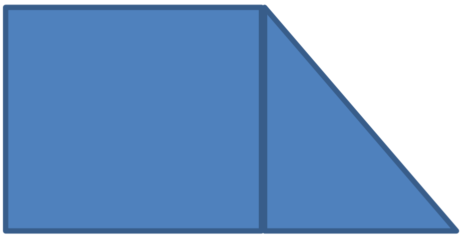
$f(x) = -\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{9}{40}x^{8/3} - 2\cos x - e^x + 2x + D$

$f(0) = -2 - 1 + D = -3 + D\,; \quad f(0) = e \;\therefore\; -3 + D = e \to D = e + 3.$

$Portanto, f(x) = -\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{9}{40}x^{8/3} - 2\cos x - e^x + 2x + (e + 3).$

3.13 Prova Final-18 de Dezembro de 2008

1.



$$A = \frac{(B+2)h}{2} \leftrightarrow A(t) = \frac{(B(t)+2)h(t)}{2}$$

$$A(t) = \frac{1}{2}\big(B(t).h(t) + 2h(t)\big)$$
$$A'(t) = \frac{1}{2}\big(B'(t).h(t) + B(t).h'(t) + 2h'(t)\big)$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dB}{dt}.h(t) + B(t).\frac{dh}{dt} + 2\frac{dh}{dt}\right)$$
$$6 = \frac{1}{2}\left(\frac{dB}{dt}.h(t) + B(t).1 + 2.1\right)$$
$$12 = \frac{dB}{dt}.h(t) + B(t) + 2$$
$$\frac{dB}{dt} = \frac{10 - B(t)}{h(t)}.$$

$B(t)$ e $h(t)$ *são a base maior e a altura, respectivamente, no momento em que se deseja calcular a variação da base maior em relação ao tempo* $B'(t)$.
Quando a altura é $10cm$ *e a área é* $50cm^2$, *temos*:

$$50 = \frac{(B+2).10}{2} \Rightarrow B + 2 = 10 \rightarrow B = 8cm \;\therefore$$
$$\frac{dB}{dt} = \frac{10-8}{10} = \frac{2}{10} = 0{,}2cm/min.$$

2.

$a)$ $$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ \ln(1-x^2), & -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x^2}, & x \leq -1 \end{cases}$$

$*\, f$ *é uma função sentencial, portanto,* f *é contínua no domínio de cada sentença.*
$-$*Analisando a continuidade de cada sentença, temos*:
$*$ *A primeira sentença é uma função logarítmica, onde devemos ter o logaritmando* $(x+1) > 0$ *e a base maior que zero e diferente de* 1. *Como estamos tratando do logarítmo na base neperiana, a base já satisfaz as condições acima. Logo, a função* $\ln(x+1)$ *existe para* $x > -1$. *Como esta sentença é válida para* $x \geq 0$, *então* f *é contínua em* $(0, +\infty)$.

$*$ *A segunda sentença também é uma função logarítmica, porém, temos no logaritmando um polinômio do segundo grau. Logo, devemos analisar a*

$existência\ da\ função\ \ln(1-x^2)\,, assumindo\ que\ (1-x^2) > 0. Assim,$

$- - - - - - - - - (-1) + + + + + + + + (1) - - - - - - - - - \quad (1-x^2)$

$*\ Com\ essa\ análise, temos\ que\ a\ função\ \ln(1-x^2)\ existe\ para -1 < x < 1.$
$Como\ em\ f(x)\ esta\ sentença\ predomina\ no\ intervalo -1 < x < 0, condiz\ com$
$o\ resultado, logo\ f\ é\ contínua\ em\ (-1{,}0).$

$*\ A\ terceira\ sentença\ é\ uma\ função\ polinomial\ racional, onde\ seu\ domínio, neste$
$caso, depende\ do\ denominador\ que\ deve\ ser\ diferente\ de\ zero, já\ que\ o\ membro$
$do\ numerador\ é\ uma\ função\ constante. Analisando\ a\ terceira\ sentença, temos:$

$$\frac{1}{1+x^2}\ ; 1+x^2 \neq 0$$

$-Façamos\ 1+x^2 = 0\ , então\ x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1}\ ; Logo, não\ temos\ solução$
$nos\ reais\ para\ esta\ expressão. Portanto, 1+x^2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$
$Assim, a\ terceira\ sentença\ é\ válida\ para\ qualquer\ x\ pertencente\ aos\ reias. Em$
$f(x)\ esta\ sentença\ vale\ para\ x \leq -1. Portanto, f\ é\ contínua\ em\ (-\infty,-1).$

$*\ Com\ essas\ análises, temos\ que\ f\ é\ contínua\ em\ \ (-\infty,-1) \cup (-1{,}0) \cup (0,+\infty).$
$Falta\ verificar\ se\ f\ é\ contínua\ nos\ pontos\ onde\ há\ \ mudança\ de\ comportamento$
$da\ função, ou\ seja, em\ x = -1\ e\ x = 0.$

$*\ Dizemos\ que\ uma\ função\ f\ é\ contínua\ num\ ponto\ x = a\ se, somente\ se,$

$$1)\ f(a)\ existe;$$
$$2)\ \lim_{x\to a} f(x)\ \ existe;$$
$$3)\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$*\ para\ x = -1:$

$1)\ f(-1) = \dfrac{1}{1+(-1)^2} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}.$

$2)\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)\ ;$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \ln(1-x^2)\ \ ; se\ x \rightarrow -1^+\ então\ x > -1. Logo, (1-x^2) > 0.$

$*\ Como\ o\ logaritmando\ (1-x^2) \rightarrow 0\ , temos\ \ \lim\limits_{x\to -1^+} \ln(1-x^2) = -\infty;$

$*\ Assim, \lim\limits_{x\to -1} f(x) \nexists, pois\ não\ há\ limite\ lateral\ à\ direita\ de -1.$

$-Logo, f\ não\ é\ contínua\ em\ x = -1.$

$*\ para\ x = 0:$

$1) f(0) = \ln(0+1) = \ \ln(1) = 0.$

$2) \lim\limits_{x\to 0} f(x)\,;$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \ln(1-x^2) = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x^2)\right] = \ln(1) = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)\right] = \ln(1) = 0.$

$*\ Logo, \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$

$3)\ \ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0.$

$-Logo, f\ é\ contínua\ em\ x = 0.$

$* \, Com \; essas \; análises \; temos \; que \; f \; é \; contínua \; em \; (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$

$b) \; f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x - x \, ; provar \; que \; f \; tem \; uma \; única \; raíz \; real \; em \; \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

$* \, Calculemos \; f\left(\frac{\pi}{6}\right) \; e \; f\left(\frac{\pi}{3}\right)$:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{6 - 18 - \pi\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = -\frac{(12 + \pi\sqrt{3})}{6\sqrt{3}} \; ;$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} = \frac{9 - 3 - \pi\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{6 - \pi\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \; ;$$

$* \, f$ *é uma soma de funções, onde* $\operatorname{tg} x$ *e* $\operatorname{cotg} x$ *são funções trigonométricas contínuas no intervalo* $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$*, e a função identidade* $y = x$ *também é contínua nesse intervalo. Logo,* f *é contínua no intervalo* $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$*. Assim,* $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 < f\left(\frac{\pi}{3}\right)$*, então, pelo Teorema do Valor Intermediário existe algum* $c \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$*, tal que* $f(c) = 0$*. Em outras palavras,* f *possui uma raíz no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$*$ *Sendo* f *contínua e diferenciável no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$*, e suponhamos que* f *possui 2 raízes* c *e* d *neste intervalo, pelo Teorema de Rolle, existe algum número* $a \in (c, d)$ *tal que* $f'(a) = 0$.

$f'(x) = \sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x - 1$

$f'(x) = 0 \rightarrow \sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x - 1 = 0 \rightarrow \; \sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x = 1$

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = 1 \rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \, . \cos^2 x} = 1 \rightarrow \; \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \, . \cos^2 x} = 1 \; ;$$

$\operatorname{sen}^2 x \, . \cos^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x \, . (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 1 \rightarrow -sen^4 x + \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

$sen^4 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

$* \, Seja \; y = \operatorname{sen}^2 x \; então$:

$y^2 - y + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3$*. Logo, não há solução real para a equação!*
Logo, não existe $(a) \in (c, d)$ *tal que* $f'(a) = 0$*. Portanto,* f *tem uma única raíz real no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

3.

$a) \; f(x) = \sqrt{\sec\sqrt{x}} \; ; Calcular \; f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right).$

$* \, Seja \; u = \sqrt{x} \, , v = \sec u \; . Então \; f(v) = \sqrt{v} \, .$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{dy}{dv}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \sec\sqrt{x} \cdot \operatorname{tg}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sec\sqrt{x}}}$$

$$f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{16}}} \sec \sqrt{\frac{\pi^2}{16}} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\pi^2}{16}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sec \sqrt{\frac{\pi^2}{16}}}}$$

$$f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sec \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sec \frac{\pi}{4}}}$$

$$f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

$$f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\sqrt{2}}} = \frac{2^{1/2}}{\pi.\, 2^{1/4}} = \frac{2^{1/4}}{\pi}.$$

$b)\ f(x) = 2^{\operatorname{arctg}(\operatorname{senh} x)}$;   *Determinar* $f'(0)$.
$*$ *Sejam* $u = \operatorname{senh} x$ *e* $v = \operatorname{arctg} u$, *então* $f(v) = 2^v$.
Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{dy}{dv}$$

$$f'(x) = \cosh x \cdot \frac{1}{1 + u^2} \cdot 2^v \cdot \ln(2)$$

$$f'(x) = \cosh x \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{senh}^2 x} \cdot 2^{\operatorname{arctg}(\operatorname{senh} x)} \cdot \ln(2)$$

$$f'(0) = \cosh(0) \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{senh}^2(0)} \cdot 2^{\operatorname{arctg}(\operatorname{senh}(0))} \cdot \ln(2)$$

$$f'(0) = 1 \cdot \frac{1}{1 + 0} \cdot 2^{\operatorname{arctg}(0)} \cdot \ln(2)$$

$$f'(0) = 2^0 \cdot \ln(2)$$

$$f'(0) = \ln(2)$$

4. $f(x) = \left(\frac{x}{\cos x}\right)^x$;

$a)\ f'(x)$;

$\ln f(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x}{\cos x}\right)$

$\ln f(x) = x \cdot [\ln x - \ln(\cos x)]$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x - \ln(\cos x) + x\left[\frac{1}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right]$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(\frac{x}{\cos x}\right) + 1 + x.\operatorname{tg} x$

$f'(x) = \left(\frac{x}{\cos x}\right)^x \cdot \left[\ln\left(\frac{x}{\cos x}\right) + 1 + x.\operatorname{tg} x\right]$

$b)\ \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\cos x}\right)^x = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{x}{\cos x}\right)^x} = \lim_{x\to 0} e^{x.\ln\left(\frac{x}{\cos x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0} x.\ln\left(\frac{x}{\cos x}\right)}.$

$*$ *Calculando o limite do expoente, temos*:

$\lim_{x\to 0} x.\ln\left(\frac{x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0} x.[\ln x - \ln(\cos x)] = \lim_{x\to 0} \frac{[\ln x - \ln(\cos x)]}{\frac{1}{x}} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}+\operatorname{tg}x}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x-x.\operatorname{tg}x)=0.$$

$Logo,\qquad \lim_{x\to 0} f(x)=e^{\lim_{x\to 0} x.\ln\left(\frac{x}{\cos x}\right)}=e^0=1.$

5.

$a)\ x^2(x^2-9)=y^2(y^2-1)\,;Reta\ tangente\ no\ ponto\ (-3,1).$

$Por\ derivação\ implícita, temos:$

$2x(x^2-9)+x^2(2x)=2yy'(y^2-1)+y^2(2yy')$

$4x^3-18x=y'(4y^3-2y)$

$y'=\dfrac{4x^3-18x}{4y^3-2y}\ ;\ \ no\ ponto\ (-3,1){:}\, y'=\dfrac{4.(-27)-18(-3)}{4-2}=\dfrac{-54}{2}=-27$

$*\ Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (-3,1)\ e\ coeficiente\ angular\ m=-27:$

$$y-y_o=m(x-x_o)$$
$$y-1=-27(x+3)$$
$$y=-27x-81+1$$
$$y=-27x-80$$

$b)\ y=(\ln x)^3\,;\quad existe\ x\in\mathbb{R}\ tal\ que\ y''=0?$

$y'=3\cdot(\ln x)^2\cdot\dfrac{1}{x}$

$y''=3\cdot\left[2\cdot\ln x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}+(\ln x)^2\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]$

$y''=3\cdot\left[\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}\right]\to y''=\dfrac{3\ln x\,(2-\ln x)}{x^2}$

$y''=0\Leftrightarrow 3\ln x\,(2-\ln x)=0\ ,com\ x^2\neq 0\to x\neq 0.$

$\begin{cases}3\ln x=0\\2-\ln x=0\end{cases}\to \ln x=0\ \therefore\ x=1.\ \ 2-\ln x=0\to\ln x=2\ \therefore\ x=e^2.$

$*\ Logo, os\ pontos\ onde\ y''=0\ são:$

$-\ para\ x=1, temos:$

$y=(\ln 1)^3=0^3=0.\quad ponto\ (1,0),$

$-para\ x=e^2, temos:$

$y=(\ln e^2)^3=2^3=8.\ \ ponto\ (e^2,8).$

6. $f(x)=3x-x^2+|2x-4|\,;encontrar\ os\ pontos\ onde\ f\ não\ é\ derivável.$

$*\ |2x-4|=\begin{cases}2x-4, & se\ x\geq 2\\-(2x-4), & se\ x<2\end{cases};$

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+5x-4, & se\ x\geq 2\\-x^2+x-4, & se\ x<2\end{cases}.$$

$*\ f$ é $uma\ função\ sentencial, composta\ por\ funções\ polinomiais\ e, portanto,$ $contínuas\ e\ diferenciáveis\ em\ seus\ domínios. Logo, f$ é $contínua\ e\ diferenciável$ $em\ (-\infty,2)\cup(2,+\infty). Basta\ verificarmos\ se\ f$ é $contínua\ e\ diferenciável\ em$ $x=2, onde\ há\ mudança\ de\ comportamento\ da\ função.$

1) $Verificar\ se\ f$ é $contínua\ em\ x=2.$

$*\ f(2)=-(2)^2+5.(2)-4=-4+10-4=2.$

$*\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(-x^2+5x-4)=-4+10-4=2\,;$

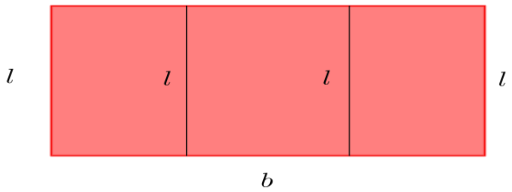
$* \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-x^2 + x - 4) = -4 + 2 - 4 = -6;$

$-Logo, como \ \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ $, então \ \lim_{x\to 2} f(x) \nexists.$

$* \ Portanto, f$ não é contínua em $x = 2.$

$* \ Consequentemente \ f$ não é diferenciável ou derivável em $x = 2.$

7.



$Área = b.l \quad ; \quad b.l = 1800m^2 \to b = \dfrac{1800}{l};$

$Comprimento \ total = 2b + 4l$

$C = 2b + 4l$

$C = \dfrac{3600}{l} + 4l$

$C'(l) = -\dfrac{3600}{l^2} + 4 \to C'(l) = \dfrac{4l^2 - 3600}{l^2} \to C'(l) = \dfrac{4(l^2 - 900)}{l^2}$

$+ + + + + + + + (-30) - - - - - - - - - (30) + + + + + + +$ $\qquad (l^2 - 900)$

$+ + + + + + + + + + + + + + + + 0 + + + + + + + + + + + + + +$ $\qquad l^2$

$+ + + + + + + + (-30) - - - - 0 - - - - (30) + + + + + + +$ $\qquad C'(l)$

$*$ Notamos que não podemos ter $l < 0$ por tratar-se de comprimento.
Logo, $l = 30m$ é nossa resposta! Em $l = 30, C'(l)$ passa de $(-)/(+)$. o que indica um ponto de mínimo absoluto.

$$C(30) = \frac{3600}{30} + 4.(30) = 120 + 120 = 240m$$

$*$ Por questão de comprovação, tomemos $l = 10, l = 20$ e $l = 40$:

$C(10) = \dfrac{3600}{10} + 4(10) = 360 + 40 = 400m$

$C(20) = \dfrac{3600}{20} + 4(20) = 180 + 80 = 260m$

$C(40) = \dfrac{3600}{40} + 4(40) = 90 + 160 = 250m$

$-$Portanto, para $l = 30m$ temos o menor comprimento total do terreno.

8.

a) Provar que $2 \leq \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^2}dx \leq 2\sqrt{2}$;

$*$ Vamos analisar a função $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$;

$* \ 1 + x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ Logo, $D(f) = \mathbb{R}.$

1ª obs: f é uma função par! Ou seja, $f(x) = f(-x);$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad ; \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

2ª obs: f é contínua e diferenciável nos reais ;

$-Com\ essas\ informações, e\ tendo\ em\ vista\ que\ f(1) = f(-1), pelo\ Teorema\ de\ Rolle, existe\ algum\ c \in (-1,1)\ tal\ que\ f'(c) = 0.$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0\ \therefore x = 0.$

$.\,Para\ x = 0, temos\ f(0) = 1.$

$-Pelo\ Método\ do\ Intervalo\ Fechado, temos:$

$1)\ Os\ valores\ de\ f\ nos\ números\ críticos\ de\ f\ em\ (-1,1):$

$f(0) = 1$

$2)\ Os\ valores\ de\ f\ nos\ extremos\ do\ intervalo:$

$f(-1) = f(1) = \sqrt{2}$

$Com\ isso, concluímos\ que\ \forall x \in [-1,1]\ temos:$

$$1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$$

$Aplicando\ a\ propriedade\ comparativa\ de\ integral\ na\ expressão\ acima, temos:$

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\,dx$$

$$1\big(1-(-1)\big) \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \sqrt{2}\big(1-(-1)\big)$$

$$1 \cdot (2) \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \sqrt{2} \cdot (2)$$

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 2\sqrt{2}$$

$b)\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{x} - 2\operatorname{sen} x \quad e\ \ f(1) = 0.\ \ Determinar\ f(x).$

$*\ A\ antiderivada\ mais\ geral\ para\ f'(x)$ é:

$f(x) = \operatorname{arcsen} x + \ln x + 2\cos x + C\ , onde\ C$ é $uma\ constante\ a\ ser\ determinada.$

$f(1) = \operatorname{arcsen}(1) + \ln(1) + 2\cos(1) + C$

$f(1) = \dfrac{\pi}{2} + 0 + 2\cos(1) + C$

$f(1) = \dfrac{\pi}{2} + 2\cos(1) + C\ ; \quad f(1) = 0\ .\ \ Logo,$

$\dfrac{\pi}{2} + 2\cos(1) + C = 0 \rightarrow C = -\dfrac{\pi}{2} - 2\cos(1).$

$*\ Portanto, temos$

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x + \ln x + 2\cos x - \left(\frac{\pi}{2} + 2\cos(1)\right)$$

9.

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$
$$V_{cilindro} = 10\pi r^2$$

$*\ Calcular\ V(6{,}02)\ por\ diferenciais.$

$Logo, queremos\ V(6 + 0{,}02).$

$Sobre\ diferenciais\ temos:$

$$dy = f'(x).dx\ \ e\ \Delta y = f(x+dx) - f(x)$$

$Sabemos\ que\ em\ diferenciais\ dy \cong \Delta y, então:$

$$f(x + dx) - f(x) \cong f'(x).dx$$

$Se\ queremos\ V(6+0{,}02)\ temos\ que\ x=27\ e\ \ dx=-1, logo:$

$$V(6+0{,}02)-V(6)\cong V'(6).(0{,}02)$$
$$V(6{,}02)-10\pi.6^2\cong 20\pi.6.(0{,}02)$$
$$V(6{,}02)\cong 2{,}4\pi+360\pi$$
$$V(6{,}02)\cong 362{,}4\pi\ m^3$$

10.

$f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1};$

$1)\ Domínio\ de\ f:$

$*\ x^2+1\neq 0\ ;\quad x^2+1=0\rightarrow x^2=-1\rightarrow x=\sqrt{-1}\ \notin\mathbb{R}.$

$x^2+1\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}.$

$*\ D(f)=\mathbb{R}.$

$2)\ Interseções\ com\ os\ eixos\ coordenados:$

$f(0)=\dfrac{(0+1)^2}{0^2+1}=\dfrac{1}{1}=1.\quad ponto\ \ (0,1).$

$f(x)=0\rightarrow\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}=0\rightarrow(x+1)^2=0\rightarrow x=-1.\quad ponto\ (-1,0).$

$3)\ Assíntotas:$

$*\ Verticais$: $Não\ há\ assíntotas\ verticais\ ao\ gráfico\ de\ f(x), pois\ f\ é\ contínua\ nos\ reais. Logo, não\ há\ pontos\ de\ descontinuidades.$

$*\ Horizontais$: $\ Dizemos\ que\ a\ reta\ y=a\ é\ uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a\qquad ou\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+2x+1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0+0}{1+0}=\frac{1}{1}=1.$$

$*\ Logo, a\ reta\ y=1\ é\ uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$4)\ Crescimento\ e\ Decrescimento:$

$f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1};$

$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x^2+1)-(2x)(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{2x^3+2x+2x^2+2-2x^3-4x^2-2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}\rightarrow f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$*\ Fazendo\ o\ estudo\ do\ sinal\ de\ f'(x), temos:$

$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-(-1)+++++++++(\ 1\ )-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\qquad 2(1-x^2)$

$++++++++++++++++++++++++++++\qquad (x^2+1)^2$

$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-(-1)+++++++++(\ 1\ )-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\qquad f'(x)$

$* \; Da \; análise \; acima, concluímos \; que$
f é $crescente \; no \; intervalo \; (-1, 1) \; e$
f é $decrescente \; no \; intervalo \; (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

5) $Pontos \; Críticos$:
$* \; Temos \; um \; ponto \; crítico \; quando \; f'(x) = 0 \; ou \; onde \; f'(x) \; não \; existe.$
$* \; Como \; D(f') = \mathbb{R}, temos \; ponto \; crítico \; apenas \; onde \; f'(x) = 0. Ou \; seja, em$
$x = -1 \; e \; x = 1.$

$$f(-1) = \frac{(-1+1)^2}{(-1)^2+1} = \frac{0}{2} = 0. \quad ponto \; (-1, 0) \; ; \; f(-1) \text{ é } o \; valor \; mínimo \; absoluto$$

$$f(1) = \frac{(1+1)^2}{(1)^2+1} = \frac{4}{2} = 2. \quad ponto \; (1, 2) \; ; \; f(1) \text{ é } o \; valor \; máximo \; absoluto$$

6) $Concavidade$:

$$f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2};$$

$$f''(x) = \frac{(-4x)(x^2+1)^2 - (-2x^2+2)(2)(2x)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-4x^3 - 4x - (-2x^2+2)(4x)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-4x^3 - 4x + 8x^3 - 8x}{(x^2+1)^3} \to f''(x) = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2+1)^3} \to f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3};$$

$* \; Fazendo \; o \; estudo \; do \; sinal \; de \; f''(x), temos$:

$- - - - - - - - - - - - - - - - - (0) + + + + + + + + + + + +$ $\quad 4x$

$+ + + + + + + (-\sqrt{3}) - - - - - - - - - - - - - (\sqrt{3}) + + + + + +$ $\quad (x^2 - 3)$

$+ +$ $\quad (x^2 + 1)^3$

$- - - - - - - (-\sqrt{3}) + + + + + (0) - - - - (\sqrt{3}) + + + + + +$ $\quad f''(x)$

$* \; Da \; análise \; acima, concluímos \; que$
$f \; possui \; concavidade \; voltada \; para \; cima \; em \; \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \; e$
$f \; possui \; concavidade \; voltada \; para \; baixo \; em \; \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right).$

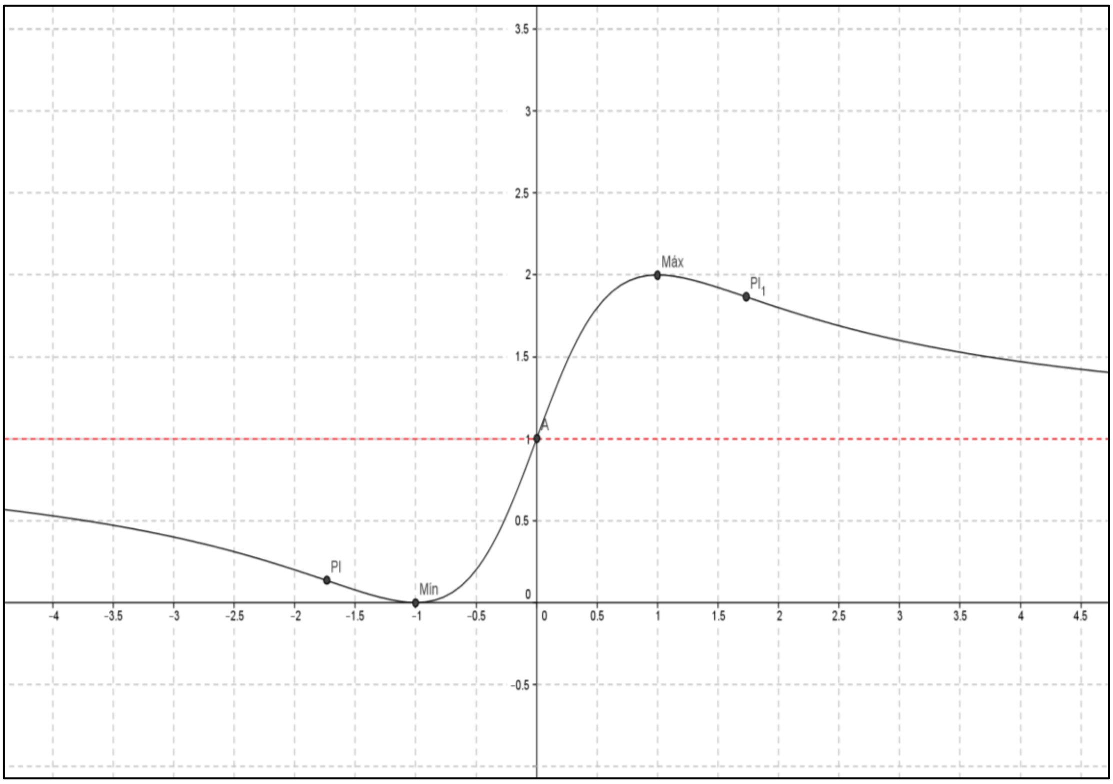
7) $Pontos \; de \; Inflexão$:

$* \; Onde \; f''(x) = 0, ou \; seja, em \; x = 0, x = -\sqrt{3} \; e \; x = \sqrt{3}.$

$$f(0) = \frac{(0+1)^2}{0^2+1} = \frac{1}{1} = 1; \quad ponto \; (0, 1) \; ;$$

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{\left(-\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \; ; \quad ponto \; \left(-\sqrt{3}, \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}\right);$$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \; ; \quad ponto \; \left(\sqrt{3}, \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}\right);$$



Máx
PI1
A
PI
Mín

Capítulo 4 2009

4.1 1ª Avaliação-21 de Março de 2009

1.

$a)\ f(x)=\begin{cases} kx-3, & se\ x\le -1\\ x^2+k, & se\ x>-1\end{cases}.\ determinar\ k\ para\ que\ exista\ \lim\limits_{x\to -1} f(x).$

$*\ Dizemos\ que\ \lim\limits_{x\to a} f(x)\ existe\ quando\ os\ limites\ laterais\ existem\ e\ são\ iguais.$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2+k)=(-1)^2+k=1+k\ ;$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(kx-3)=k(-1)-3=-k-3.$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\Rightarrow 1+k=-k-3\to 2k=-4\ \therefore\ k=-2.$

$b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x};$

$*\ Obs{:}\ |2x-1|=\begin{cases} 2x-1, & se\ x\ge 1/2\\ -(2x-1), & se\ x<1/2\end{cases}\ ;\ |2x+1|=\begin{cases} 2x+1, & se\ x\ge -1/2\\ -(2x+1), & se\ x<-1/2\end{cases}$

$*\ Se\ x\to 0, |2x-1|=-(2x-1)\ e\ \ |2x+1|=2x+1.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-(2x-1)-(2x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x+1-2x-1}{x}=$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4x}{x}\ ;\ \ se\ x\to 0\ , x\neq 0. Logo, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4x}{x}=-4.$

$*\ Portanto, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}=-4\ .$

2.

$$f(x)=\frac{x^3+7x^2+12x}{x^2+2x-3}\to f(x)=\frac{x(x+3)(x+4)}{(x+3)(x-1)}$$

$a)Continuidade\ de\ f{:}$

$*\ Como\ f$ é $uma\ função\ polinomial\ racional, temos\ que\ f$ é $contínua\ no\ seu\ domínio. Logo,$

$$D(f)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$$

$*\ Portanto, f$ é $contínua\ em\ (-\infty,-3)\cup(1,+\infty), e\ descontínua\ em\ x=-3\ e\ x=1.$

$b)\ Dizemos\ que\ a\ reta\ x=a$ é $uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ casos\ a\ seguir{:}$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty\qquad ou\qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$$

$*\ Calculando\ em\ x=-3, temos{:}$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}\frac{x(x+3)(x+4)}{(x+3)(x-1)}=\lim_{x\to -3^+}\frac{x(x+4)}{(x-1)}=\frac{-3(-3+4)}{(-3-1)}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}.$$

$*\ Obs{:}\ se\ x\to -3, então\ x\neq -3\ e, portanto, x+3\neq 0.$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-}\frac{x(x+3)(x+4)}{(x+3)(x-1)}=\lim_{x\to -3^-}\frac{x(x+4)}{(x-1)}=\frac{-3(-3+4)}{(-3-1)}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}.$$

$*\ Como\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)\ , então\ \lim\limits_{x\to -3} f(x)\ existe\ e$ é $igual$ à $3/4.$

$-Logo, x=-3$ não é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$* \; Calculando \; em \; x = 1, temos:$

$-Se \; x \neq -3, então \; f(x) = \dfrac{x(x+4)}{(x-1)}\;;$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x+4)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x}^{1}\overbrace{(x+4)}^{5}}{\underbrace{(x-1)}_{0^+}} = +\infty$$

$* \; Obs: se \; x \to 1^+, então \; x > 1; \;\; x - 1 > 0.$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x+4)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{x}^{1}\overbrace{(x+4)}^{5}}{\underbrace{(x-1)}_{0^-}} = -\infty$$

$* \; Obs: se \; x \to 1^-, então \; x < 1; \;\; x - 1 < 0.$

$-Logo, a \; reta \; x = 1 \text{ é } uma \; assíntota \; vertical \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

3.

$a) \; \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\,2^{\cos\frac{\pi}{x}} = 0.$

$$-1 \leq \cos\frac{\pi}{x} \leq 1$$
$$2^{-1} \leq 2^{\cos\frac{\pi}{x}} \leq 2^1$$
$$\frac{1}{2} \leq 2^{\cos\frac{\pi}{x}} \leq 2$$
$$\frac{\sqrt[3]{x}}{2} \leq \sqrt[3]{x}\,2^{\cos\frac{\pi}{x}} \leq 2\sqrt[3]{x}$$

$* \; Sejam \; f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2}, g(x) = \sqrt[3]{x}\,2^{\cos\frac{\pi}{x}} \; e \; h(x) = 2\sqrt[3]{x}, então \; f(x) \leq g(x) \leq h(x). E \; ainda, \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \; e \; \lim_{x\to 0} h(x) = 0, ou \; seja, \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0, assim, pelo \; Teorema \; do \; Confronto, temos \; \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0.$

$Portanto, \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\,2^{\cos\frac{\pi}{x}} = 0.$

$b) \; \lim_{x\to 16} \dfrac{16-x}{4-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 16} \dfrac{(4+\sqrt{x})(4-\sqrt{x})}{(4-\sqrt{x})} = \lim_{x\to 16}(4+\sqrt{x}) = 4 + \sqrt{16} = 4 + 4 = 8.$

$* \; Obs: se \; x \to 16, x \neq 16 \; logo, x - 16 \neq 0 \Rightarrow (4+\sqrt{x})(4-\sqrt{x}) \neq 0.$

4.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2c, & x < -2 \\ 3cx + k, & -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2k, & se \; x > 1 \end{cases}$$

$* \; Dizemos \; que \; f \text{ é } contínua \; num \; ponto \; x = a \; se, e \; somente \; se,$

$1) \; f(a) \; existe;$

$2) \; \lim_{x\to a} f(x) \; existe;$

$$3)\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$-Em\ x = -2$:
1) $f(-2) = 3c(-2) + k = -6c + k$
2) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$;
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (x + 2c) = 2c - 2$;
$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (3cx + k) = -6c + k$;
$*$ *Portanto, para que f seja contínua em $x = -2$ devemos ter a igualdade*:
$2c - 2 = -6c + k \rightarrow 8c - k = 2\ (I)$

$-Em\ x = 1$:
1) $f(1) = 3c(1) + k = 3c + k$
2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$;
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3cx + k) = 3c + k$;
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3x - 2k) = 3 - 2k$;
$*$ *Portanto, para que f seja contínua em $x = 1$ devemos ter a igualdade*:
$3c + k = 3 - 2k \rightarrow 3c + 3k = 3 \rightarrow c + k = 1\ (II)$

$*$ *Com as equações I e II resolvemos o seguinte sistema*:
$$\begin{cases} 8c - k = 2 \\ c + k = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c + k = 1 \\ 9c = 3 \end{cases} \therefore c = \frac{1}{3}\ e\ k = \frac{2}{3}.$$

$*$ *Como f é uma função sentencial composta por funções polinomiais e, portanto, contínuas em seus domínios, podemos afirmar que f é contínua em $(-\infty, -2) \cup (-2,1) \cup (1, +\infty)$. Por outro lado, encontrados os valores de c e k acima, temos que f é contínua em $x = -2$ e $x = 1$ e, consequentemente, f é contínua em todos os reais.*

5.
a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; *mostras que f é contínua em $[-2, 2]$.*
$*$ *Primeiramente vamos definir o domínio da função f.*
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 \geq 0\}$
Analisando a expressão quadrática $4 - x^2$, temos:
$- - - - - - - - - (-2) + + + + + + + + (\ 2\ ) - - - - - - - - -\quad (4 - x^2)$
$*$ *Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$*
Dizemos que uma função f é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ se, e somente se,
$*$ *f é contínua no intervalo aberto (a, b),*
1) *$f(a)$ e $f(b)$ existem*;
2) *$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existem*;
3) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *e* $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

$*$ *Usando esta informação, temos*:
1) $f(-2) = \sqrt{4 - (-2)^2} = \sqrt{4 - 4} = \sqrt{0} = 0.$
$f(2) = \sqrt{4 - (2)^2} = \sqrt{4 - 4} = \sqrt{0} = 0.$

2) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to -2^+}(4-x^2)} = \sqrt{\lim_{x\to -2^+} 4 - \lim_{x\to -2^+} x^2}$
$= \sqrt{4-(-2)^2} = \sqrt{4-4} = \sqrt{0} = 0.$
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 2^-}(4-x^2)} = \sqrt{\lim_{x\to 2^-} 4 - \lim_{x\to 2^-} x^2} = \sqrt{4-(2)^2} =$
$\sqrt{4-4} = \sqrt{0} = 0.$

3)$f(-2) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$ e $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x).$
$*$ *Portanto*, f é *contínua no intervalo fechado* $[-2, 2]$.

$b)$ $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9.$ *provar que existe um número real* c *tal que*
$f(c) = 100.$
$* f(0) = 0^3 - 5.0^2 + 7.0 - 9 = -9.$
$* f(10) = 10^3 - 5.10^2 + 7.10 - 9 = 1000 - 500 + 70 - 9 = 561.$

$*$ *Como* f é *uma função polinomial e contínua no intervalo* $[0, 10]$, *e ainda*,
$f(0) < f(c) < f(10)$, *podemos garantir pelo Teorema do Valor Intermediário*,
que existe algum número real $c \in (0,10)$ *tal que* $f(c) = 100.$

4.2 2ª Avaliação-17 de Abril de 2009

1.

$$v(t) = Q'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{200(30 - t - \Delta t)^2 - 200(30-t)^2}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{200[900 - 60t - 60\Delta t + t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - 900 + 60t - t^2]}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{200[-60\Delta t + 2t\Delta t + \Delta t^2]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{200\Delta t[-60 + 2t + \Delta t]}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} 200[-60 + 2t + \Delta t] = 200(2t - 60) = 400(t - 30)$$

$\therefore v(t) = 400(t - 30) \to v(10) = 400(10 - 30) = 400(-20) = -8.000\ litros/min$

$*$ *O sinal negativo indica a perda de liquído, o que acontece de fato, já que tratasse de um escoamento.*

$$V_{média} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(10) - Q(0)}{10 - 0} = \frac{200(20)^2 - 200(30)^2}{10} = \frac{200(400 - 900)}{10} =$$

$$\frac{200(-500)}{10} = -10.000\ litros/min\,.$$

2. $xy^2 + \sqrt{xy} = 2$; *reta tangente no ponto em que* $y = 1$.

$*$ *Obs*: $\sqrt{xy}$ *existe para* $xy > 0$, *com* $y = 1$ *temos, portanto,* $x > 0$.

$*$ *Para* $y = 1$, *temos*:

$x + \sqrt{x} = 2 \to \sqrt{x} = 2 - x \to x = (2 - x)^2 \to x^2 - 5x + 4 = 0$

$x^2 - 5x + 4$; $\Delta = 25 - 16 = 9$.

$$x = \frac{5 \pm 3}{2} \to x = 4 \text{ ou } x = 1.$$

$*$ *Portanto, temos os pontos* $(1,1)$ *e* $(4,1)$. *No entanto, note que o ponto* $(4,1)$ *não pertence a curva! Logo, temos como solução o ponto* $(1,1)$.

$-$*Por derivação implícita, temos*:

$$y^2 + 2xyy' + \frac{1}{2\sqrt{xy}}(y + xy') = 0$$

$$y' \cdot \left[2xy + \frac{x}{2\sqrt{xy}}\right] = -\left(y^2 + \frac{y}{2\sqrt{xy}}\right)$$

$$y' = \frac{-\left(y^2 + \frac{y}{2\sqrt{xy}}\right)}{2xy + \frac{x}{2\sqrt{xy}}} = \frac{-\left(2y^2\sqrt{xy} + y\right)}{4xy\sqrt{xy} + x};$$

$*$ *Calculando* y' *no ponto* $(1,1)$:

$$y' = \frac{-(2+1)}{4+1} = -\frac{3}{5}.$$

$*$ *Equação da reta tangente no ponto* $(1,1)$:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

$$y - 1 = -\frac{3}{5}(x - 1)$$

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$$

$3.\, f(x) = x^2 + 1\,;\;\; retas\ tangentes\ à\ f\ que\ passam\ pelo\ ponto\ (1,1).$
$*\ Dado\ um\ ponto\ e\ coeficiente\ angular\ da\ reta, temos\ a\ equação\ da\ reta:$
$$y - y_o = m(x - x_o)$$
$*\ Onde\ m\ é\ coeficiente\ angular\ da\ reta, dado\ pelo\ valor\ de\ f'(x)\ no\ ponto\ de\ tangência\ x = a\ , e\ (x_o, y_o)\ o\ ponto\ pertencente\ à\ reta. Logo,$
$$y - y_o = m(x - x_o)$$
$$y - 1 = f'(a)(x - 1)$$
$*\ Para\ x = a, temos\ f(a) = y = a^2 + 1. Com\ isso,$
$$a^2 + 1 - 1 = (2a)(a - 1)$$
$$a^2 = 2a^2 - 2a$$
$$a^2 - 2a = 0$$
$$a(a - 2) = 0$$
$$a = 0\ ou\ a = 2.$$

$*\ Para\ a = 0\ temos\ f'(0) = 0. Logo, a\ equação\ da\ reta\ tangente\ é:$
$$y - 1 = 0(x - 1)$$
$$y - 1 = 0$$
$$y = 1$$

$*\ Para\ a = 2\ temos\ f'(2) = 4. Logo, a\ equação\ da\ reta\ tangente\ é:$
$$y - 1 = 4(x - 1)$$
$$y - 1 = 4x - 4$$
$$y = 4x - 3$$

4.

$f(x) = 2^{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x^3)}\,; equação\ da\ reta\ normal\ no\ ponto\ em\ que\ f(x) = 1.$
$2^{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x^3)} = 1 \to 2^{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x^3)} = 2^0 \to \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x^3) = 0.$
$$\operatorname{sen} x^3 = 0 \quad ou \quad \operatorname{sen} x^3 = \pi\ (não\ possui\ solução!)$$
$\operatorname{sen} x^3 = 0 \to x = 0.$
$*\ Portanto, o\ ponto\ em\ questão\ é\ (0,1).$
$-Sejam\ u = x^3, v = \operatorname{sen} u\ , z = \operatorname{tg} v\ \ e\ y = f(z) = 2^z.$
$*\ Pela\ Regra\ da\ Cadeia:$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{dz}{dv} \cdot \frac{dy}{dz}$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = (3x^2) \cdot (\cos u) \cdot (\sec^2 v) \cdot 2^z \cdot \ln(2)$$
$$f'(x) = 3x^2 \cdot (\cos x^3) \cdot (\sec^2(\operatorname{sen} x^3)) \cdot 2^{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x^3)} \cdot \ln(2)$$
$$f'(0) = 0.$$
$*\ f'(x)\ é\ o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto. O\ coeficiente\ da\ reta\ normal\ é\ o\ inverso\ simétrico, ou\ seja,$
$$m_n = -\frac{1}{f'(x)}$$
$*\ Como\ temos\ f'(0) = 0, ou\ seja, uma\ reta\ tangente\ horizontal\ em\ x = 0, a\ reta\ normal\ neste\ ponto\ é\ uma\ reta\ vertical, que\ se\ apresenta\ na\ forma:$
$$x = x_o$$
$$x = 0.$$

5.

$$f(x) = \begin{cases} -1-2x\,, & x<-1, \\ x^2, & -1 \le x \le 1, \\ x\,, & x>1 \end{cases}$$

$*\, f$ é $uma\ função\ sentencial\ composta\ por\ funções\ polinomiais\ e, portanto,$ $contínuas\ e\ diferenciáveis\ em\ seus\ domínios, ou\ seja, temos\ que\ f$ é $contínua$ $e\ derivável\ em\ (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty).$

$*\, Vamos\ verificar\ se\ f$ é $diferenciável\ nos\ pontos\ onde\ há\ mudança\ de\ sentença,$ $ou\ seja, em\ x=-1\ e\ x=1.$

$-Primeiro\ verificamos\ se\ f$ é $contínua\ em\ x=-1\ e\ em\ x=1$:

1) $f(-1)=(-1)^2=1.$

2) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$; $analisando\ os\ limites\ laterais, temos$:

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} x^2 = (-1)^2 = 1;$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} (-1-2x) = -1-2(-1) = -1+2 = 1.$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1} f(x) = 1.$

3) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1);$

$*\, Portanto, f$ é $contínua\ em\ x=-1.$

1)$f(1)=1^2=1.$

2) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$; $analisando\ os\ limites\ laterais, temos$:

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} x = 1;$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} x^2 = 1^2 = 1.$

$\therefore \lim\limits_{x\to1} f(x) = 1.$

3) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1);$

$*\, Portanto, f$ é $contínua\ em\ x=1.$

$*\, Obs$: f é $contínua\ nos\ reais!!!$

$*\, Seja\ x+\Delta x<-1, então\ temos$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{-1-2(x+\Delta x)-[-1-2x]}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{-1-2x-2\Delta x+1+2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{-2\Delta x}{\Delta x} = -2.$$

$*\, Seja\ -1<x+\Delta x<1, então\ temos$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

$*\, Seja\ x+\Delta x>1, então\ temos$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$-Com\ isso, temos\ uma\ expressão\ para\ f'(x)\ definida\ da\ seguinte\ forma$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & x<-1 \\ 2x, & -1 \le x \le 1. \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$* \textit{Analisando a diferenciabilidade de } f \textit{ em } x = -1, \textit{temos}:$
$f'_+(-1) = 2(-1) = -2;$
$f'_-(-1) = -2.$
$-\textit{Logo}, f$ é $\textit{derivável em } x = -1.$
$* \textit{Analisando a diferenciabilidade de } f \textit{ em } x = 1, \textit{temos}:$
$f'_+(1) = 1;$
$f'_-(1) = 2.(1) = 2.$
$-\textit{Logo}, f$ não é $\textit{derivável em } x = 1.$

$* \textit{Portanto}, f$ é $\textit{derivável em } (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$

4.3 2ª Avaliação-18 de Abril de 2009

1.

$* \, Encontrar \; as \; assíntotas \; horizontais \; ao \; gráfico \; da \; função \; f, dada \; por:$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+2}}{4x+6}$$

$Dizemos \; que \; a \; reta \; y = a$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; se \; ocorrer \; um \; dos \; casos \; a \; seguir,$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2}}{4x+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{3x^2+2}}{|x|}}{\frac{4x+6}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{4x+6}{x}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{4+\frac{6}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{\lim_{x\to+\infty}\left(4+\frac{6}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}}{\lim_{x\to+\infty}\left(4+\frac{6}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to+\infty} 3 + \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}}}{\lim_{x\to+\infty} 4 + \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}} = \frac{\sqrt{3+0}}{4+0}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$* \, Obs: se \; x \to +\infty, então \; |x| = x \; ; \; |x| = \sqrt{x^2}$

$-Logo, a \; reta \; y = \frac{\sqrt{3}}{4}$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2}}{4x+6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{3x^2+2}}{|x|}}{\frac{4x+6}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{4x+6}{-x}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{-4-\frac{6}{x}} = \frac{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{\lim_{x\to-\infty}\left(-4-\frac{6}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}}{\lim_{x\to-\infty}\left(-4-\frac{6}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 3 + \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}}}{\lim_{x\to-\infty}(-4) - \lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x}} =$$

$$\frac{\sqrt{3+0}}{-4-0} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$* \, Obs: se \; x \to -\infty, então \; |x| = -x \; ; \; |x| = \sqrt{x^2}$

$-Logo, a \; reta \; y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

2.

$\cos(x+y) = y \; ; equação \; da \; reta \; tangente \; no \; ponto \; (\pi/2\,, 0).$

$* \, Por \; derivação \; implícita, temos:$

$-(1+y')\,\mathrm{sen}(x+y) = y'$

$y' \cdot [1+\mathrm{sen}(x+y)] = -\,\mathrm{sen}(x+y)$

$$y' = -\frac{\mathrm{sen}(x+y)}{1+\mathrm{sen}(x+y)};$$

$* \, Calculando \; o \; valor \; de \; y' \; no \; ponto \; (\pi/2\,, 0):$

$$y' = -\frac{\operatorname{sen}(\pi/2+0)}{1+\operatorname{sen}(\pi/2+0)} = -\frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{1+\operatorname{sen}(\pi/2)} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

$*\ Logo, a\ equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (\pi/2\,, 0)$ é:

$$y - 0 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$$

3. $Determinar\ o\ valor\ de$ a $tal\ que\ f\ seja\ derivável\ em\ x = 2.$

$$f(x) = \begin{cases} ax - 9, & x < 2 \\ 2x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$*\ Primeiro\ encontraremos\ o\ valor\ de$ a $para\ o\ qual\ f$ é $contínua\ em\ x = 2.$

1) $f(2) = 2.(2)^2 - 1 = 8 - 1 = 7.$

2) $\lim_{x\to 2} f(x)\,; analisando\ os\ limites\ laterais, temos:$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x^2 - 1) = 2.(2)^2 - 1 = 8 - 1 = 7;$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(ax - 9) = 2a - 9.$

$*\ Para\ que\ limite\ em\ x = 2\ exista, devemos\ ter\ a\ seguinte\ igualdade:$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$
$$7 = 2a - 9$$
$$2a = 16$$
$$a = 8$$

$*\ Para\ a = 8, f$ é $derivável\ em\ x = 2?\ Devemos\ verificar!$

$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2 - 1 - 7}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2(x^2 - 4)}{x - 2} =$
$\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} 2(x + 2) = 2(2 + 2) = 2(4) = 8.$

$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{8x - 9 - 7}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{8x - 16}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{8(x - 2)}{x - 2} =$
$\lim_{x\to 2^-} 8 = 8.$

$Como\ \ f'_+(2) = f'_-(2)\ temos, portanto, que\ f$ é $derivável\ em\ x = 2\ para\ a = 8.$

4.

$a)$

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}\right] = \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\ ;\quad x \in (0, \pi/2)$$

$*\ Obs: para\ o\ intervalo\ dado, temos\ que\ \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} > 0. Dessa\ forma, podemos$ $modificar\ a\ expressão\ do\ radical, de\ modo\ a\ facilitar\ as\ contas. Veja:$

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\cdot\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\right)} = \sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x}} = \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

$-Dessa\ forma, temos:$

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x}\right];$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x}\right]=\frac{\cos x\cdot\cos x-(1+\operatorname{sen}x)\cdot(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=$$

$$\frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}=\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{(1+\operatorname{sen}x)}{(1+\operatorname{sen}x)(1-\operatorname{sen}x)}=\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}.$$

$$*\ Logo,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x}\right]=\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}.$$

$b)\ f(x)=e^{\operatorname{tg}\sqrt{\operatorname{sen}x}}$; $determinar\ f'(x)$.

$*\ Sejam\ u=\operatorname{sen}x, v=\sqrt{u}, z=\operatorname{tg}v\ \ e\ y=f(z)=e^z$.

$-Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{dz}{dv}\cdot\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=(\cos x)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)\cdot(\sec^2 v)\cdot e^z$$

$$f'(x)=(\cos x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen}x}}\cdot\left(\sec^2\sqrt{\operatorname{sen}x}\right)\cdot e^{\operatorname{tg}\sqrt{\operatorname{sen}x}}$$

5.

$s(t)=\dfrac{2-t}{2+t}$; $determinar\ v(t)$.

$$v(t)=s'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{2-t-\Delta t}{2+t+\Delta t}-\frac{2-t}{2+t}}{\Delta t}=$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{(2+t)(2-t-\Delta t)-(2+t+\Delta t)(2-t)}{(2+t+\Delta t)(2+t)}}{\Delta t}=$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4-2t-2\Delta t+2t-t^2-t\Delta t-(4-2t+2t-t^2+2\Delta t-t\Delta t)}{\Delta t(2+t+\Delta t)(2+t)}=$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-4\Delta t}{\Delta t(2+t+\Delta t)(2+t)}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-4}{(2+t+\Delta t)(2+t)}=-\frac{4}{(2+t)^2}.$$

$$\therefore\ v(t)=-\frac{4}{(2+t)^2}.$$

4.4 3ª Avaliação-16 de Maio de 2009

1.

$a)\ S = \pi R^2 + \pi Rg \quad (fórmula\ da\ área\ total\ do\ cone)$

$*\ Lembremos\ que\ \ g^2 = h^2 + R^2 \therefore g = \sqrt{h^2 + R^2}.$

$S(h) = \pi R^2 + \pi R\sqrt{h^2 + R^2}\ ; quando\ o\ cone\ sofre\ uma\ pequena\ variação\ \Delta h,$ $com\ o\ raio\ R\ constante\ temos\ que\ \Delta S \cong ds.$

$$S'(h) = \frac{\pi Rh}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

$Por\ diferenciais, temos:$

$$\Delta S \approx S'(h).dh$$

$$\Delta S \approx \frac{\pi Rh}{\sqrt{h^2 + R^2}}.\Delta h$$

$b)\ Encontrar\ os\ valores\ máximos\ e\ mínimos\ locais\ e\ absolutos\ de$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ 2 - x^2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$*\ Primeiramente\ vamos\ calcular\ o\ valor\ de\ f\ nos\ extremos\ do\ intevalo\ e\ no$ $em\ que\ há\ mudança\ de\ comportamento\ da\ função, ou\ seja, calculemos\ f(-1),$ $f(0)\ e\ f(1).$

$*\ f(-1) = (-1)^2 = 1.$

$*\ f(0) = 2 - 0^2 = 2 - 0 = 2.$

$*\ f(1) = 2 - 1^2 = 2 - 1 = 1.$

$Procurando\ os\ números\ críticos\ de\ cada\ sentença\ de\ f, temos:$

$-Para\ a\ primeira\ sentença:$

$f'(x) = 2x\ ; f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0\ \therefore x = 0.$

$*\ Note\ que\ x = 0\ não\ pertence\ ao\ domínio\ da\ primeira\ sentença. Logo, não$ $há\ números\ críticos\ em\ f\ no\ intervalo\ (-1, 0).$

$-Com\ isso, temos\ que\ f(-1)\ é\ maior\ valor\ de\ f\ no\ intervalo\ [-1, 0).$

$-Para\ a\ segunda\ sentença:$

$f'(x) = -2x; f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \therefore x = 0.$

$*\ Para\ x = 0, temos\ f(0) = 2.$

$*\ Comparando\ todos\ os\ valores\ encontrados, temos\ então\ que\ f(0)\ é\ o\ valor$ $máximo\ absoluto\ e\ local, f(-1)\ é\ o\ valor\ máximo\ local\ no\ intervalo\ [-1, 0)\ e$ $f(1)\ é\ o\ valor\ mínimo\ local\ no\ intervalo\ [0, 1].$

2.

$$a)\ \frac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2 - x^2} + a \cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{a^2 - x^2}\right] + \frac{d}{dx}\left[a \cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2}(-2x)\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} =$$

$$-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a - x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$b)\ f(x) = x^{\operatorname{senh}(x^2)}\ ;\ \ determinar\ f'(x).$
$\ln f(x) = \ln x^{\operatorname{senh}(x^2)}$
$\ln f(x) = \operatorname{senh} x^2 \cdot \ln x$
$*\ Por\ diferenciação\ logarítmica\ temos:$
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (2x)\cdot(\cosh x^2)\cdot \ln x + \operatorname{senh} x^2 \cdot \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = f(x)\left[(2x)\cdot(\cosh x^2)\cdot \ln x + \operatorname{senh} x^2 \cdot \frac{1}{x}\right]$$
$$f'(x) = \ x^{\operatorname{senh}(x^2)}\left[(2x)\cdot(\cosh x^2)\cdot \ln x + \operatorname{senh} x^2 \cdot \frac{1}{x}\right].$$

3.

$$a)\ y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}\ ;\ \ determinar\ y';$$

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$$
$$\ln y = \ln \sqrt[3]{x+1} - \ln(x+2) - \ln\sqrt{x+3}$$
$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+3)$$
$*\ Por\ diferenciação\ logarítmica, temos:$
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{2(x+3)}$$
$$y' = y\cdot\left[\frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{2(x+3)}\right]$$
$$y' = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}\left[\frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{2(x+3)}\right].$$

$b)\ f(x) = \log_3(x^2 - \operatorname{sen} x)\ \ ; determinar\ f'(\pi/2).$
$*\ Sejam\ u = x^2 - \operatorname{sen} x\ \ e\ y = f(u) = \log_3 u\ ;$
$-Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du}$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = (2x - \cos x)\cdot\frac{1}{u.\ln(3)}$$
$$f'(x) = \ (2x - \cos x)\cdot\frac{1}{(x^2 - \operatorname{sen} x).\ln(3)}$$
$$f'(x) = \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \operatorname{sen} x).\ln(3)}$$
$$*\ f'(\pi/2) = \frac{2(\pi/2) - \cos(\pi/2)}{\left(\pi/2^2 - \operatorname{sen}(\pi/2)\right).\ln(3)} = \frac{\pi - 0}{\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right).\ln(3)} = \frac{4\pi}{(\pi^2 - 4)\ln(3)}$$

4.
$raio\ da\ esfera\ considerando\ a\ camada\ de\ gelo$ é $r = 4 + x$, $onde\ x$ é $a\ espessura\ da\ camada\ de\ gelo.$

$* Se\ \dfrac{dV}{dt} = -10cm^3/min$, $determine\ \dfrac{dx}{dt}\ quando\ x = 2cm.$

$V(x) = \dfrac{4}{3}\pi(4+x)^3 \rightarrow V'(x) = \dfrac{dV}{dx} = 4\pi(4+x)^2$;

$* Logo,$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$-10 = 4\pi(4+x)^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{10}{4\pi(4+x)^2}$$

$* Quando\ x = 2cm, temos:$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{10}{4\pi(4+2)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{10}{4\pi(36)}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{5}{72\pi} cm/min$$

5.
$a)\ f(x) = 2 + (x-5)^3$; $mostrar\ que$ 5 é $um\ número\ crítico, mas\ que\ f(5)\ não\ máximo\ nem\ mínimo\ local.$

$*$ $Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f$ é $um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde\ ou\ f'(c) = 0\ ou\ f'(c)\ não\ existe.$

$* f'(x) = 3(x-5)^2$; $fazendo\ f'(x) = 0, temos:$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x-5)^2 = 0 \therefore x = 5.$

$-Logo,$ 5 é $um\ número\ crítico!$

$* Dizemos\ que\ f(c)$ é $o\ valor\ máximo\ local\ se\ f(c) \geq f(x)\ nas\ proximidades\ de\ c.$
$Note\ que\ f(5) = 2. Para\ x > 5, temos\ que\ (x-5)^3 > 0\ e, portanto, f(x) > 2. Logo,$
$f(5)\ não$ é $máximo\ local.$

$De\ modo\ similar, temos:$

$* Dizemos\ que\ f(c)$ é $o\ valor\ mínimo\ local\ se\ f(c) \leq f(x)\ nas\ proximidades\ de\ c.$
$Note\ que\ f(5) = 2. Para\ x < 5, temos\ que\ (x-5)^3 < 0\ e, portanto, f(x) < 2. Logo,$
$f(5)\ não$ é $mínimo\ local.$

$* Obs: Podíamos\ ter\ a\ conclusão\ acima\ analisando\ o\ sinal\ de\ f'(x).$

$+ + + + + + + + + + + + + + (\ 5\ ) + + + + + + + + + + +$ $f'(x) = 3(x-5)^2$

$* Embora\ f'(5) = 0, ou\ seja,$ 5 é $número\ crítico, temos\ que\ f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$
$Como\ em\ x = 5\ não\ há\ mudança\ de\ sinal\ em\ f'(x)\ podemos\ concluir\ que\ f(5)$
$não$ é $máximo\ nem\ mínimo\ local,$ é $apenas\ um\ ponto\ crítico!$

$b)\ f(x) = (x^2 - 2)^{2/3}$; $encontrar\ os\ valores\ máximos\ e\ mínimos\ absolutos\ no\ intervalo\ [-1, 2].$

$* Pelo\ Método\ do\ Intervalo\ Fechado, temos:$

1) $Os\ valores\ de\ f\ nos\ extremos\ do\ intervalo:$

$f(-1) = ((-1)^2 - 2)^{2/3} = (-1)^{2/3} = 1.$

$f(2) = (2^2 - 2)^{2/3} = (2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}.$

2) *Os valores de* f *nos números críticos.*

$*$ *Um número crítico de uma função* f é *um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe.*

$$f'(x) = \frac{2}{3}(2x)\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 2}}$$

$*$ *Temos* $f'(x) = 0$ *em* $x = 0$. *E* $f'(x)$ *não existe para* $x = \pm\sqrt{2}$; *Como o intervalo em questão* é $[-1, 2]$ *então* $x = -\sqrt{2}$ *não pertence ao intervalo, restando como números crítico*: 0 *e* $\sqrt{2}$.

$f(0) = (0^2 - 2)^{2/3} = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}.$

$f(\sqrt{2}) = \left((\sqrt{2})^2 - 2\right)^{2/3} = (2-2)^{2/3} = (0)^{2/3} = 0.$

$*$ *Comparando os valores encontrados nas duas etapas concluímos que*:
$f(0) = f(2)$ é *o valor máximo absoluto e* $f(\sqrt{2})$ é *o valor mínimo absoluto*..

Capítulo 5 2010

5.1 1ª Prova-03 de Setembro de 2010

1.

$$a)\ \lim_{x\to 3^+}\frac{5x^3-135}{(x-3)^4}=\lim_{x\to 3^+}\frac{5(x^3-27)}{(x-3)^4}=\lim_{x\to 3^+}\frac{5(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)^4}=$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\overbrace{5(x^2+3x+9)}^{\uparrow\,135}}{\underbrace{(x-3)^3}_{\downarrow\,0^+}}=+\infty\ \left(por\ definição\ temos\ \lim_{x\to 3^+}\frac{5x^3-135}{(x-3)^4}\ \nexists\right);$$

$$b)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x^{\frac{1}{4}}-2}=\lim_{x\to 16}\frac{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2-2^2}{x^{\frac{1}{4}}-2}=\lim_{x\to 16}\frac{\left(x^{\frac{1}{4}}-2\right)\left(x^{\frac{1}{4}}+2\right)}{\left(x^{\frac{1}{4}}-2\right)}=\lim_{x\to 16}\left(x^{\frac{1}{4}}+2\right)=$$

$$\lim_{x\to 16}x^{\frac{1}{4}}+\lim_{x\to 16}2=\sqrt[4]{16}+2=2+2=4.$$

2.

$$y=\frac{x^3+2x^2+x}{(x^2+4x+3)(x^2-9)}$$
$$y=\frac{x(x+1)^2}{(x+1)(x+3)^2(x-3)}$$

$*\ Primeiro\ vamos\ definir\ o\ domínio\ da\ função\ f(x)=y.$

$$D(f)=\mathbb{R}-\{-3,-1,3\}$$

$-Assíntotas:$

$*\ Verticais: Dizemos\ que\ a\ reta\ x=a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty\quad ou\quad \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$$

$*\ Verificando\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ função, ou\ seja, em\ x=-3,\ x=-1\ e\ x=3, temos:$

$$\lim_{x\to -3^+}f(x)=\lim_{x\to -3^+}\frac{\overbrace{x}^{\uparrow\,-3}\ \overbrace{(x+1)^2}^{\uparrow\,4}}{\underbrace{(x+1)}_{\downarrow\,-2}\underbrace{(x+3)^2}_{\downarrow\,0^+}\underbrace{(x-3)}_{\downarrow\,-6}}=\lim_{x\to -3^+}\frac{\overbrace{x(x+1)^2}^{\uparrow\,-12}}{\underbrace{(x+1)(x+3)^2(x-3)}_{\downarrow\,0^+}}=-\infty$$

$*\ Obs: se\ x\to -3^+, x>-3\ então\ x+3>0.$

$-Logo, a\ reta\ x=-3\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x(x+1)^2}{(x+1)(x+3)^2(x-3)}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x(x+1)}{(x+3)^2(x-3)}=$$

$$\frac{\lim_{x\to -1^+}[x(x+1)]}{\lim_{x\to -1^+}[(x+3)^2(x-3)]}=\frac{-1(-1+1)}{(-1+3)^2(-1-3)}=\frac{-1(0)}{(2)^2(-4)}=\frac{0}{-16}=0.$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x(x+1)^2}{(x+1)(x+3)^2(x-3)} = \lim_{x\to-1^-} \frac{x(x+1)}{(x+3)^2(x-3)} =$$

$$\frac{\lim_{x\to-1^-}[x(x+1)]}{\lim_{x\to-1^-}[(x+3)^2(x-3)]} = \frac{-1(-1+1)}{(-1+3)^2(-1-3)} = \frac{-1(0)}{(2)^2(-4)} = \frac{0}{-16} = 0.$$

$-Logo, a\ reta\ x = -1$ não é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} \frac{\overbrace{x}^{3}\overbrace{(x+1)^2}^{16}}{\underbrace{(x+1)}_{4}\underbrace{(x+3)^2}_{36}\underbrace{(x-3)}_{0^+}} = \lim_{x\to3^+} \frac{\overbrace{x(x+1)^2}^{48}}{\underbrace{(x+1)(x+3)^2(x-3)}_{0^+}} = +\infty$$

$*\ Obs: se\ x \to 3^+, x > 3\ então\ x - 3 > 0.$

$-Logo, a\ reta\ x = 3$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$*\ Portanto, temos\ as\ retas\ x = -3\ e\ x = 3\ como\ assíntotas\ verticais.$

$*\ Horizontais: Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2+x}{(x^2+4x+3)(x^2-9)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2+x}{x^4+4x^3-6x^2-36x-27} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(x+4-\frac{6}{x}-\frac{36}{x^2}-\frac{27}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\overbrace{\frac{2}{x}}^{0}+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{0}}{\underbrace{x+4}_{+\infty}-\underbrace{\frac{6}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{36}{x^2}}_{0}-\underbrace{\frac{27}{x^3}}_{0}} = 0.$$

$-Logo, a\ reta\ y = 0$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2+x}{(x^2+4x+3)(x^2-9)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2+x}{x^4+4x^3-6x^2-36x-27} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(x+4-\frac{6}{x}-\frac{36}{x^2}-\frac{27}{x^3}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\overbrace{\frac{2}{x}}^{0}+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{0}}{\underbrace{x+4}_{+\infty}-\underbrace{\frac{6}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{36}{x^2}}_{0}-\underbrace{\frac{27}{x^3}}_{0}} = 0.$$

3.

$$f(x) = \frac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-15}$$

$$f(x) = \frac{2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x+3)(x-5)}$$

$*\ Definindo\ o\ domínio\ da\ função\ f\ temos:$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-3,5\}$$

$* \, Como\ f$ é $uma\ função\ polinomial\ racional\ e, portanto, contínua\ em\ seu\ domínio$ $temos\ que\ f$ é $contínua\ em\ (-\infty, -3) \cup (-3,5) \cup (5, +\infty)$.

$* \, f$ é $descontínua\ em\ x = -3\ e\ x = 5, pois\ em\ ambos\ os\ casos\ f(-3)\ e\ f(5)$ $não\ existem, pois, -3\ e\ 5\ não\ são\ do\ domínio\ da\ função.$

$-Analisando\ o\ tipo\ de\ descontinuidade\ que\ ocorre\ em\ x = -3, temos:$

1) $f(-3)\ não\ existe!!!$

2) $\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{2(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x+3)(x-5)} = \lim_{x\to -3} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x-5)} = \frac{2\left(-3 - \frac{1}{2}\right)}{(-3-5)} = \frac{7}{8}.$

$* \, Portanto, \lim_{x\to -3} f(x)\ existe!!!$

$* \, Neste\ caso, dizemos\ que\ x = -3$ é $um\ ponto\ de\ descontinuidade\ removível!$

$-Analisando\ o\ tipo\ de\ descontinuidade\ em\ x = 5, temos:$

1) $f(5)\ não\ existe!!!$

2) $\lim_{x\to 5} f(x)\ ; neste\ caso\ devemos\ analisar\ o\ limites\ laterais!$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \frac{2(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x+3)(x-5)} = \lim_{x\to 5^+} \frac{\overbrace{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}^{\substack{9 \\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-5)}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}}} = +\infty$$

$* \, Obs: se\ x \to 5^+, x > 5\ então\ x - 5 > 0.$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \frac{2(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x+3)(x-5)} = \lim_{x\to 5^-} \frac{\overbrace{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}^{\substack{9 \\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-5)}_{\substack{\downarrow \\ 0^-}}} = -\infty$$

$* \, Obs: se\ x \to 5^-, x < 5\ então\ x - 5 < 0.$

$* \, Portanto, \lim_{x\to 5} f(x)\ não\ existe.$

$* \, Neste\ caso, dizemos\ que\ x = 5$ é $um\ ponto\ de\ descontinuidade\ infinita$ $(quando\ os\ limites\ laterais\ não\ existem).$

4. $g(x) = 1 - x^2; equações\ das\ retas\ tangentes\ que\ passam\ pelo\ ponto\ (2,0).$

$* \, Dado\ um\ ponto\ e\ o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ temos\ a\ equação\ na\ forma:$

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

$, onde\ m$ é $a\ inclinação\ (coeficiente\ angular)\ da\ reta\ e\ (x_o, y_o)\ um\ ponto\ da\ reta.$

$* \, O\ valor\ de\ m$ é $determinado\ pelo\ valor\ da\ derivada\ de\ g\ no\ ponto\ de\ tangencia.$

$m = g'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1 - (x+\Delta x)^2 - (1 - x^2)}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1 - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 - 1 + x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-2x\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(-2x - \Delta x)}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x\to 0} (-2x - \Delta x) = -2x.$

$* \, Logo, m = -2x.$

$-Lembremos\ que\ existem\ pontos\ da\ curva\ g(x)\ que\ pertencem$ às $retas\ que$ $estamos\ procurando. Logo, dado\ um\ ponto\ pertencente$ à g, ele é $da\ forma$ $(x, 1 - x^2). Com\ essas\ informações, temos:$

$$y - y_o = m(x - x_o)$$
$$y - 0 = m(x - 2)$$
$$1 - x^2 - 0 = (-2x)(x - 2)$$
$$1 - x^2 = -2x^2 + 4x$$
$$x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$\Delta = 16 - 4 = 12$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = 2 + \sqrt{3} \ \ ou \ x = 2 - \sqrt{3}\,;$$

$* \ Para\ x = 2 + \sqrt{3}, temos\ m = -4 - 2\sqrt{3}\,. Logo, a\ equação\ da\ reta$ é:
$$y - 0 = \left(-4 - 2\sqrt{3}\right)(x - 2)$$
$$y = \left(-4 - 2\sqrt{3}\right)x + \left(8 + 4\sqrt{3}\right)$$
$* \ Para\ x = 2 - \sqrt{3}, temos\ m = -4 + 2\sqrt{3}. Logo, a\ equação\ da\ reta$ é:
$$y - 0 = \left(-4 + 2\sqrt{3}\right)(x - 2)$$
$$y = \left(-4 + 2\sqrt{3}\right)x + \left(8 - 4\sqrt{3}\right)$$

5.
$a)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,; encontrar\ f'(x)\ e\ determinar\ seu\ domínio.$
$* \ Domínio\ de\ f\!:\ D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1\ ou\ x \geq 1\};$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{\Delta x} \cdot \frac{\left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1}\right)}{\left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 1 - (x^2 - 1)}{\Delta x\left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 1 - x^2 + 1}{\Delta x\left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x\left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x\left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + \Delta x)}{\left(\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 1}\right)} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}};$$
$* \ Domínio\ de\ f'(x)\!:\ D(f') = \{x \in \mathbb{R} | x < -1\ ou\ x > 1\}$

$b)\ x^2 = x^3 + 5 \rightarrow x^3 - x^2 + 5 = 0\,;$
$* \ Seja\ f(x) = x^3 - x^2 + 5\ e\ vamos\ calcular\ f(-2)\ e\ f(0)\!:$
$f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 5 = -8 - 4 + 5 = -7;$
$f(0) = 0^3 - 0^2 + 5 = 0 - 0 + 5 = 5.$
$* \ Como\ f$ é $uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ [-2, 0]\ , e\ ainda,$
$f(-2) < 0 < f(0), podemos\ garantir\ pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ que$
$existe\ algum\ número\ c \in (-2, 0)\ tal\ que\ f(c) = 0.$
$* \ De\ tal\ modo\ que\ c$ é $número\ cujo\ quadrado$ é $igual\ ao\ seu\ cubo\ mais\ cinco.$

5.2 1ª Prova-04 de Setembro de 2010

1.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sqrt{x+1}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-[x+1]}{x\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x}{x\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}\right)=\frac{-1}{\sqrt{0+1}\left(1+\sqrt{0+1}\right)}=\frac{-1}{\sqrt{1}\left(1+\sqrt{1}\right)}=-\frac{1}{2}.$$

$$b)\ \lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-2^3}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 8}\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)=\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4=4+4+4=12.$$

2.

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+x-12}}$$

$$y=\frac{x}{\sqrt{(x+4)(x-3)}}$$

$*\ Domínio\ da\ função\ f(x)=y:$
$D(f)=\{x\in\mathbb{R}|\ x^2+x-12>0\}$
$-Com\ isso, temos:\ \ D(f)=\{x\in\mathbb{R}|\ x<-4\ ou\ x>3\}$

$*\ Assíntotas:$
$-Verticais: Dizemos\ que\ a\ reta\ x=a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty\qquad ou\qquad \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$$

$*\ Verificando\ se\ há\ assíntotas\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ função: em\ x=-4\ e\ x=3.$
$Obs: como\ o\ domínio\ de\ f\ está\ definido\ para\ x<-4\ não\ faz\ sentido\ calcular\ o\ limite\ lateral\ direito.\ Portanto, só\ podemos\ calcular\ \lim_{x\to -4^-}f(x).$

$$\lim_{x\to -4^-}f(x)=\lim_{x\to -4^-}\frac{\overbrace{x}^{\substack{-4\\\uparrow}}}{\underbrace{\sqrt{x^2+x-12}}_{\substack{\downarrow\\0^+}}}=-\infty$$

$*\ Logo, a\ reta\ x=-4\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$Obs: como\ o\ domínio\ de\ f\ está\ definido\ para\ x>3\ não\ faz\ sentido\ calcular\ o\ limite\ lateral\ esquerdo.\ Portanto, só\ podemos\ calcular\ \lim_{x\to 3^+}f(x).$

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{\overbrace{x}^{\substack{3\\\uparrow}}}{\underbrace{\sqrt{x^2+x-12}}_{\substack{\downarrow\\0^+}}}=+\infty$$

$* \; Logo, a \; reta \; x = 3$ é $uma \; assíntota \; vertical \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

$-Horizontais$: $Dizemos \; que \; a \; reta \; y = a$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; se \; ocorrer \; um \; dos \; seguintes \; casos,$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \qquad ou \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-12}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+x-12}}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x-12}}{\sqrt{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 1}{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 1}{\sqrt{\lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{12}{x^2}}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+0-0}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$* \; Obs: se \; x \to +\infty \,, então \; |x| = x \;.\; |x| = \sqrt{x^2}$

$-Logo, a \; reta \; y = 1$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-12}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+x-12}}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2+x-12}}{\sqrt{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to-\infty} -1}{\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to-\infty} -1}{\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{12}{x^2}}} =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+0-0}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

$* \; Obs: se \; x \to +\infty \,, então \; |x| = x \;.\; |x| = \sqrt{x^2}$

$-Logo, a \; reta \; y = -1$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

3.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \le 2 \\ \dfrac{2x^2+4x-16}{x^2-x-2}, & 2 < x < 5 \\ bx + 2a + 1, & x \ge 5 \end{cases}$$

$* \; f$ é $uma \; função \; sentencial \; composta \; por \; funções \; polinomiais \; e, portanto, contínuas \; em \; seus \; domínios. Com \; isso, para \; quaisquer \; valores \; de \; a \; e \; b \; já \; temos \; que \; f$ é $contínua \; em \; (-\infty, 2) \cup (5, +\infty). Analisando \; a \; segunda \; sentença, uma \; função \; polinomial \; racional, temos:$

$$g(x) = \frac{2x^2+4x-16}{x^2-x-2} = \frac{2(x^2+2x-8)}{(x-2)(x+1)} = \frac{2(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$-Logo, D(g) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}\;;$

$* \; Como \; esta \; sentença \; predomina \; no \; intervalo \; aberto \; (2,5), temos \; x - 2 \neq 0 \; para \; qualquer \; x \in (2,5). Logo, podemos \; reescrever \; a \; segunda \; sentença \; da \; seguinte \; forma:$

$$\frac{2x^2+4x-16}{x^2-x-2} = \frac{2(x+4)}{(x+1)}$$

$* \; Como \; x = -1 \; e \; x = 2 \; não \; pertencem$ à $esta \; sentença, temos \; que \; f$ é $contínua \; em \; (2,5). Logo, f$ é $contínua \; em (-\infty, 2) \cup (2,5) \cup (5, +\infty).$

$* \, Vamos \; verificar \; as \; condições \; para \; que \; f \; seja \; contínua \; nos \; pontos \; onde \; há \; mudança \; de \; comportamento \; da \; função.$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leq 2 \\ \dfrac{2(x+4)}{(x+1)}, & 2 < x < 5 \\ bx + 2a + 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

$-Em \; x = 2:$

$1) \; f(2) = 2^2 + a(2) + b; \;\; f(2) = 2a + b + 4.$

$$2) \; \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{2(x+4)}{(x+1)} = \frac{2(2+4)}{(2+1)} = \frac{2(6)}{(3)} = \frac{12}{3} = 4.$$

$$3) \; \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 4 = 2a + b + 4 \;\Rightarrow 2a + b = 0 \;\; (I)$$

$-Em \; x = 5:$

$1) \; f(5) = b(5) + 2a + 1 \;; \;\; f(5) = 2a + 5b + 1.$

$$2) \; \lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} \frac{2(x+4)}{(x+1)} = \frac{2(5+4)}{(5+1)} = \frac{2(9)}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

$$3) \lim_{x \to 5^-} f(x) = f(5) \Rightarrow 3 = 2a + 5b + 1 \Rightarrow 2a + 5b = 2 \; (II)$$

$* \; Com \; equações \; I \; e \; II, temos:$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 2a + 5b = 2 \end{cases} \to \begin{cases} 2a + b = 0 \\ \quad\;\; 4b = 2 \end{cases} \to \;\; b = \frac{1}{2} \,; a = -\frac{1}{4}.$$

$* \; Com \; a = -\dfrac{1}{4} \;\; e \; b = \dfrac{1}{2} \; temos \; que \; f \; é \; contínua \; em \; x = 2 \; e \; x = 5 \; e, portanto, f \; é \; contínua \; nos \; reais.$

4.

$a) \; f(x) = \dfrac{1}{x} \;\; e \; g(x) = x^2 \,; \;\;\; coeficiente \; angular \; das \; retas \; tangentes \; no \; ponto \; de \; interseção \; entre \; as \; curvas.$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = x^2 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} \;\; \therefore x = 1.$$

$* \; Ponto \; de \; interseção: \; (1,1).$

$* \; O \; coeficiente \; angular \; das \; retas \; tangentes \; às \; curvas \; é \; o \; valor \; da \; função \; derivada \; no \; ponto \; x = 1. Logo,$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = \frac{-1}{x(x+0)} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \;; \;\; f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1 \; (coeficiente \; angular \; da \; reta \; tangente \; à \; f)$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

$$g'(x) = 2x \;\;\; ; \;\;\; g'(1) = 2.(1) = 2 \;\; (coeficiente \; angular \; da \; reta \; tangente \; à \; g)$$

$* \; Dado \; os \; coeficientes \; angulares \; de \; duas \; retas \; o \; ângulo \; \alpha \; formado \; entre \; elas \; é$

$dado\ pela\ seguinte\ expressão:$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

$*\ Onde, m_1\ e\ m_2\ são\ os\ coeficientes\ angulares\ das\ retas, que\ são\ os\ valores\ de\ f'(1)\ e\ g'(1). Logo,$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{f'(1) - g'(1)}{1 + f'(1) \cdot g'(1)}\right|$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{-1 - 2}{1 + (-1) \cdot (2)}\right|$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{-3}{-1}\right|$$
$$\operatorname{tg}\alpha = 3 \therefore \alpha = \operatorname{arctg}(3)$$

$b)\ Suponha\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ um\ intervalo\ fechado\ [a, b]\ e\ seja\ N\ um\ número\ qualquer\ entre\ f(a)\ e\ f(b), onde\ f(a) \neq f(b). Então\ existe\ um\ número\ c\ em\ (a, b)\ tal\ que\ f(c) = N.$

5.

$$f(x) = |x^2 - 4|$$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq -2\ ou\ x \geq 2 \\ -(x^2 - 4), & -2 < x < 2 \end{cases}$$

$*\ Seja\ \Delta x\ tal\ que\ x^2 + \Delta x - 4 > 0;$
$*\ Consequentemente, para\ x \leq -2\ ou\ x \geq 2\ temos:$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 4 - (x^2 - 4)}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 4 - x^2 + 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

$*\ Seja\ \Delta x\ tal\ que\ x^2 + \Delta x - 4 < 0;$
$*\ Consequentemente, para - 2 < x < 2\ temos:$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x + \Delta x)^2 + 4 - (-x^2 + 4)}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 + 4 + x^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-2x - \Delta x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (-2x - \Delta x) = -2x.$$

$Logo, uma\ expressão\ para\ f'\ é:$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < -2\ \ ou\ \ x > 2 \\ -2x, & -2 < x < 2 \end{cases}$$

$*\ Com\ isso, temos\ que\ f\ é\ diferenciável\ em\ (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$
$Vamos\ verificar\ se\ f\ é\ derivável\ em\ x = -2\ e\ em\ x = 2:$
$-Em\ x = -2:$
$f'_{-}(-2) = 2.(-2) = -4. \quad ; \quad f'_{+}(-2) = -2.(-2) = 4.$
$*\ Logo, f\ não\ é\ derivável\ em\ x = -2.$
$-Em\ x = 2:$

$f'_{-}(2) = -2.(2) = -4.$; $f'_{+}(2) = 2.(2) = 4.$

$* \, Logo, f$ não é $derivável \; em \; x = 2.$

$* \, Portanto, f$ é $diferenciável \; em \; (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$

5.3 2ª Avaliação-07 de Outubro de 2010

1.
$x^2 + y^2 = 2 \quad e \quad y = x^2$;
1) A $interseção\ entre\ as\ curvas$:
$*\ Obs: note\ que\ y = x^2 \Rightarrow y \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$
$*\ Substituindo\ y = x^2\ na\ expressão\ da\ curva, temos$:

$$x^2 + y^2 = 2$$
$$y + y^2 = 2$$
$$y^2 + y - 2 = 0$$
$$\Delta = 1 + 8 = 9$$
$$y = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow y = 1\ ou\ y = -2$$

$\rightarrow Lembre\ da\ observação\ acima!\ Logo, y = 1\ é\ a\ solução\ do\ sistema.$
$*\ Para\ y = 1, temos$:
$y = x^2 \rightarrow 1 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \therefore x = 1\ e\ x = -1.$
$*\ Pontos\ de\ interseção:\ (-1, 1)\ e\ (1, 1).$

2) $Retas\ tangentes\ à\ curva\ x^2 + y^2 = 2\ nos\ pontos\ de\ interseção.$
$*\ Por\ derivação\ implícita, temos$:
$2x + 2yy' = 0 \rightarrow y' = -\frac{x}{y}$;
$*\ No\ ponto\ (-1, 1)$:
$y' = -\frac{(-1)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$
$-Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (-1, 1)$:

$$y - 1 = 1\big(x - (-1)\big)$$
$$y - 1 = x + 1$$
$$y = x + 2$$

$*\ No\ ponto\ (1, 1)$:
$y' = -\frac{1}{1} = -1.$
$-Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (1, 1)$:

$$y - 1 = -1(x - 1)$$
$$y - 1 = -x + 1$$
$$y = -x + 2$$

3)$Interseções\ entre\ as\ retas, e\ a\ interseção\ das\ retas\ com\ o\ eixo\ x$:
$-Interseção\ entre\ as\ retas$:
$x + 2 = -x + 2 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0.$
$Para\ x = 0, y = 2.\ \ Ponto\ (0, 2).$
$-Interseção\ com\ o\ eixo\ x\ (y = 0)$:

$$\begin{array}{ll} y = x + 2 & \qquad y = -x + 2 \\ 0 = x + 2 & \qquad 0 = -x + 2 \\ x = -2 & \qquad x = 2 \end{array}$$

$*\ Pontos\ (-2, 0)\ e\ (2, 0)$

4) $Área\ do\ triângulo\ formado\ entre\ as\ retas\ e\ o\ eixo\ x$:

$$Área = \frac{1}{2} b.h = \frac{1}{2}\big(2-(-2)\big).(2) = 4\ u.A$$

2.

$a)\ f(x) = \dfrac{e^{5x+2}}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$; $\quad$ *determinar* $f'(0)$.

$$f'(x) = \frac{(5.e^{5x+2}).\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - (e^{5x+2}).\sec^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$f'(0) = \frac{(5.e^{5.0+2}).\operatorname{tg}\left(0+\frac{\pi}{4}\right) - (e^{5.0+2}).\sec^2\left(0+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(0+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{5.e^2.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - e^2.\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{5.e^2.1 - e^2.2}{1}$$

$$f'(0) = 5e^2 - 2e^2 = 3e^2.$$

$b)\ \lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$; $\quad$ *tome* $t=-2x \to x = -\dfrac{t}{2}$; *se* $x\to 0$ *então* $t \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{2}{t}} = \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-2} = \left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-2} = e^{-2}.$$

$*\ Obs$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, *ou ainda* , $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

3.

$a)\ f(x) = x^{\ln h(x)}$; $\ x>0\ $ e $\ h(1)=e$. *Encontrar* $f'(1)$.

$*$ *Por diferenciação logarítmica, temos*:

$$\ln f(x) = \ln h(x)\cdot \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{h'(x)}{h(x)}\cdot \ln x + \ln h(x)\cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x)\cdot\left[\frac{h'(x)}{h(x)}\cdot \ln x + \ln h(x)\cdot \frac{1}{x}\right]$$

$$f'(x) = x^{\ln h(x)}\cdot\left[\frac{h'(x)}{h(x)}\cdot \ln x + \ln h(x)\cdot \frac{1}{x}\right]$$

$$f'(1) = 1^{\ln h(1)}\cdot\left[\frac{h'(1)}{h(1)}\cdot \ln 1 + \ln h(1)\cdot \frac{1}{1}\right]$$

$$f'(1) = 1^{\ln e}\cdot\left[\frac{h'(1)}{e}\cdot 0 + \ln e\right]$$

$$f'(1) = 1\cdot[0+1]$$

$$f'(1) = 1.$$

$b)\ f(x) = \dfrac{1}{x}$; $\quad$ *mostrar que* $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$;

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $\quad f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$; $\quad f'''(x) = -\dfrac{6}{x^4}$; $\ f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$.

$*$ *Note, que as derivadas ímpares possuem o sinal negativo*; *o denominador* é

$uma\ potência\ de\ x\ que\ cresce\ na\ forma\ (n+1); o\ numerador\ apresenta\ a$
$seguinte\ sequência: 1, 2, 6, 24 \dots\ \ que\ ao\ prestar\ atenção$ é $a\ ordem\ dos\ n!\ (fatorial)$
$Dessa\ forma, temos:$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n . n!}{x^{n+1}}$$

$\rightarrow Mostrando\ que\ essa\ expressão$ é $valída, tomemos\ n = 1\ e\ n = 2$.
$*\ Para\ n = 1, temos:$

$$f'(x) = \frac{(-1)^1 . 1!}{x^{1+1}} = -\frac{1}{x^2}$$

$*\ Para\ n = 2, temos:$

$$f'(x) = \frac{(-1)^2 . 2!}{x^{2+1}} = \frac{2}{x^3}$$

$*\ Logo, a\ expressão\ condiz\ com\ os\ resultados\ e, portanto,$ é $verdadeira!$
4.
$a)\ y = \operatorname{arccotg}(2^x) \quad ; reta\ tangente\ em\ x = 0.$
$*\ Para\ x = 0, y = \operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}.$

$y' = 2^x \cdot \ln(2) \cdot \left(-\frac{1}{1+2^{2x}}\right)$

$y'(0) = 2^0 \cdot \ln(2) \cdot \left(-\frac{1}{1+2^0}\right)$

$y'(0) = \ln(2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$y'(0) = -\ln(2)^{\frac{1}{2}} \ \ ou \ \ y'(0) = \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$

$*\ Equação\ da\ reta\ tangente\ em\ \left(0, \frac{\pi}{4}\right):$

$$y - \frac{\pi}{4} = \ln\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 0)$$

$$y = x \cdot \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}$$

$b)\ y = \cos(3x)\ ; \quad y^{(4)} + my = 0\ ; determinar\ m.$
$y' = -3\operatorname{sen}(3x)\ ; \quad y'' = -9\cos(3x) \quad ; \quad y''' = 27\operatorname{sen}(3x)\ ; \quad y^{(4)} = 81\cos(3x).$

$81\cos(3x) + m.\cos(3x) = 0 \rightarrow \cos(3x)\,[81 + m] = 0$
$*\ 81 + m = 0\ \therefore m = -81.$

5.

$a)\ \lim_{x\to1}\frac{\operatorname{sen}(x^3-1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\operatorname{sen}(x^3-1)}{x-1}\cdot\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} = \lim_{x\to1}\frac{\operatorname{sen}(x^3-1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)$

$= \lim_{x\to1}\frac{\operatorname{sen}(x^3-1)}{x^3-1} \times \lim_{x\to1}(x^2+x+1)\ ;$

$*\ Obs:$ $só\ podemos\ dizer\ que\ o\ limite\ de\ um\ produto$ é $o\ produto\ dos\ limites\ se$
$esses\ limites\ existem!$
$-Calculando\ o\ limite\ do\ primeiro\ fator, temos:$

$\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{sen}(x^3-1)}{x^3-1}\ ; \ \ façamos\ \theta = x^3 - 1\ , então\ se\ x \rightarrow 1, \theta \rightarrow 0. Logo,$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^3-1)}{x^3-1}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}=1.$$

$-Calculando\ o\ limite\ do\ segundo\ fator, temos:$

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}1=1^2+1+1=3.$$

$*\ Portanto,$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^3-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^3-1)}{x^3-1}\times\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1\times 3=3.$$

$b)$ $\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos^2 t-1}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}^2 t}{t}=\lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot\operatorname{sen} t\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} t}{t}\times\lim_{t\to 0^+}\operatorname{sen} t$
$=-1\times 0=0.$

5.4 2ª Avaliação-08 de Outubro de 2010

1.

$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(\ln x)}{\ln x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(\ln x)}{2.\ln x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(\ln x)}{\ln x}\ ;$

$*\ Façamos\ a\ substituição\ \ln x=\theta\ e, se\ x\to 1\ então\ \theta\to 0. Logo,$

$\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(\ln x)}{\ln x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}(\theta)}{\theta}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

$b)\ f(x)=\pi^{x.\text{tg}\,x}\ ;\ \ determinar\ f'(x).$

$*\ Sejam\ u=x.\text{tg}\,x\ \ e\ y=f(u)=\pi^u.$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du}$$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=(\text{tg}\,x+x.\sec^2 x)\cdot\pi^u\cdot\ln(\pi)$$

$$f'(x)=(\text{tg}\,x+x.\sec^2 x)\cdot\pi^{x.\text{tg}\,x}\cdot\ln(\pi)$$

2.

$a)\ x^2+y^2=4\ ;\quad reta\ x+y=2.$

$*\ Coeficiente\ angular\ da\ reta\ em\ questão: y=-x+2.\ \ m=-1.$

$*\ Encontrar\ os\ pontos\ da\ curvar\ x^2+y^2=4\ onde\ y'=-1.$

$-Por\ derivação\ implícita, temos:$

$2x+2yy'=0\to y'=-\frac{x}{y}\ \ ;\ \ y'=-1\Rightarrow -\frac{x}{y}=-1\ \therefore\ x=y$

$*\ Substituindo\ a\ expressão\ x=y\ na\ curva, temos:$

$x^2+x^2=4\to 2x^2=4\to x^2=2\to x=\pm\sqrt{2}$

$-Portanto, os\ pontos\ onde\ a\ reta\ tangente\ é\ paralela\ à\ reta\ x+y=2\ são$
$os\ pontos\ \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\ e\ \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right).$

$b)\ x^2-\log^2(y+1)=0\ \ ;\ \ equação\ da\ reta\ normal\ no\ ponto\ (1,9).$

$-Por\ derivação\ implícita, temos:$

$$2x-2\log(y+1)\cdot y'\cdot\frac{1}{(y+1)\cdot\ln(10)}=0$$

$$y'=\frac{x\cdot(y+1)\cdot\ln(10)}{\log(y+1)}$$

$*\ Calculando\ o\ valor\ de\ y'\ no\ ponto\ (1,9):$

$$y'=\frac{1\cdot(9+1)\cdot\ln(10)}{\log(9+1)}=\frac{10.\ln(10)}{\log 10}=10.\ln(10)$$

$*\ Logo, o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal\ é:$

$$m_n=-\frac{1}{y'}=-\frac{1}{10.\ln(10)}$$

$-Equação\ da\ reta\ normal\ no\ ponto\ (1,9):$

$y-9=-\frac{1}{10.\ln(10)}(x-1)$

$y=-\frac{x}{10.\ln(10)}+\frac{1}{10.\ln(10)}+9\ , ou\ ainda,$

$$y = \frac{-x + 90.\ln(10) + 1}{10.\ln(10)}$$

3.
$a)\ f(x) = (x^2+1)^{\cos x}\ ;\ \ determinar\ f'(x).$
$\ln f(x) = \cos x \cdot \ln(x^2+1)$
$*\ Por\ diferenciação\ logarítmica, temos:$
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (-\operatorname{sen} x)\cdot \ln(x^2+1) + \cos x \cdot \frac{2x}{x^2+1}$$
$$f'(x) = f(x)\cdot\left[(-\operatorname{sen} x)\cdot \ln(x^2+1) + \cos x \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right]$$
$$f'(x) = (x^2+1)^{\cos x}\cdot\left[(-\operatorname{sen} x)\cdot \ln(x^2+1) + \cos x \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right]$$

$b)\ f(x) = e^{2x}\ , mostrar\ que\ f(0) + f'(0) + f''(0) + \cdots + f^{(n)}(0) = 2^{n+1} - 1.$
$*\ Vamos\ calcular\ os\ valores\ de\ alguns\ desses\ termos:$
$f(0) = e^0 = 1.$
$f'(x) = 2.e^{2x} \to f'(0) = 2.e^0 = 2.1 = 2.$
$f''(x) = 4.e^{2x} \to f''(0) = 4.e^0 = 4.1 = 4.$
$f'''(x) = 8.e^{2x} \to f'''(0) = 8.e^0 = 8.1 = 8.$
$-Logo, temos\ a\ seguinte\ sequência : (1, 2, 4, 8, \ldots)$
$*\ Como\ n\ indica\ a\ ordem\ da\ derivada, vamos\ analisar\ a\ sequência\ a\ partir\ de$
$f'(0), ou\ seja, a\ sequencia\ (2, 4, 8, \ldots).$
$*\ Essa\ sequência\ é\ uma\ progressão\ geométrica\ de\ razão\ q = 2\ e\ a_1 = 2.$
$A\ soma\ dos\ n\ primeiros\ termos\ dessa\ P.G\ é\ dada\ pela\ expressão\ abaixo:$
$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$
$$S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2}$$
$$S_n = -2(1-2^n)$$
$$S_n = 2^{n+1} - 2$$
$*\ Note\ que\ esta\ soma\ é\ referente\ à\ sequencia\ (2, 4, 8, \ldots), falta\ somarmos\ à\ f(0).$
$Logo,$
$$f(0) + f'(0) + f''(0) + \cdots + f^{(n)}(0) = S_n + f(0)$$
$$f(0) + f'(0) + f''(0) + \cdots + f^{(n)}(0) = 2^{n+1} - 2 + 1$$
$$f(0) + f'(0) + f''(0) + \cdots + f^{(n)}(0) = 2^{n+1} - 1$$

4.
$a)\ f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x\ ; mostrar\ que\ [f^{-1}(y)]' = \dfrac{1}{f'(x)}$
$*\ Sabemos\ que\ f^{-1}\circ f(x) = x\ . Aplicando\ a\ Regra\ da\ Cadeia, obtemos\ que$
$(f^{-1})'\big(f(x)\big)\cdot f'(x) = 1, daí\ \ (f^{-1})'(y)\cdot f'(x) = 1 \to (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}.$

$b)\ f(x) = \sqrt[3]{x-1}\ \ ; usando\ o\ item\ anterior!$
$\Rightarrow Invertendo\ a\ função:$
$y = f(x) = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow x = f^{-1}(y) = y^3 + 1\ . Assim, (f^{-1})'(y) = 3y^2.$

$Sabemos\ que\ (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}. Logo,$

$$3y^2 = \frac{1}{f'(x)} \to f'(x) = \frac{1}{3y^2}\ ; Mas, y = f(x) = \sqrt[3]{x-1}\,. Assim,$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

5.

$y = e^{-\operatorname{arctg} x}\ ; reta\ tangente\ no\ ponto\ em\ que\ x = a.$

$*\ Interseção\ da\ reta\ com\ o\ eixo\ x$ é $(b, 0). Mostrar\ que\ b = a^2 + a + 1.$

$1) Para\ x = a, temos\ y = e^{-\operatorname{arctg} a}.\quad ponto\ de\ tangencia\ (a, e^{-\operatorname{arctg} a})$

$2)\ Inclinação\ da\ reta\ \big(y'(a)\big):$

$$y' = -\frac{1}{1+x^2} \cdot e^{-\operatorname{arctg} x}$$

$$y'(a) = -\frac{1}{1+a^2} \cdot e^{-\operatorname{arctg} a}$$

$3)\ Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (a, e^{-\operatorname{arctg} a}):$

$$y - e^{-\operatorname{arctg} a} = -\frac{1}{1+a^2} \cdot e^{-\operatorname{arctg} a}(x - a)$$

$*\ Obs$: não é $necessário\ arrumar\ a\ equação\ da\ reta!\ Lembre\ que\ a\ interseção$ $com\ o\ eixo\ x\ se$ dá $em\ y = 0\ no\ ponto\ (b, 0). Substituindo\ na\ equação, temos:$

$$0 - e^{-\operatorname{arctg} a} = -\frac{1}{1+a^2} \cdot e^{-\operatorname{arctg} a}(b - a)$$

$$-e^{-\operatorname{arctg} a} = -\frac{1}{1+a^2} \cdot e^{-\operatorname{arctg} a}(b - a)$$

$$1 = \frac{1}{1+a^2}(b - a)$$

$$1 + a^2 = b - a$$

$$\therefore b = a^2 + a + 1$$

5.5 3ª Avaliação-12 de Novembro de 2010

1.

$a)\ y = e^{\text{tgh}(3x)}\ ;\ equação\ da\ reta\ normal\ em\ x = 0\ e\ a\ interseção\ com\ o\ eixo\ x.$

$y' = 3.\text{sech}^2(3x)\,.\,e^{\text{tgh}(3x)}$

$y'(0) = 3.\text{sech}^2(0)\,.\,e^{\text{tgh}(0)}$

$y'(0) = 3.1.e^0$

$y'(0) = 3$

$*\ Logo, o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal$ é:

$$m_n = -\frac{1}{y'(0)} = -\frac{1}{3}.$$

$-Equação\ da\ reta\ normal$:

$$y - y(0) = m_n(x - 0)$$
$$y - e^{\text{tgh}(0)} = -\frac{1}{3}x$$
$$y - 1 = -\frac{1}{3}x$$
$$y = -\frac{1}{3}x + 1$$

$-Interseção\ com\ o\ eixo\ x\ (y = 0)$:

$0 = -\frac{1}{3}x + 1 \rightarrow \frac{1}{3}x = 1 \therefore x = 3\,.\ \ Interseção\ \ (3,0).$

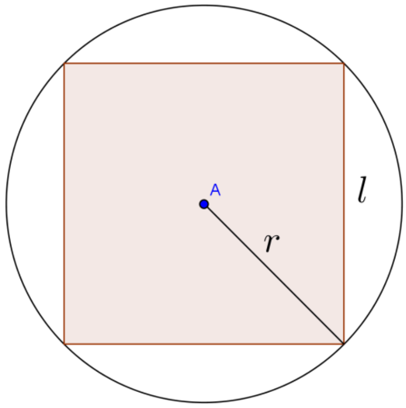
$b)\ f(x) = \text{senh}(x)\ \ não\ pode\ possuir\ mais\ de\ uma\ raíz\ real.$

$*\ Vamos\ supor\ que\ f\ tenha\ duas\ raízes\ a\ e\ b, com\ f(a) = f(b) = 0\ com\ a \neq b.$
$A\ função\ seno\ hiperbólico$ é $uma\ função\ contínua\ em\ [a,b]\ e\ diferenciável$
$em\ (a,b). Pelo\ Teorema\ de\ Rolle, existe\ algum\ x \in (a,b)\ tal\ que\ f'(x) = 0.$
$f'(x) = \cosh(x)\,.\,Sabemos\ que\ a\ função\ \ \cosh x \geq 1\ \forall x \in \mathbb{R}\ e, portanto, não$
$possui\ raíz\ real. Consequentemente, temos\ que\ f(x) = \text{senh}(x)\ \ não\ pode$
$possuir\ mais\ de\ uma\ raíz\ real.$

2.

$*\ A\ área\ de\ um\ círculo\ decresce\ à\ taxa\ de\ 1m^2/s.$

$-Determinar\ a\ taxa\ de\ decrescimento\ da\ área\ de\ um\ quadrado\ inscrito\ neste\ círculo.$



$1)\ A_{Círculo} = \pi.r^2\ \ ;\ \ \ A_{Quadrado} = l^2\ \ ;\ \ \ l = r\sqrt{2}$

$*\ A_{Quadrado} = 2r^2$

$$\frac{dA_C}{dt} = 1m^2/s$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$
$$1 = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi r}$$
$\rightarrow$ *Usando essa informação com a expressão da área do quadrado, temos:*
$$\frac{dA_Q}{dt} = \frac{dA_Q}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dA_Q}{dt} = 4r \cdot \frac{1}{2\pi r}$$
$$\frac{dA_Q}{dt} = \frac{2}{\pi} m^2/s$$
$*$ *Portanto, a área do quadrado decresce à taxa de* $\frac{2}{\pi} m^2/s$.

3.
a) Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:
1. f *é contínua no intervalo fechado* $[a, b]$;
2. f *é diferenciável no intervalo aberto* (a, b);
Então existe um número c em (a, b) *tal que*
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
b) Mostrar que $2\,\text{arcsen}(x) - \text{arccos}(1 - 2x^2) = 0$ *, para todo x tal que* $|x| \leq 1$.
$*$ *Obs: esse item possui um equívoco!*
$2\,\text{arcsen}(x) - \text{arccos}(1 - 2x^2) = 0$, *para todo x tal que* $0 \leq x \leq 1$.
$*$ *Provaremos isso no decorrer da resolução!*
$\rightarrow$ *A questão faz referência ao corolário citado a seguir:*
"*Se* $f'(x) = g'(x)$ *para todo x em um intervalo* (a, b), *então* $f - g$ *é constante em* (a, b); *isto é,* $f(x) = g(x) + c$, *onde c é uma constante.*"
$*$ *Considere* $f(x) = 2\,\text{arcsen}(x)$ *e* $g(x) = \text{arccos}(1 - 2x^2)$ *, então temos:*
$f(x) - g(x) = 0$, *ou ainda,* $f(x) = g(x) + 0$ *(em concordância com o corolário)*

1) *Quando o enunciado afirma para todo x tal que* $|x| \leq 1$, *quer dizer que* $-1 \leq x \leq 1$. *Vamos analisar o domínio das funções f e g, primeiramente.*
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$, *ou ainda,* $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$
$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1\}$
$*$ *Resolvendo a inequação em g, temos:*
$$-1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1$$
$$-2 \leq -2x^2 \leq 0$$
$$1 \leq x^2 \leq 0$$
$$-1 \leq x \leq 1$$
$$|x| \leq 1$$
$*$ *Temos* $D(f) = D(g)$.
2) *Façamos a igualdade* $f'(x) = g'(x)$.
$$f'(x) = g'(x)$$

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{(-4x)}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}}$$
$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x}{\sqrt{1-1+4x^2-4x^4}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{4x^2-4x^4}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x}{2|x|\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$
$* \, Agora, observe \; a \; igualdade \; com \; atenção!$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \frac{x}{|x|} = 1$$
$* \, Assim, temos: |x| = x \;\Rightarrow x \geq 0.$
$-Logo, para \; x \geq 0 \; temos \; 2\,\mathrm{arcsen}(x) - \mathrm{arccos}(1-2x^2) = 0 \; e, como \; o \; domínio$
$das \; funções \; se \; restringe \; em -1 \leq x \leq 1\;, então$
$$2\,\mathrm{arcsen}(x) - \mathrm{arccos}(1-2x^2) = 0\;, para \; todo \; x \; tal \; que \; 0 \leq x \leq 1$$

$4. \, f(x) = |x^2 - 8x + 12| \;; Determinar \; os \; máximos \; e \; mínimos \; absolutos \; e \; locais$
$no \; intervalo \; fechado \; [0,5].$
$x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6);$
$+ + + + + + + (\,2\,) - - - - - - - - - - (\,6\,) + + + + + + \quad x^2 - 8x + 12$

$* \, Com \; essa \; análise, temos:$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 12, & x \leq 2 \; ou \; x \geq 6 \\ -x^2 + 8x - 12, & 2 < x < 6 \end{cases}$$
$* \, Logo, uma \; expressão \; para \; f'(x) \; é:$
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 8, & x < 2 \; ou \; x > 6 \\ -2x + 8, & 2 < x < 6 \end{cases}$$
$-Pelo \; Método \; do \; Intervalo \; Fechado, temos:$
$1) \; Os \; valores \; de \; f \; nos \; extremos \; do \; intervalo:$
$f(0) = 0^2 - 8.0 + 12 = 0 - 0 + 12 = 12.$
$f(5) = -5^2 + 8.5 - 12 = -25 + 40 - 12 = 3.$

$2) \; Os \; valores \; de \; f \; nos \; números \; críticos \; pertencentes \; ao \; intervalo:$
$* \, Um \; número \; crítico \; de \; uma \; função \; f \; é \; um \; número \; c \; no \; domínio \; de \; f \; onde \; ou$
$f'(c) = 0 \; ou \; f'(c) \; não \; existe.$
$-Analisando \; as \; sentenças \; de \; f'(x), temos:$
$2x - 8 = 0 \rightarrow 2x = 8 \therefore x = 4.$
$Obs: x = 4 \; não \; pertence \; ao \; domínio \; desta \; sentença!$
$-2x + 8 = 0 \rightarrow 2x = 8 \therefore x = 4. (pertence \; ao \; domínio \; da \; sentença!!!)$
$* \, Portanto, x = 4 \; é \; um \; número \; crítico \; de \; f.$
$f(4) = -4^2 + 8.4 - 12 = -16 + 32 - 12 = 4.$
$-Vamos \; verificar \; se \; f'(2) \; existe, pois \; x = 2 \; é \; um \; ponto, no \; intervalo \; [0,5],$
$onde \; há \; mudança \; de \; comportamento \; da \; função. Logo,$
$f'_{-}(2) = 2.2 - 8 = 4 - 8 = -4$

$f'_+(2) = -2.2 + 8 = -4 + 8 = 4.$
$*\ Logo, não\ existe\ f'(2)\ e, portanto, x = 2$ é $um\ número\ crítico\ de\ f.$
$f(2) = 0.$

3) $Com\ \ a\ análise\ das\ etapas\ 1\ e\ 2, concluímos\ que$:
$f(2)$ é $o\ valor\ mínimo\ absoluto\ e\ local$;
$f(0)$ é $o\ valor\ máximo\ absoluto$;
$f(4)$ é $o\ valor\ maxímo\ local$;
$*\ Obs: f(5)$ não é $nem\ máximo\ nem\ mínimo\ local, pois\ ocorre\ no\ extremo\ do\ intervalo.$

5.
$r = 20cm\ \ ; Estimar\ o\ volume\ da\ esfera\ para\ \ r = 20cm + 0{,}1cm.$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$Sobre\ diferenciais\ temos$:
$$dV = V'(r).dr\ \ e\ \Delta V = V(r + dr) - V(r)$$
$Sabemos\ que\ em\ diferenciais\ dV \cong \Delta V, então$:
$$V(r + dr) - V(r) \cong V'(r).dr$$
$Se\ queremos\ V(20 + 0{,}1)\ temos\ que\ r = 20\ e\ \ dr = 0{,}1, logo$:
$$V(20 + 0{,}1) - V(20) \cong 4\pi.(20)^2.(0{,}1)$$
$$V(20{,}1) - \frac{4}{3}\pi(20)^3 \cong 4\pi \cdot 400 \cdot 0{,}1$$
$$V(20{,}1) \cong 160\pi + \frac{32000\pi}{3}$$
$$V(20{,}1) \cong \frac{32480\pi}{3}cm^3$$

5.6 3ª Avaliação-13 de Novembro de 2010

1.

$elipse: \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \;\; ; parte\ do\ ponto\ (0,3)\ .$

$Quando\ a\ direção\ positiva\ do\ eixo\ y\ faz\ um\ ângulo\ de\ 45°\ com\ a\ reta\ que\ passa\ pelo\ corredor\ e\ pela\ origem, temos\ que\ a\ equação\ da\ reta\ que\ descreve\ esse\ momento\ é\ a\ reta\ y = x.$

$*\ Encontrando\ a\ posição\ do\ corredor\ nesse\ instante, temos:$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1 \to 25x^2 = 144 \to x = +\sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5};$$

$*\ A\ taxa\ com\ a\ qual\ o\ corredor\ se\ afasta\ do\ eixo\ y\ nesse\ instante\ é\ \dfrac{dx}{dt} = 16m/s$

$*\ Como\ x\ e\ y\ estão\ em\ função\ do\ tempo, podemos\ escrever\ a\ equação\ da\ elipse\ da\ seguinte\ forma:$

$$\frac{x(t)^2}{16} + \frac{y(t)^2}{9} = 1$$

$*\ Derivando\ implicitamente, obtemos:$

$$\frac{2.x(t).x'(t)}{16} + \frac{2y(t).y'(t)}{9} = 0$$

$$\frac{x(t).16}{16} = -\frac{y(t).y'(t)}{9}$$

$$x(t) = -\frac{y(t).y'(t)}{9}$$

$$\frac{12}{5} = -\frac{\frac{12}{5}.y'(t)}{9}$$

$$1 = -\frac{y'(t)}{9}$$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = -9m/s$$

$*\ O\ sinal\ negativo\ expressa\ que\ o\ corredor\ se\ aproxima\ do\ eixo\ x!$

2.

$a)\ f(x) = \cosh(x) \quad e\ g(x) = \operatorname{senh}(2x)\ \ ; encontrar\ a\ abscissa\ da\ interseção.$

$$\cosh(x) = \operatorname{senh}(2x)$$

$$\cosh(x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$$

$$\cosh(x)\,[1 - 2\operatorname{senh}(x)] = 0$$

$*\ Assim, temos\ o\ seguinte\ sistema:$

$$\begin{cases} \cosh(x) = 0 \\ 1 - 2\operatorname{senh}(x) = 0 \end{cases};$$

$*\ A\ primeira\ sentença\ não\ possui\ solução\ real, pois\ \cosh(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

$1 - 2\operatorname{senh}(x) = 0$

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{1}{2} \to \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^x - e^{-x} = 1$$

$*\ Seja\ e^x = y, e\ com\ isso, y > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$e^x - e^{-x} = 1$$

$$y - \frac{1}{y} = 1$$
$$y^2 - 1 = y$$
$$y^2 - y - 1 = 0$$
$$\Delta = 1 + 4 = 5$$
$$y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$* \; y = e^x \rightarrow x = \ln(y) \;\; \therefore x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

$b) \; y = \ln x \;\;$; *existe reta tangente paralela à reta que passa por* $(1, 0)$ *e* $(e, 1)$?

$*$ *Considere o intervalo* $(1, 2)$.

$*$ *Coeficiente angular da reta*:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}$$

$-$*Como* $y = f(x) = \ln x$ *é uma função contínua em* $[1, e]$ *e derivável em* $(1, e)$, *pelo Teorema do Valor Médio existe algum* $c \in (1, e)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}$$

$*$ *Queremos saber se este número* $c \in (1,2)$ *tal que* $f'(c) = \frac{1}{e - 1}$?

$y' = f'(x) = \frac{1}{x} \; ; \quad f'(c) = \frac{1}{e - 1}$

$f'(c) = \frac{1}{c} = \frac{1}{e - 1} \;\; \therefore c = e - 1$

$*$ *Note, que o valor* $(e - 1) \in (1, 2)$. *Logo, existe um ponto* $c = e - 1$ *tal que a reta tangente nesse ponto é paralela à reta que passa por* $(1, 0)$ *e* $(e, 1)$.

3.

$f(x) = 2\,\mathrm{sen}(x) + \cos(2x)$; *determinar os valors máximo e mínimos absolutos e locais, no intervalo* $|x| \leq \pi$, *ou seja*, $-\pi \leq x \leq \pi$.

$*$ *Pelo Método do Intervalo Fechado, temos*:

1) *Os valores de* f *nos extremos do intervalo*:

$f(-\pi) = 2\,\mathrm{sen}(-\pi) + \cos(-2\pi) = 2.0 + 1 = 0 + 1 = 1.$

$f(\pi) = 2\,\mathrm{sen}(\pi) + \cos(2\pi) = 2.0 + 1 = 0 + 1 = 1.$

2) *Os valores de* f *nos números críticos pertencentes ao intervalo*:

$*$ *Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe*.

$f'(x) = 2\cos(x) - 2\,\mathrm{sen}(2x)$

$f'(x) = 2\cos(x) - 4\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)$

$f'(x) = 2\cos(x)\,[1 - 2\,\mathrm{sen}(x)]$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\cos(x) = 0 \\ 1 - 2\,\mathrm{sen}(x) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \mathrm{sen}(x) = 1/2 \end{cases} ;$$

$\cos(x) = 0 \therefore x = -\frac{\pi}{2} \text{ e } x = \frac{\pi}{2} \;\; ;$

$$\text{sen}(x) = \frac{1}{2} \ \therefore \ x = \frac{\pi}{6} \quad e \quad x = \frac{5\pi}{6} \ ;$$

$* \ Calculando\ o\ valor\ de\ f\ nos\ números\ críticos, temos:$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\pi) = 2(-1) + (-1) = -2 - 1 = -3.$$
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) = 2(1) + (-1) = 2 - 1 = 1.$$
$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$3)\ Das\ etapas\ 1\ e\ 2, concluímos\ que:$
$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ é o valor mínimo absoluto;
$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ é o valor máximo absoluto e local;
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ é o valor mínimo local;

4.
$a)$ estimar o valor de $\sqrt[10]{e}$ usando diferenciais.
A função original para o cálculo é:
$$f(x) = e^x \ ; \quad f'(x) = e^x$$
Dos valores próximos a $e^{\frac{1}{10}}$, temos como valor conhecido e^0
Logo, queremos $f(0 + 0{,}1)$.
Sobre diferenciais temos:
$$dy = f'(x).dx \ \ e \ \Delta y = f(x + dx) - f(x)$$
Sabemos que em diferenciais $dy \cong \Delta y$, então:
$$f(x + dx) - f(x) \cong f'(x).dx$$
Se queremos $f(0 + 0{,}1)$ temos que $x = 0$ e $dx = 0{,}1$, logo:
$$f(0 + 0{,}1) - f(0) \cong e^0.(0{,}1)$$
$$f(0{,}1) - e^0 \cong 1.(0{,}1)$$
$$e^{\frac{1}{10}} \cong 0{,}1 + 1$$
$$\sqrt[10]{e} \cong 1{,}1$$

$b)\ f(x) = e^{\sinh(x^2-1)}$; determinar $f'(1)$.
$f'(x) = (2x)\cdot\cosh(x^2 - 1)\cdot e^{\sinh(x^2-1)}$
$f'(1) = 2\cdot\cosh(0)\cdot e^{\sinh(0)}$
$f'(1) = 2\cdot 1\cdot e^0$
$f'(1) = 2\cdot 1\cdot 1$
$f'(1) = 2.$

5.
$a)$ Enunciar o Teorema de Rolle;
Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:
1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$;

$2. f$ é $diferenciável\ no\ intervalo\ aberto\ (a,b);$
$3. f(a) = f(b)$
$Então\ existe\ algum\ c \in (a,b)\ tal\ que\ f'(c) = 0.$

$b)$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & se\ \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{2}{\pi}x + 2, & se\ \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$1)\ Mostrar\ que\ f(0) = f(\pi);$
$f(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$
$f(\pi) = -\dfrac{2}{\pi}.\pi + 2 = -2 + 2 = 0.$
$Logo, f(0) = f(\pi).$

$2)\ Uma\ expressão\ para\ f'(x):$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x), & se\ \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{2}{\pi}, & se\ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$* f'(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0 \therefore x = \dfrac{\pi}{2}; No\ entanto, \dfrac{\pi}{2}$ $não\ pertence\ ao\ domínio\ da\ sentença. Logo, não\ existe\ c \in (0,\pi)\ tal\ que\ f'(c) = 0.$
$-Por\ que\ isso\ não\ contradiz\ o\ Teorema\ de\ Rolle. Vejamos:$
$1)\ f$ é $contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [0,\pi]?$
$* f$ é $uma\ função\ sentencial\ composta\ por\ uma\ função\ trigonométrica\ e\ uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínuas\ em\ seus\ domínios. Logo, temos\ que\ f$ é $contínua\ em\ \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right). Vamos\ verificar\ se\ f$ é $contínua\ em\ x = \pi/2.$
$1.1)\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1\ ;$
$1.2)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(-\dfrac{2}{\pi}x + 2\right) = -\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2} + 2 = -1 + 2 = 1.$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\operatorname{sen}(x)) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$
$*\ Logo, \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\ = 1$
$1.3)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\ ; Assim, f$ é $contínua\ em\ x = \dfrac{\pi}{2}.$
$* Com\ isso, f$ é $contínua\ em\ (0,\pi).$

$1.4)\ Verificando\ a\ continuidade\ de\ f\ nos\ extremos:$

$f(0) = \operatorname{sen}(0) = 0\ ;$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen}(x)) = \operatorname{sen}(0) = 0$
$f(\pi) = -\dfrac{2}{\pi}.\pi + 2 = -2 + 2 = 0\ ;$
$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-}\left(-\dfrac{2}{\pi}x + 2\right) = -\dfrac{2}{\pi}.\pi + 2 = -2 + 2 = 0.$

$* \, Como \quad f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad e \quad f(\pi) = \lim_{x\to \pi^-} f(x)$, $temos\ que\ f$ é $contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [0,\pi]$.

2) f é $diferenciável\ em\ (0,\pi)$?

$* \, Pela\ expressão\ de\ f'(x)\ temos\ que\ f$ é $diferenciável\ em\ \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

$Vamos\ verificar\ se\ f$ é $diferenciável\ em\ x = \pi/2$.

$f'_{-}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

$f'_{+}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}$

$Como\ f'_{-}\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f'_{+}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $temos\ que\ f$ não é $diferenciável\ em\ x = \frac{\pi}{2}$.

$* \, Portanto, f$ não é $diferenciável\ em\ (0,\pi)$.

$* \, Por\ isso, o\ fato\ de$ não $existe\ um\ \ c \in (0,\pi)\ tal\ que\ f'(c) = 0$ não $contradiz\ o\ Teorema\ de\ Rolle$.

5.7 4ª Avaliação-10 de Dezembro de 2010

1.

$a)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{1/x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}};$

$*\ Calculando\ o\ limite\ do\ expoente\ usando\ a\ Regra\ de\ L'Hôspital:$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg} x}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sec^2 x}{2} = -\frac{\sec^2 0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

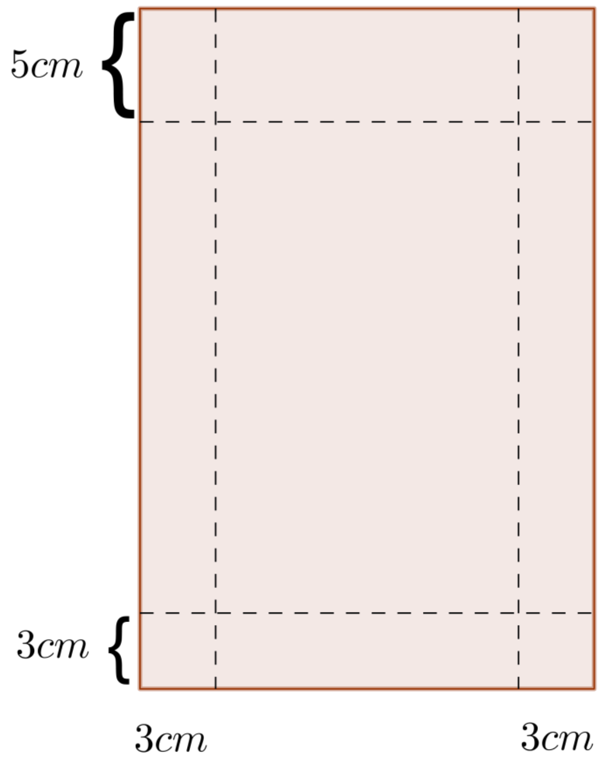
$Assim, temos:$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$b)\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{-\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x-1)}{\frac{\pi}{2}.\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sec^2(x-1)}{-\frac{\pi^2}{4}.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$= \frac{\sec^2(1-1)}{-\frac{\pi^2}{4}.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sec^2 0}{-\frac{\pi^2}{4}} = \frac{1}{-\frac{\pi^2}{4}} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

2.



$*\ Ilustração\ do\ problema!$

$*\ Sejam\ b\ e\ l\ as\ dimensões\ da\ cartolina, então\ temos:$

$$b.l = 900cm^2 \to l = \frac{900}{b}$$

$*\ A\ parte\ em\ que\ o\ texto\ será\ impresso\ é\ dada\ pela\ expressão:$

$A = (b - 6)(l - 8)$
$A = b.l - 8b - 6l + 48$
$A = 900 - 8b - 6l + 48$
$A = -8b - 6l + 948$

$$A = -8b - \frac{5400}{b} + 948$$

$$A(b) = -8b - \frac{5400}{b} + 948$$

$$A'(b) = -8 + \frac{5400}{b^2}$$

$* \, Fazendo \; A'(b) = 0, obtemos:$

$$-8 + \frac{5400}{b^2} = 0 \rightarrow b^2 = \frac{5400}{8} \rightarrow b^2 = 675 \rightarrow b = \sqrt{675} = 15\sqrt{3}cm$$

$$* \, Logo, temos \; l = \frac{900}{15\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}cm$$

$* \, Analisando \; o \; sinal \; de \; A'(b) \; para \; comprovar \; se \; teremos \; a \; máxima \; área \; de \; impressão:$

$$- - - - - - - - (-15\sqrt{3}) + + + + + + + + (\,15\sqrt{3}\,) - - - - \quad A'(b) = \frac{-8b^2+5400}{b^2}$$

$* \, Com \; essa \; análise, concluímos \; que \; temos \; um \; valor \; máximo \; absoluto \; em \; b = 15\sqrt{3}\,. Logo, obtemos \; a \; maior \; área \; impressa \; para \; as \; dimensões \; encontradas.$

3.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} + 1\,; f'(x) = -\frac{8x}{(x^2 - 4)^2} \quad e \quad f''(x) = \frac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3}.$$

$$+ + + + + + + + (-2) - - - - - - - - (\,2\,) + + + + + + \qquad x^2 - 4$$

$* \, Domínio \; da \; função: D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}.$
$a) \; Interseções \; com \; os \; eixos \; coordenados:$
$* \, Com \; o \; eixo \; y:$

$$f(0) = \frac{0^2}{0^2 - 4} + 1 = 0 + 1 = 1. \quad ponto \; (0, 1).$$

$* \, Com \; o \; eixo \; x:$

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x^2 - 4} + 1 = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x^2 - 4} = -1 \rightarrow x^2 = -x^2 + 4 \rightarrow 2x^2 = 4$$

$x^2 = 2 \;\therefore x = \pm\sqrt{2}$
$pontos: \; (-\sqrt{2}, 0) \; e \; (\sqrt{2}, 0).$

$b) \; Assíntotas:$
$-Verticais: Dizemos \; que \; a \; reta \; x = a \; é \; uma \; assíntota \; vertical \; se \; ocorrer \; um \; dos \; seguintes \; casos,$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$* \, Verificando \; nos \; pontos \; de \; descontinuidade \; da \; função, ou \; seja, em \; x = -2 \; e \; em \; x = 2.$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+}\left(\frac{x^2}{x^2-4}+1\right) = \lim_{x\to-2^+}\left(\frac{2x^2-4}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to-2^+}\frac{\overbrace{2x^2-4}^{\substack{4\\ \uparrow}}}{\underbrace{x^2-4}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = -\infty$$

$* \, Obs: se\ x \to -2^+, então\ x > -2\ e, portanto, x^2 - 4 \to 0^-$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-}\left(\frac{x^2}{x^2-4}+1\right) = \lim_{x\to-2^-}\left(\frac{2x^2-4}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to-2^-}\frac{\overbrace{2x^2-4}^{\substack{4\\ \uparrow}}}{\underbrace{x^2-4}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$

$* \, Obs: se\ x \to -2^-, então\ x < -2\ e, portanto, x^2 - 4 \to 0^+$

$-Logo, a\ reta\ x = -2$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x)$.

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}\left(\frac{x^2}{x^2-4}+1\right) = \lim_{x\to2^+}\left(\frac{2x^2-4}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to2^+}\frac{\overbrace{2x^2-4}^{\substack{4\\ \uparrow}}}{\underbrace{x^2-4}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$

$* \, Obs: se\ x \to 2^+, então\ x > 2\ e, portanto, x^2 - 4 \to 0^+$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}\left(\frac{x^2}{x^2-4}+1\right) = \lim_{x\to2^-}\left(\frac{2x^2-4}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to2^-}\frac{\overbrace{2x^2-4}^{\substack{4\\ \uparrow}}}{\underbrace{x^2-4}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = -\infty$$

$* \, Obs: se\ x \to 2^-, então\ x < 2\ e, portanto, x^2 - 4 \to 0^-$
$-Logo, a\ reta\ x = 2$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x)$.

$-Horizontais: Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-4}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2-4}{x^2}}{\frac{x^2-4}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} =$$

$$\frac{\lim_{x\to+\infty} 2 - \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}}{\lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}} = \frac{2-0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-4}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^2-4}{x^2}}{\frac{x^2-4}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{4}{x^2}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} =$$

$$\frac{\lim_{x\to-\infty} 2 - \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}}{\lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}} = \frac{2-0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2.$$

$-Logo, a\ reta\ y = 2$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x)$.

$c)$ *Crescimento e Decrescimento*:

$$f'(x) = -\frac{8x}{(x^2-4)^2}$$

$*$ *Analisando o comportamento (sinal) de* $f'(x)$:

$+ + + + + + + + + + + (\,0\,) - - - - - - - - - - -$ $\quad (-8x)$

$+ + + + (-2) + + + + + + + + + + (\,2\,) + + + +$ $\quad (x^2-4)^2$

$+ + + + (-2) + + + + (\,0\,) - - - (\,2\,) - - - -$ $\quad f'(x) = -8x/(x^2-4)^2$

$*$ *Da análise acima concluímos que*:
f é *crescente em* $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ *e*
f é *decrescente em* $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

$d)$ *Os valores máximos e mínimos locais*:

$*$ *Da análise de* $f'(x)$ *temos como números críticos* $-2, 0$ *e* 2 *pontos onde* $f'(x) = 0$ *e onde* $f'(x)$ *não existe*.

$*$ *No entanto*, $x = -2$ *e* $x = 2$ *não pertencem ao domínio de* f *e, portanto*, $x = 0$ é *o número crítico de* f.

$*$ *Em* $x = 0$, *analisando* f', *temos um ponto de máximo local. Logo*,

$$f(0) = \frac{0^2}{0^2-4} + 1 = 0 + 1 = 1. \quad \textit{ponto de máximo local}: (0, 1).$$

$e)$ *Concavidades e Pontos de Inflexão*:

$$f''(x) = \frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}$$

$*$ *Analisando o comportamento (sinal) de* $f''(x)$:

$+ +$ $\quad (24x^2+32)$

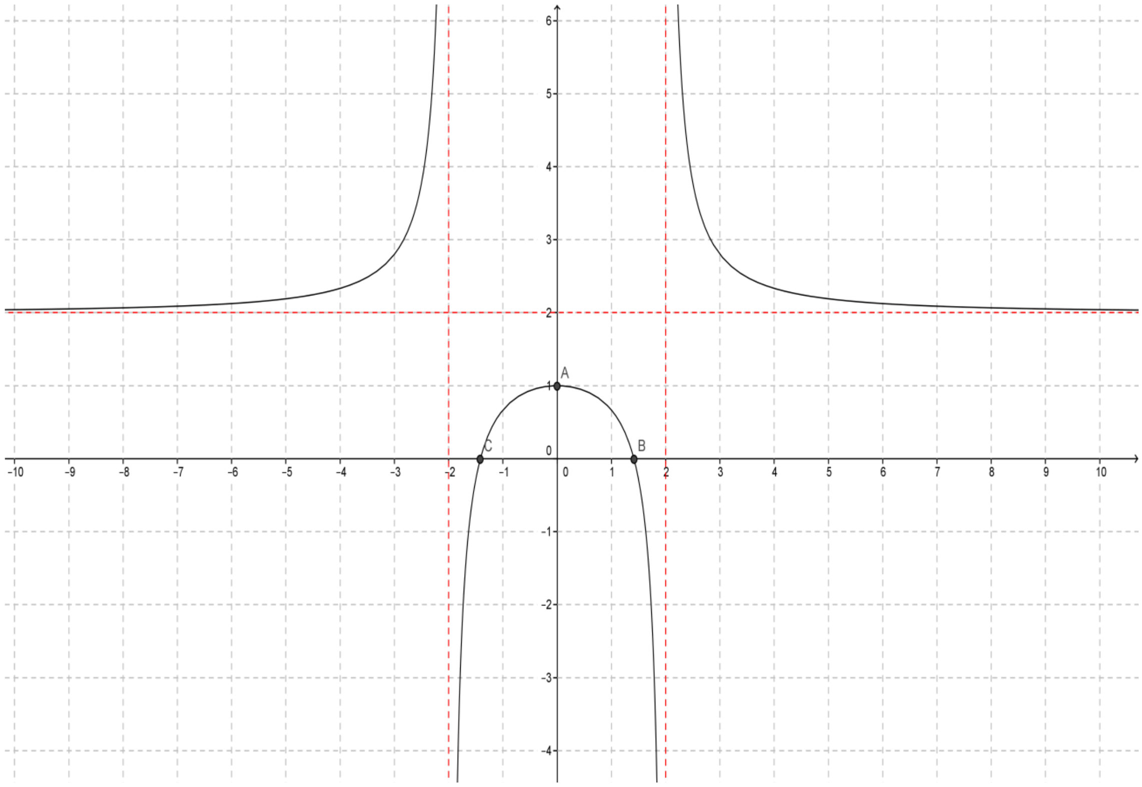
$+ + + + + (-2) - - - - - - - - - - (\,2\,) + + + + +$ $\quad (x^2-4)^3$

$+ + + + + (-2) - - - - - - - - - - (\,2\,) + + + + +$ $\quad f''(x) = \frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}$

$*$ *Da análise acima concluímos que*:
f *possui concavidade voltada para cima em* $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ *e*
f *possui concavidade voltada para baixo em* $(-2, 2)$

$*$ *Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade. Nesse caso*, $f''(x)$ *muda de sinal em* $x = -2$ *e em* $x = 2$. *No entanto, esses pontos não pertencem ao domínio de* f *e, portanto, não são pontos de inflexão*.
$-$*Logo*, f *não possui pontos de inflexão*.

$f)$ *Esboçar o Gráfico de* f.



4.

$a)\ f(x) = axe^{bx^2}\ ;\ \ f(2) = 1\ e\ f'(2) = 0.$

$f(2) = 2ae^{4b} = 1\ \ (I)$

$f'(x) = ae^{bx^2} + 2abx^2.e^{bx^2}$

$f'(2) = a.e^{4b} + 8ab.e^{4b} = 0 \rightarrow a + 8ab = 0\ \ \ (II)$

$*\ Com\ isso, resolvemos\ o\ seguinte\ sistema:$

$$\begin{cases} 2ae^{4b} = 1 \\ a + 8ab = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2ae^{4b} = 1 \\ a(1 + 8b) = 0 \end{cases};$$

$\rightarrow Da\ segunda\ equação, temos\ as\ soluções\ a = 0\ ou\ b = -\dfrac{1}{8}\ ; Note\ que\ a = 0$

$não\ satisfaz\ à\ primeira\ equação. Logo, temos\ b = \ -\dfrac{1}{8}.$

$*\ Substituindo\ o\ valor\ de\ b\ na\ primeira\ equação, temos:$

$$2ae^{-\frac{1}{2}} = 1 \rightarrow 2a.\frac{1}{\sqrt{e}} = 1 \rightarrow a = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

$b)$ $Área\ máxima\ de\ um\ triângulo\ cujo\ comprimento\ da\ base\ mais\ a\ altura$ é $2cm.$

$1)\ b + h = 2 \rightarrow b = 2 - h$

$2)\ A = \dfrac{1}{2}b \times h$

$*\ Substituindo\ 1\ em\ 2:$

$$A = \frac{1}{2}(2 - h)h \rightarrow A(h) = \frac{1}{2}(2h - h^2)$$

$*\ Fazendo\ A'(h), temos:$

$A'(h) = \frac{1}{2}(2 - 2h) \rightarrow A'(h) = -h + 1$

$A'(h) = 0 \Rightarrow -h + 1 = 0 \therefore h = 1.$

$*$ *Analisando o sinal de* $A'(h)$ *para comprovar se para* $h = 1$ *teremos a* área *máxima, obtemos*:

$+ + + + + + + + + (\ 1\ ) - - - - - - - - -$ $\quad A'(h) = -h + 1$

$*$ *Da análise concluímos que em* $h = 1$ *temos um ponto de máximo local e, portanto, a* área *máxima.*

$$A(1) = \frac{1}{2}(2 - 1)(1) = \frac{1}{2}u.A$$

$*$ *A dimensões que nos dá a* área *máxima* é $b = 1cm$ *e* $h = 1cm$.

5.8 4ª Avaliação-11 de Dezembro de 2010

1.

$a)\ \lim_{x\to 0^+}(e^x+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(e^x+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(e^x+x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x+x)}{x}}\ ;$

$*\ Calculando\ o\ limite\ do\ expoente\ usando\ a\ Regra\ de\ L'Hôspital, temos:$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+1}{e^x+x} = \frac{\lim_{x\to 0^+}(e^x+1)}{\lim_{x\to 0^+}(e^x+x)} =$$

$$\frac{\lim_{x\to 0^+} e^x + \lim_{x\to 0^+} 1}{\lim_{x\to 0^+} e^x + \lim_{x\to 0^+} x} = \frac{e^0+1}{e^0+0} = \frac{1+1}{1+0} = \frac{2}{1} = 2.$$

$*\ Com\ isso\ ...$

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x+x)^{1/x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x+x)}{x}} = e^2.$$

$b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)} =$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{|x|}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} =$$

$$\frac{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \lim_{x\to\infty} 1} = \frac{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\sqrt{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} + \lim_{x\to\infty} 1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$*\ Se\ usarmos\ a\ Regra\ de\ L'Hôspital\ na\ expressão\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}, temos:$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1}\ ;$$

$*\ Se\ continuarmos\ usando\ o\ mesmo\ procedimento\ não\ sairemos\ da\ indeterminação.$
$*\ Mas, ao\ se\ prestar\ atenção, podemos\ calcular\ isoladamente\ o\ limite\ do\ termo$
$em\ destaque, que\ gera\ a\ indeterminação. Logo,$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+1}{|x|}}{\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{|x|}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{2\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}} = \frac{2+0}{2\sqrt{1+0+0}} = \frac{2}{2\sqrt{1}} = \frac{2}{2} = 1.$$

$* \, Logo,$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \lim\limits_{x\to\infty} 1} =$$

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

2.

$a) \; f(x) = x|x| \; ; mostrar \; que \; (0,0) \; é \; um \; ponto \; de \; inflexão, mas \; que \; f''(0) \; não \; existe.$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \geq 0 \\ -x^2, & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & se\ x > 0 \\ -2x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & se\ x > 0 \\ -2, & se\ x < 0 \end{cases}$$

$* \, Domínio \; de \; f(x)$:

$D(f) = \mathbb{R}.$

$*$ *Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade. Em outras palavras, quando há mudança no sinal de* $f''(x)$. *Note que essa mudança se dá em* $x = 0$ *e, como* $x = 0$ *pertence ao domínio de* f *temos, portanto, um ponto de inflexão em* $x = 0$, *cuja imagem* $f(0) = 0$. *Logo, o ponto* $(0,0)$ *é um ponto de inflexão de* f.

$*$ *Da expressão de* $f''(x)$, *em* $x = 0$:

$f''_+(0) = 2 \; e \; f''_-(0) = -2.$

$*$ *Como* $f''_+(0) \neq f''_-(0)$ *temos que* $f'(x)$ *não é diferenciável em* $x = 0$.

$-$*Logo, não existe* $f''(0)$.

$b) \; y = \sqrt{x}$; *determinar o ponto mais próximo do ponto* $(1,0)$.

$*$ *Dado um ponto pertencente à curva acima, temos* $(x, \sqrt{x})$.

$*$ *A distância entre dois pontos é dada pela expressão*:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$-$*Substituindo os pontos em questão*:

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\sqrt{x} - 0\right)^2}$$

$$d = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x}$$

$$d(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$-$*Fazendo* $d'(x)$, *temos*:

$$d'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$-$*Estudando o sinal de* $d'(x)$:

$x^2 - x + 1 = 0 \; ; \; \Delta = 1 - 4 = -3 \; ;$

$* \, Com \, \Delta < 0, ou \, x^2 - x + 1 > 0 \, ou \, x^2 - x + 1 < 0 \, \forall x \in \mathbb{R}.$
$* \, Seja \, x = 0, então: \; 0^2 - 0 + 1 = 1.$
$* \, Portanto, x^2 - x + 1 > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}\,. Logo, D(d') = \mathbb{R}.$

$- - - - - - - - - - - - (1/2) + + + + + + + + \quad (2x - 1)$
$+ \quad 2\sqrt{x^2 - x + 1}$
$- - - - - - - - - - - - (1/2) + + + + + + + + \quad d'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

$* \, Da \, análise \, acima \, concluímos \, que \, em \, x = 1/2 \; temos \, um \, ponto \, de \, mínimo \, local, que \, nos \, dá \, o \, ponto \, mais \, próximo \, de \, (1, 0).$

$* \, Logo, o \, ponto \, mais \, próximo \, de \, (1, 0) \, é:$

$$y = \sqrt{x} \to y = \sqrt{\frac{1}{2}} \; ; \quad ponto: \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

3.
$1) \, Sejam \, x \, e \, y \, as \, partes \, cortadas \, do \, fio, então \, x + y = 10m \; (I)$
$* \, Seja \, x \, o \, pedaço \, que \, formará \, o \, quadrado \, de \, lado \, "l", então:$
$4l = x \to l = \frac{x}{4} \, ; Assim, a \, área \, do \, quadrado \, é: \; A_q = l^2 = \frac{x^2}{16};$
$* \, Seja \, y \, o \, pedaço \, que \, formará \, o \, triângulo \, equilátero \, de \, lado \, "a", então:$
$3a = y \to a = \frac{y}{3} \, ; Assim, a \, área \, do \, triângulo \, é: A_t = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{y^2\sqrt{3}}{36};$
$* \, A \, expressão \, do \, total \, de \, área \, que \, obtemos \, nesse \, processo \, é:$

$$A = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2\sqrt{3}}{36}$$

$- Da \, equação \, (I), temos \, y = 10 - x. Substituindo \, na \, expressão \, acima:$

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(10 - x)^2\sqrt{3}}{36}$$

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(x^2 - 20x + 100)\sqrt{3}}{36}$$

$- Fazendo \, A'(x), temos:$

$$A'(x) = \frac{x}{8} + \frac{(x - 10)\sqrt{3}}{18}$$

$$A'(x) = \frac{9x + 4(x - 10)\sqrt{3}}{72}$$

$* \, Estudando \, o \, sinal \, de \, A'(x):$

$- - - - - - - - - - - - \left(\frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}\right) + + + + + + + + + + \quad A'(x) = \frac{9x+4(x-10)\sqrt{3}}{72}$

$* \, Da \, análise \, acima \, concluímos \, que \, em \, x = \frac{40\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}} \; temos \, um \, ponto \, de \, mínimo \, local.$

$* \; Obs$: *note que estamos tratando o valor de* x *no intervalo fechado* $[0, 10]$.
$* \; Pelo \; Método \; do \; Intervalor \; Fechado, temos$:

$$A(0) = \frac{0^2}{16} + \frac{(10-0)^2\sqrt{3}}{36} = \frac{100\sqrt{3}}{36} = \frac{25\sqrt{3}}{9} m^2$$

$$A(10) = \frac{10^2}{16} + \frac{(10-10)^2\sqrt{3}}{36} = \frac{100}{16} + 0 = \frac{100}{16} = \frac{25}{4} m^2$$

$* \; Com \; essas \; análises, concluímos \; que$:
$A(10)$ é *o valor máximo absoluto.*
$* \; Com \; isso, temos$:
$a)$ *Para obtermos a área máxima deve − se usar todo o fio para fazer o quadrado. Devemos usar os* $10m$ *de fio para fazer o quadrado.*

$b)$ $A\left(\frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}\right)$ é *o valor mínimo local e absoluto do intervalo* $[0, 10]$

$* \; Logo, para \; x = \frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$, *temos*:

$$y = 10 - x \rightarrow y = 10 - \frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} = \frac{90}{9+4\sqrt{3}} m$$

$* \; Com \; esses \; valores \; de \; x \; e \; y$ *temos a área englobada sendo mínima.*

4.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \; ; \quad f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \quad ; \quad f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

$* \; Domínio \; de \; f(x)$:
$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

$a)$ *Interseções com os eixos coordernados*:
$-Com \; o \; eixo \; y$:

$$f(0) = \frac{0^3}{(0-1)^2} = \frac{0}{1} = 0. \quad ponto \; (0, 0).$$

$-Com \; o \; eixo \; x$:

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^3 = 0 \therefore x = 0. \; ponto \; (0, 0).$$

$b)$*Assíntotas*:

$-Verticais$: *Dizemos que a reta* $x = a$ é *uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos,*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$* \; Verificando \; no \; ponto \; de \; descontinuidade \; de \; f$, *ou seja, em* $x = 1$:

$+ + + + + + + + + + (1) + + + + + + + + +$ $\quad (x-1)^2$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x^3}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$

$* \, Obs: se \ x \to 1^+, então \ x > 1 \ \Rightarrow x - 1 > 0.$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{x^3}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$

$* \, Obs: se \ x \to 1^-, então \ x < 1 \ \Rightarrow x - 1 < 0 \, ; (x-1)^2 > 0$

$-Logo, a \ reta \ x = 1 \text{ é } uma \ assíntota \ vertical.$

$-Horizontais: Dizemos \ que \ a \ reta \ y = a \text{ é } uma \ assíntota \ horizontal \ se \ ocorrer \ um \ dos \ seguintes \ casos,$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{2x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{2} = \lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{2x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{2} = \lim_{x\to-\infty} 3x = -\infty$$

$-Logo, não \ existem \ assíntotas \ horizontais \ ao \ gráfico \ de \ f(x).$

$-Oblíquas: Dizemos \ que \ a \ reta \ y = ax + b \text{ é } uma \ assíntota \ oblíqua \ se, somente \ se,$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

$$* \, f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} = (x+2) + \frac{3x-2}{x^2-2x+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{2x-2} = 0.$$

$-Logo, a \ reta \ y = x + 2 \text{ é } uma \ assíntota \ oblíqua(inclinada) \ ao \ gráfico \ de \ f(x).$

$c) \ Crescimento \ e \ Decrescimento:$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$* \, Analisando \ o \ sinal \ de \ f'(x), obtemos:$

$+ + + + + + + + (0) + + + + + + + + + + + + + +$ $\quad x^2$

$- - - - - - - - - - - - - - - - - - (3) + + + + +$ $\quad (x-3)$

$- - - - - - - - - - - - - (1) + + + + + + + + + + +$ $\quad (x-1)^3$

$+ + + + + + + + (0) + + (1) - - - (3) + + + + +$ $\quad f'(x) = \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$

$-Da \ análise \ acima, concluímos \ que:$

$f \text{ é } crescente \ em \ (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \ e$

$f \text{ é } decrescente \ em \ (1, 3).$

$d) \ Os \ valores \ máximos \ e \ mínimos \ locais \ de \ f:$

$*$ *Calcular o valor de* f *nos números críticos, onde ou* $f'(x) = 0$ *ou quando* $f'(x)$ *não existe no domínio de* f.
$*$ *Da análise no item anterior, temos como números críticos* 0 *e* 3. *Embora* $f'(1)$ *não existe, temos que* $x = 1$ *não pertence ao domínio de* f *e, portanto, não é um número crítico.*

$$f(0) = \frac{0^3}{(0-1)^2} = \frac{0}{1} = 0. \quad ponto\ (0,0).$$

$*$ *Obs*: $f(0)$ *é apenas um ponto crítico! Não há mudança em* $f'(x)$ *em* $x = 0$.

$$f(3) = \frac{3^3}{(3-1)^2} = \frac{27}{4}. \quad ponto\ de\ mínimo\ local: \left(3, \frac{27}{4}\right).$$

e) Concavidades e Pontos de Inflexão:

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

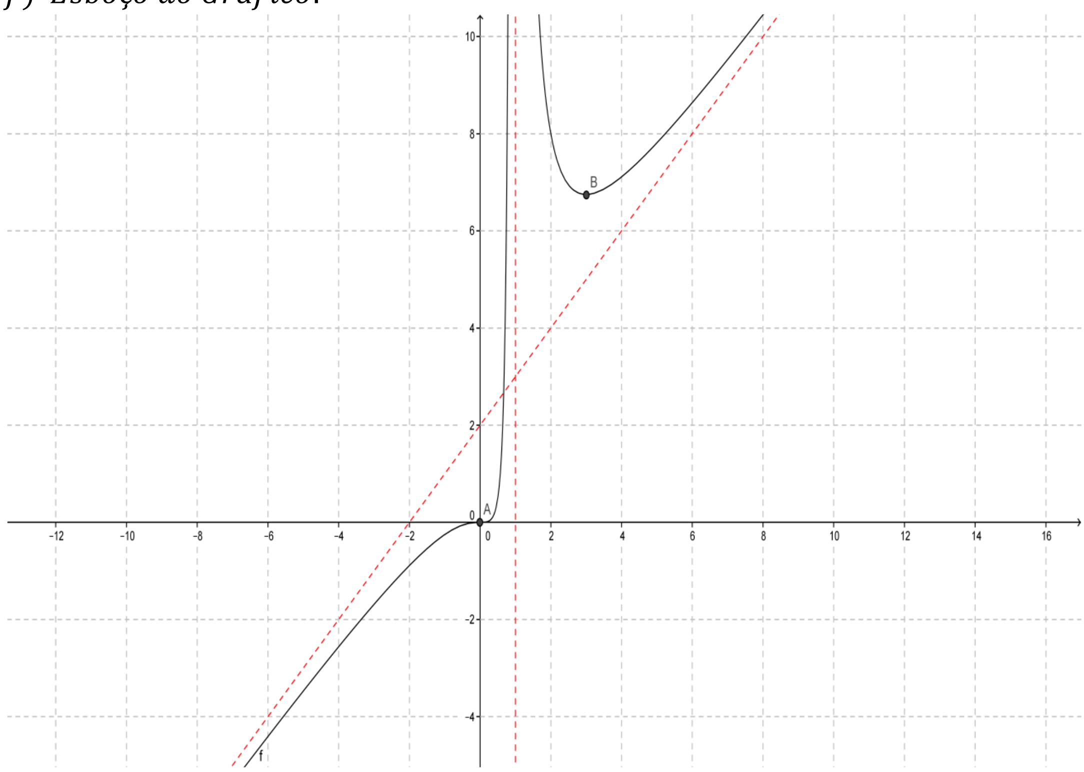
$*$ *Analisando o sinal de* $f''(x)$, *obtemos*:

$- - - - - - - - - - - (\,0\,) + + + + + + + + + +$	$6x$
$+ + + + + + + + + + + + + + + + (\,1\,) + + +$	$(x-1)^4$
$- - - - - - - - - - - (\,0\,) + + + + (\,1\,) + + +$	$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$

$-$*Da análise acima, concluímos que*:
f *possui concavidade voltada para cima em* $(0,1) \cup (1, +\infty)$ *e*
f *possui concavidade voltada para baixo em* $(-\infty, 0)$.

$*$ *Os pontos de inflexão ocorrem quando há mudança na direção da concavidade, nesse caso, em* $x = 0$.
Ponto de inflexão: $(0,0)$.

f) Esboço do Gráfico:



5.9 Reavaliação AB1-17 de Dezembro de 2010

1.

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-x)\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-x)\sqrt{x}}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{(1-x)(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}=\frac{\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}[(1+\sqrt{x})\sqrt{x}]}=$$

$$\frac{\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x})\times\lim_{x\to 1}\sqrt{x}}=\frac{\lim_{x\to 1}1}{\left[\lim_{x\to 1}1+\lim_{x\to 1}\sqrt{x}\right]\times\lim_{x\to 1}\sqrt{x}}=\frac{1}{[1+\sqrt{1}]\sqrt{1}}=\frac{1}{2}.$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{5+x}-\sqrt[3]{5}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{5+x}-\sqrt[3]{5}\right)}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{(5+x)^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(5+x)^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5+x-5}{x\left(\sqrt[3]{(5+x)^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt[3]{(5+x)^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(5+x)^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{5^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{25}}.$$

2.

$$f(x)=\begin{cases}3x, & se\ x\le 2\\ ax+b, & se\ 2<x<5\\ -6x, & se\ x\ge 5\end{cases}$$

$*\ f$ *é uma função sentencial composta por funções polinomiais e, portanto, contínuas em seus domínios. Logo, temos que* f *é contínua em* $(-\infty,2)\cup(2,5)\cup(5,+\infty)$.

$*$ *Dizemos que uma função* f *é contínua no ponto* $x=a$ *se, somente se,*

1) $f(a)$ *existir*;

2) $\lim_{x\to a}f(x)$ *existir*;

3) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

$-$*Em* $x=2$, *temos*:

1) $f(2)=3.(2)=6$

2) $\lim_{x\to 2}f(x)$; *Note que* $\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2)$. *Devemos, portanto, calcular o limite lateral à direita de* $x=2$.

$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(ax+b)=2a+b.$

3) $\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)\ \Rightarrow 2a+b=6\ \ (I)$

$-$*Em* $x=5$, *temos*:

1) $f(5)=-6.(5)=-30$

2) $\lim_{x\to 5}f(x)$; *Note que* $\lim_{x\to 5^+}f(x)=f(5)$. *Devemos, portanto, calcular o limite lateral à esquerda de* $x=5$.

$\lim_{x\to 5^-}f(x)=\lim_{x\to 5^-}(ax+b)=5a+b.$

3) $\lim_{x\to 5^-}f(x)=f(5)\Rightarrow 5a+b=-30\ (II)$

$* \; Para \; que \; f \; seja \; contínua \; em \; x = 2 \; e \; em \; x = 5 \; e, consequentemente, contínua$ $nos \; reais, devemos \; encontrar \; a \; e \; b, tais \; que$:

$$\begin{cases} 2a + b = 6 \\ 5a + b = -30 \end{cases} \to \begin{cases} 2a + b = 6 \\ 3a = -36 \end{cases} \to \begin{cases} 2a + b = 6 \\ a = -12 \end{cases} \therefore a = 12 \; e \; b = 30.$$

3.

$a) \; f(x) = \begin{cases} x^2 \,, & se \; x \leq 1 \\ 2x - 1 \,, & se \; x > 1 \end{cases} \; ; Determinar \; f'(x) \; e \; f''(x).$

$* \; Seja \; x + \Delta x < 1 \,, com \; \Delta x \to 0 \,, consequentemente, para \; x < 1 \; temos$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$* \; Seja \; x + \Delta x > 1 \,, com \; \Delta x \to 0 \,, consequentemente, para \; x > 1 \; temos$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x) - 1 - (2x - 1)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + 2\Delta x - 1 - 2x + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$$

$\to Assim, uma \; expressão \; para \; f'(x)$ é:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \,, & se \; x < 1 \\ 2 \,, & se \; x > 1 \end{cases}$$

$* \; Obs: Como \; f'_{-}(1) = f'_{+}(1), então \; f$ é $diferenciável \; em \; x = 1. Assim, podemos$ $escrever \; a \; expressão \; de \; f'(x) \; da \; seguinte \; forma$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \,, & se \; x \leq 1 \\ 2 \,, & se \; x > 1 \end{cases}$$

$* \; Seja \; x + \Delta x < 1 \,, com \; \Delta x \to 0 \,, consequentemente, para \; x < 1 \; temos$:

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

$* \; Seja \; x + \Delta x > 1 \,, com \; \Delta x \to 0 \,, consequentemente, para \; x > 1 \; temos$:

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

$-Assim, uma \; expressão \; para \; f''(x)$ é:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 \,, & se \; x < 1 \\ 0 \,, & se \; x > 1 \end{cases}$$

$* \; Obs: Como \; f''_{-}(1) \neq f''_{+}(1) \; então \; não \; existe \; f''(1). A \; expressão \; de \; f''(x)$ $continua \; conforme \; mostrada \; acima.$

$b) \; f(x) = e^{\operatorname{tg}(g(x))} \; ; \; g(0) = 0 \; \; e \; g'(0) = 3. Determinar \; f'(0).$

$$f'(x) = g'(x) \cdot \sec^2\big(g(x)\big) \cdot e^{\operatorname{tg}(g(x))}$$
$$f'(0) = g'(0) \cdot \sec^2\big(g(0)\big) \cdot e^{\operatorname{tg}(g(0))}$$
$$f'(0) = 3 \cdot \sec^2(0) \cdot e^{\operatorname{tg}(0)}$$
$$f'(0) = 3 \cdot 1 \cdot e^0$$
$$f'(0) = 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$f'(0) = 3$

4.

$a)\ f(x) = x^5 + 3x^3 - 1\ ;\ g'\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{f'(x)}\ .Determinar\ g'(-5)\ \ sabendo\ que$
-1 é $raíz\ da\ equação\ x^5 + 3x^3 + 4 = 0.$

$*\ Da\ expressão\ g'\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{f'(x)}\ \ ,em\ g'(-5)\ temos\ que\ f(x) = -5. Logo,$
$f(x) = -5 \Rightarrow x^5 + 3x^3 - 1 = -5\ \Rightarrow x^5 + 3x^3 + 4 = 0.$
$*\ Como - 1$ é $raíz\ da\ equação\ acima, temos\ que\ f(-1) = -5\ e, portanto, temos:$

$$g'\big(f(-1)\big) = \frac{1}{f'(-1)}$$
$$g'(-5) = \frac{1}{f'(-1)}$$

$*\ f'(x) = 5x^4 + 9x^2\ ;\ f'(-1) = 5.(-1)^4 + 9.(-1)^2 = 5 + 9 = 14. Assim,$

$$g'(-5) = \frac{1}{14}$$

$b)\ f(x) = (\sec x)^{\frac{\cos x^2 - 1}{x^3+1}}\ \ ;\ determinar\ f'(0).$

$\ln f(x) = \ \dfrac{\cos x^2 - 1}{x^3 + 1} \cdot \ln(\sec x)$

$*\ Por\ diferenciação\ logarítmica, temos:$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{(-2x.\operatorname{sen} x^2)(x^3+1) - (\cos x^2 - 1)(3x^2)}{(x^3+1)^2} \cdot \ln(\sec x) + \dfrac{\cos x^2 - 1}{x^3 + 1} \cdot \dfrac{\sec x\,.\operatorname{tg} x}{\sec x}$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{(-2x.\operatorname{sen} x^2)(x^3+1) - (\cos x^2 - 1)(3x^2)}{(x^3+1)^2} \cdot \ln(\sec x) + \dfrac{\cos x^2 - 1}{x^3 + 1} \cdot \operatorname{tg} x$

$\dfrac{f'(0)}{f(0)} = \dfrac{(-2.0.\operatorname{sen} 0^2)(0^3+1) - (\cos 0^2 - 1)(3.0^2)}{(0^3+1)^2} \cdot \ln(\sec 0) + \dfrac{\cos 0^2 - 1}{0^3 + 1} \cdot \operatorname{tg} 0$

$\dfrac{f'(0)}{f(0)} = \dfrac{0-0}{1} \cdot \ln(1) + \dfrac{1-1}{1} \cdot 0$

$\dfrac{f'(0)}{f(0)} = 0 + 0 \rightarrow \dfrac{f'(0)}{f(0)} = 0\ ;\quad f(0) = (\sec 0)^{\frac{\cos 0^2 - 1}{0^3+1}} = 1^0 = 1.$

$Logo, \dfrac{f'(0)}{f(0)} = 0 \rightarrow \dfrac{f'(0)}{1} = 0\ \therefore f'(0) = 0.$

$5. Determinar\ as\ assíntotas\ horizontais\ do\ gráfico\ de\ f(x), onde$

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - x - 6}}$$

$-Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x-6}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-3}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2-x-6}}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x-6}}{\sqrt{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}}{\sqrt{\lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2}}} =$$

$$\frac{1-0}{\sqrt{1-0-0}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$* \, Obs: se \; x \to +\infty, então \; |x| = x \; ; \;\; |x| = \sqrt{x^2} \, .$

$-Logo, a \; reta \; y = 1$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x-6}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x-3}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2-x-6}}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x-3}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2-x-6}}{\sqrt{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{3}{x}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to-\infty} -1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}}{\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} - \lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x^2}}} =$$

$$\frac{1-0}{\sqrt{1-0-0}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$* \, Obs: se \; x \to -\infty, então \; |x| = -x \; ; \;\; |x| = \sqrt{x^2} \, .$

$-Logo, a \; reta \; y = -1$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

5.10 Reavaliação AB2-17 de Dezembro de 2010

$1.\ Em\ relação\ ao\ cubo, temos\ as\ seguintes\ informações:$

$$*\ \frac{da}{dt} = 6cm/s; Determinar\ \frac{dV}{dt}\ quando\ A = 24cm^2$$

$A = 6a^2; A = 24 \Rightarrow 6a^2 = 24 \Rightarrow a^2 = 4 \therefore a = 2cm.$

$V = a^3;\ \frac{dV}{da} = 3a^2;$

$*\ Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dt}$$
$$\frac{dV}{dt} = (3a^2) \cdot 6$$
$$\frac{dV}{dt} = 18a^2$$

$-Quando\ a = 2cm, obtemos:$

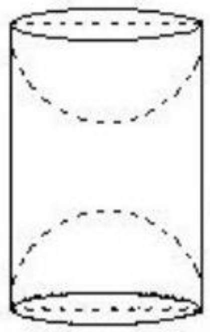
$$\frac{dV}{dt} = 18.(2)^2 = \frac{72cm^3}{s}$$

2.

$Obs1: A\ remoção\ de\ duas\ semiesferas\ resulta\ em\ uma\ esfera\ única.$

$Obs2: A\ área\ total\ do\ cilindro. A_t = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$

$Obs3: Volumes\ em\ questão. V_c = \pi r^2 h\ e\ V_e = \frac{4}{3}\pi r^3.$



$Usando\ as\ informações\ da\ questão, temos:$

$2\pi r^2 + 2\pi rh = 28\pi \Rightarrow r^2 + rh = 14\ \therefore h = \frac{14 - r^2}{r}.$

$O\ volume\ do\ sólido\ gerado\ é\ dado\ pela\ diferença\ entre\ o\ volume\ do\ cilindro\ e\ o\ volume\ da\ esfera\ removida.$

$Logo, o\ volume\ do\ sólido\ é:$

$V_s = \pi r^2 h - \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_s = \frac{3\pi r^2 h - 4\pi r^3}{3}\ \ temos\ ainda\ que\ h = \frac{14 - r^2}{r}\ então:$

$$V_s = \frac{\pi r^2(3h - 4r)}{3} = \frac{\pi r^2\left(3\frac{14 - r^2}{r} - 4r\right)}{3} = \frac{\pi r^2(42 - 7r^2)}{3r}. Como\ r > 0, então:$$

$$V_s = \frac{\pi r(42 - 7r^2)}{3}; V_s = \frac{\pi(42r - 7r^3)}{3};\ \ V'_s(r) = \frac{\pi}{3}(42 - 21r^2).; fazendo\ V'_s(r) = 0$$

$42 - 21r^2 = 0 \rightarrow 21r^2 = 42 \rightarrow r^2 = 2 \rightarrow r = \sqrt{2}.$

$*\ Logo, para\ r = \sqrt{2}cm, temos\ o\ cilindro\ cujo\ volume\ é\ máximo.$

3.

$$a)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-4(\pi - 2x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotg} x}{-4(\pi - 2x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{cossec}^2 x}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cosh x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - \operatorname{senh} x}{1} = \lim_{x\to 0}(-\operatorname{sen} x - \operatorname{senh} x) = 0 - 0 = 0.$$

$4.\,Mostre\ que$:

$a)\ f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ *não tem máximo nem mínimo local.*
$*$ *Se* f *é contínua no intervalo* (a, b) *e* f *possui um máximo ou mínimo local em* c*, então* $f'(c) = 0$.
$f'(x) = 101x^{100} + 51x^{50} + 1$
$f'(x) = 0 \Rightarrow\ 101x^{100} + 51x^{50} + 1 = 0 \Rightarrow 101x^{100} + 51x^{50} = -1$;

$*$ *Note que* $x^{100} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *e* $x^{50}, \forall x \in \mathbb{R}$. *Portanto*, $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$*$ *Como não existe* c *tal que* $f'(c) = 0$, *concluímos que* $f(x)$ *não tem máximo nem mínimo local.*

$b)\ \cosh(\ln x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x}$;

$$\cosh(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{2} = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} = \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{2} = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

5.
$a)\ f(x) = ax^3 + bx^2$; $f(1) = 2$; *ponto de inflexão em* $(1, 2)$.
$f(1) = a + b = 2\ \ (I)$
$*$ *Vamos analisar se ocorre mudança de direção da concavidade de* f *em* $x = 1$:
$f''(x) = 6ax + 2b$; *para que o ponto* $(1, 2)$ *seja ponto de inflexão, nesse caso, devemos ter* $f''(1) = 0$. *Assim,*
$f''(1) = 6a + 2b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0\ \ (II)$
$-$*Resolvendo o sistema*:
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -1\ e\ b = 3.$$
$*$ *Assim*, $f''(x) < 0$ *se* $x > 1$ *e* $f''(x) > 0$ *se* $x < 1$. *Portanto, há mudança na direção da concavidade em* $x = 1$. *Logo*, $(1, 2)$ *é ponto de inflexão.*

$b)$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1\,, & se\ x < 2 \\ 7 - x^2\,, & se\ x \geq 2 \end{cases}$$
$*$ *Determinar os extremos relativos absolutos no intervalo fechado* $[0.3]$.
$-$*Pelo Método do Intervalo Fechado, temos*:

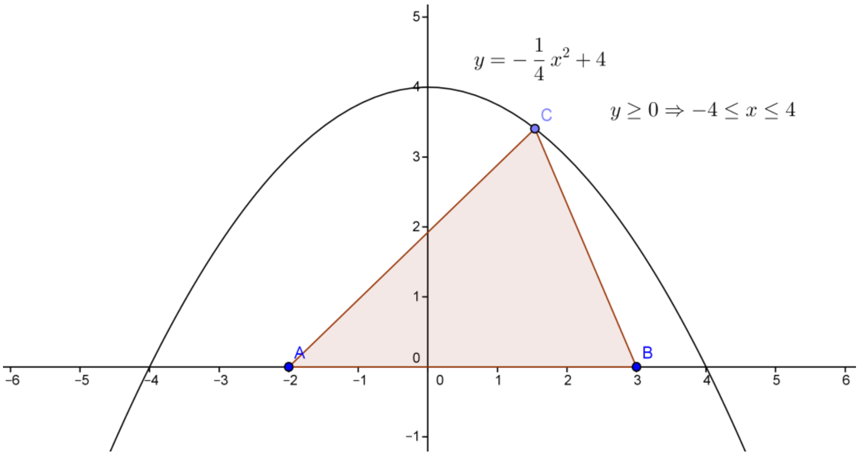
$1)$ *Os valores de* f *nos extremos do intervalo*:
$f(0) = 0^2 - 1 = -1$
$f(3) = 7 - 3^2 = 7 - 9 = -2$

$2)$ *Os valores de* f *nos números críticos*:
$*$ *Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe.*
$-$*Fazendo essa análise em cada sentença de* $f(x)$, *temos*:
$$f'(x) = \begin{cases} 2x\,, & se\ x < 2 \\ -2x\,, & se\ x > 2 \end{cases}$$
$*\ f'(x) = 0\ \Rightarrow 2x = 0\ ou - 2x = 0\ \therefore x = 0.$
$-Obs$: $x = 0$ *pertence ao domínio da primeira sentença.*

$f(0) = -1;$
$-Como\ f$ é $uma\ função\ sentencial$ é $recomendável\ que\ calculemos\ os\ valores\ de\ f$ $nos\ pontos\ onde\ há\ mudança\ de\ comportamento\ da\ função, ou\ seja, em\ x = 2$.
$f(2) = 7 - 2^2 = 7 - 4 = 3.$
$*\ Com\ as\ análises\ acima, concluímos\ que$:
$f(3)$ é $o\ valor\ mínimo\ absoluto\ e$
$f(2)$ é $o\ valor\ máximo\ absoluto$

5.11 Reavaliação AB2-17 de Dezembro de 2010

1.



$\acute{A}rea\ do\ triângulo\ formado\ pelos\ pontos\ A(-2,0), B(3,0)\ e\ C\ (x,y)\ tal\ que$

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 4, com\ y \geq 0 \Rightarrow\ x \in [-4,4].$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}[3-(-2)] \times y = \frac{5}{2}y$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{4}x^2 + 4\right)$$

$Como\ a\ função\ S_{\Delta ABC}$ é $contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [-4,4], pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Extremo\ S\ assume\ um\ valor\ máximo\ absoluto\ S(c)\ e\ um\ valor\ mínimo\ absoluto\ S(d)\ em\ algum\ número\ c\ e\ d, com\ c, d \in\ [-4,4].$

$Pelo\ Método\ do\ Intervalo\ Fechado, temos:$

$1. Os\ valores\ de\ S\ nos\ extremos\ do\ intervalo:$

$S(-4) = \frac{5}{2}\left[-\frac{1}{4} \times (-4)^2 + 4\right] = 0$

$S(4) = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{4} \times 4^2 + 4\right) = 0.$

$2. Os\ valores\ de\ S\ nos\ números\ críticos\ em\ (-4,4)$

"$O\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f$ é $um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde, ou\ f'(c) = 0\ ou\ onde\ f'(c)\ não\ existe$".

$$S'(x) = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{5}{4}x$$

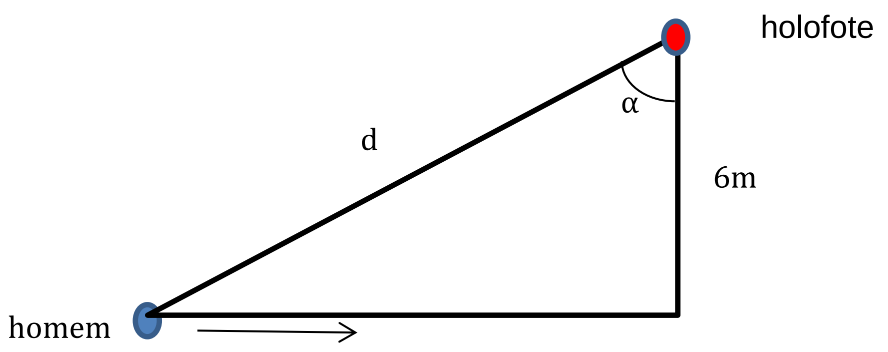
$Como\ S$ é $uma\ função\ diferenciável\ em\ \mathbb{R}, se\ S\ possui\ um\ número\ crítico\ c, então\ S'(c)\ existe\ e, portanto, S'(c) = 0\ (Teorema\ de\ Fermat).$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}x = 0 \therefore x = 0 \in (-4,4)$$

$S(0) = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{4} \times 0^2 + 4\right) = 10$

$Logo, o\ ponto\ (x,y)\ sobre\ a\ parábola\ y = -\frac{1}{4}x^2 + 4\ que, juntamente\ com\ os\ pontos\ (-2,0)\ e\ (3,0)\ delimita\ o\ triângulo\ de\ maior\ área$ é $o\ ponto\ (0,4).$

2.



$$Da\ questão\ temos, \frac{dd}{dt} = 1{,}5m/s\ \ e\ \ queremos\ encontrar\ a\ taxa\ de$$
$$rotação\ do\ holofote\ (\text{"velocidade angular"})\ quando\ d = 8m.$$
$$Do\ triângulo\ temos: tg\alpha = \frac{d}{6}\ \therefore\ \alpha = arctg\left(\frac{d}{6}\right)$$
$$Como\ \alpha\ e\ d\ variam\ com\ o\ tempo, podemos\ escrever:$$
$$\alpha(t) = arctg\left(\frac{d(t)}{6}\right)\ então, \alpha'(t) = \frac{\frac{d'(t)}{6}}{1 + \frac{\left(d(t)\right)^2}{36}}.$$
$$\alpha'(t) = \frac{\frac{1{,}5}{6}}{1 + \frac{\left(d(t)\right)^2}{36}}. Quando\ d = 8m\ temos: \alpha'(t) = \frac{\frac{1{,}5}{6}}{1 + \frac{(8)^2}{36}} \rightarrow$$
$$\alpha'(t) = \frac{\frac{1{,}5}{6}}{1 + \frac{64}{36}} = \frac{\frac{1{,}5}{6}}{\frac{100}{36}} = \frac{1{,}5}{6} \times \frac{36}{100} = \frac{9}{100} = 0{,}09\ rad/s$$

3.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{\cos 0}{\left(\frac{1}{1+0}\right)}$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{1}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$
$$b)\ \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}};$$
$$*\ Calculando\ o\ limite\ do\ expoente, temos:$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$
$$*\ Portanto,$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

4.

$a)\ f(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$; *encontrar os valores máximos e mínimos absolutos, se existirem, no intervalo fechado* $[-4,-1]$.

$*$ *Domínio de* $f(x)$: $\quad D(f)=\mathbb{R}-\{-3\}$.

$*$ *Note que temos um ponto de descontinuidade no intervalo* $[-4,-1]$.

$*$ *Vamos analisar a função nas proximidades de* $x=-3$:

$$\lim_{x\to-3^-} f(x)=\lim_{x\to-3^-}\frac{\overset{\overset{9}{\uparrow}}{\overbrace{x^2}}}{\underset{\underset{0^-}{\downarrow}}{\underbrace{x+3}}}=-\infty \quad e \quad \lim_{x\to-3^+} f(x)=\lim_{x\to-3^-}\frac{\overset{\overset{9}{\uparrow}}{\overbrace{x^2}}}{\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{\underbrace{x+3}}}=+\infty$$

$-$*Assim, a reta* $x=-3$ é *uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$ *de tal modo, que* f *assume valores infinitamente menores* à *esquerda de* $x=-3$ *e valores infinitamente maiores* à *direita de* $x=-3$.

Portanto, f *não possui nem máximo e nem mínimo absoluto no intervalo* $[-4,-1]$.

$b)$*Verificar o crescimento e a concavidade da função* f *no intervalo* $[0,2\pi]$.

$$f(x)=\frac{x}{2}-\operatorname{sen}x\ ;\ f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$$

$*$ *Vamos analisar a função* $\cos x$ *por quadrante*!

$1^{\underline{o}}$ *Quadrante*:

$\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right], \cos x\geq\dfrac{1}{2}\quad ;\quad \forall x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right], \cos x\leq\dfrac{1}{2}\quad ;$

$*$ *Assim,* $f'(x)\leq 0, \forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ *e* $f'(x)\geq 0, \forall x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$

$2^{\underline{o}}$ *e* $3^{\underline{o}}$ *Quadrantes* :

$\forall x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right], \cos x\leq 0\ ;$

$*$ *Assim,* $f'(x)\geq 0, \forall x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$

$4^{\underline{o}}$ *Quadrante*:

$\forall x\in\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{3}\right], \cos x\leq\dfrac{1}{2}\quad ;\quad \forall x\in\left[\dfrac{5\pi}{3},2\pi\right], \cos x\geq\dfrac{1}{2}.$

$*$ *Assim,* $f'(x)\geq 0, \forall x\in\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{3}\right]$ *e* $f'(x)\leq 0, \forall x\in\left[\dfrac{5\pi}{3},2\pi\right]$

$*$ *Com essa análise, temos o seguinte comportamento para* $f'(x)$:

$$(0)----\left(\tfrac{\pi}{3}\right)++++++++++++\left(\tfrac{5\pi}{3}\right)-----(2\pi) \quad f'(x)=\tfrac{1}{2}-\cos x$$

$*$ *Com isso, concluímos que*:

f é *crescente em* $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)$ *e* f é *decrescente em* $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{3},2\pi\right)$.

$f''(x)=\operatorname{sen}x$

$f''(x)>0\ , \forall x\in(0,\pi)$ *e* $f''(x)<0, \forall x\in(\pi,2\pi)$

$*$ *Logo,* f *possui concavidade voltada para cima em* $(0,\pi)$ *e* f *possui concavidade voltada para baixo em* $(\pi,2\pi)$.

5.

$a)\ f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 3x - 2$ *possui exatamente uma raíz real.*

$*$ *Calculemos* $f(0)$ *e* $f(1)$:

$f(0) = 4.0^5 + 3.0^3 + 3.0 - 2 = 0 + 0 + 0 - 2 = -2.$

$f(1) = 4 + 3 + 3 - 2 = 8.$

$*$ *Assim, como* f é *uma função polinomial e, portanto, contínua nos reais,* f é *contínua no intervalo* $[0, 1]$. *E ainda,* $f(0) < 0 < f(1)$. *pelo Teorema do Valor Intermediário existe algum* $c \in (0, 1)$ *tal que* $f(c) = 0$, *ou seja,* f *possui uma raíz real em* $(0, 1)$.

$*$ *Suponhamos que* f *possua duas raízes reais* c *e* b, *tais que* $f(c) = f(b) = 0$, *com* $c \neq b$. *Como* f é *uma função contínua em* $[c, b]$ *e diferenciável em* (c, b), *podemos garantir pelo Teorema de Rolle que existe algum número* $x \in (c, b)$ *tal que* $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 20x^4 + 9x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 20x^4 + 9x^2 + 3 = 0 \Rightarrow 20x^4 + 9x^2 = -3$

$\rightarrow$ *Note que* $20x^4 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ *e* $9x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. *Logo, a equação acima não possui raíz real e, portanto,* $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$*$ *Portanto, não existe* x *tal que* $f'(x) = 0$ *e, consequentemente,* f *possui exatamente uma raíz real.*

$b)$ *Estimar* $\operatorname{senh}(0{,}002)$. *Consideremos a função* $f(x) = \operatorname{senh} x$; $f'(x) = \cosh x$

Dos valores próximos a $\operatorname{senh}(0{,}002)$, *temos como valor conhecido* $\operatorname{senh} 0$

$*$ *Logo, queremos* $f(0 + 0{,}002)$.

Sobre diferenciais temos:

$$dy = f'(x).dx \ \ e\ \ \Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

Sabemos que em diferenciais $dy \cong \Delta y$, *então*:

$$f(x + dx) - f(x) \cong f'(x).dx$$

Se queremos $f(0 + 0{,}002)$ *temos que* $x = 0$ *e* $dx = 0{,}002$, *logo*:

$$f(0 + 0{,}002) - f(0) \cong f'(0) \cdot (0{,}002)$$

$$\operatorname{senh}(0{,}002) - \operatorname{senh} 0 \cong \cosh 0 \cdot (0{,}002)$$

$$\operatorname{senh}(0{,}002) - 0 \cong 1 \cdot (0{,}002)$$

$$\operatorname{senh}(0{,}002) \cong 0{,}002$$

5.12 Avaliação Final-21 de Dezembro de 2010

1.

$* \, Sabendo \; que \; o \; comprimento \; da \; calha \; é \; fixo, temos:$

$V = b.l.h\,; onde \; b \; é \; o \; comprimento, l \; é \; a \; largura \; e \; h \; a \; altura \; da \; calha.$

$$V = b(8-2x)x$$
$$V(x) = b(-2x^2+8x)$$
$$V'(x) = b(-4x+8)$$

$\rightarrow Estudando \; o \; sinal \; de \; V'(x), temos:$

$+ + + + + + + + + + + (2) - - - - - - - - - - - \quad V'(x) = b(-4x+8)$

$* \, Com \; essa \; análise, concluímos \; que \; em \; x = 2 \; temos \; um \; ponto \; de \; máximo \; local.$ $Logo, para \; x = 2 \; obtemos \; a \; calha \; de \; maior \; capacidade. Onde \; 2cm \; é \; a \; medida$ $que \; devemos \; virar \; para \; cima \; em \; ambos \; os \; lados \; da \; calha.$

2.

$S_A(t) = 50t \;\; ; \;\; S_B(t) = 30t \;\; ; \;\; S_C(t) = 10t$

$$A(t) = \frac{1}{2}\big(S_A(t)+S_C(t)\big)\cdot S_B(t) = \frac{1}{2}\big(S_A(t)\cdot S_B(t)+S_C(t)S_B(t)\big)$$
$$A'(t) = \frac{1}{2}\big(S_A{}'(t)\cdot S_B(t)+S_A(t)\cdot S_B{}'(t)+S_C{}'(t)\cdot S_B(t)+S_C(t)\cdot S_B{}'(t)\big)$$
$$A'(t) = \frac{1}{2}(50\cdot S_B(t)+S_A(t)\cdot 30+10\cdot S_B(t)+S_C(t)\cdot 30)$$
$$A'(t) = \frac{1}{2}\big(60\cdot S_B(t)+30\cdot S_A(t)+30\cdot S_C(t)\big)$$
$$A'(t) = 30\cdot S_B(t)+15\cdot S_A(t)+15\cdot S_C(t)$$
$$A'(2) = 30\cdot S_B(2)+15\cdot S_A(2)+15\cdot S_C(2)$$
$$A'(2) = 30\cdot 60+15\cdot 100+15\cdot 20$$
$$A'(2) = 1800+1500+300$$
$$A'(2) = 3600km^2/h$$

3.

$$a)\ \lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2-3x+2)\arccos(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)\arccos(x)}{(x-1)(x+1)} =$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-2)\arccos(x)}{(x+1)} = \frac{\lim_{x\to 1^-}(x-2)\times\lim_{x\to 1^-}\arccos(x)}{\lim_{x\to 1^-}x+\lim_{x\to 1^-}1} = \frac{-1\times\arccos(1)}{1+1}$$
$$= \frac{-1\times 0}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$b)\ \lim_{x\to -\pi^+} 3^{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\operatorname{sen} x\ ;$$

$$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$$
$$-3^{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} \le 3^{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\operatorname{sen} x \le 3^{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$* \, Obs: se \; x \to -\pi^+, então \; \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \to -\infty \; e, consequentemente, 3^{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} \to 0.$

$Sejam \; f(x) = -3^{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}, g(x) = 3^{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\operatorname{sen} x \; \; e \; h(x) = 3^{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}, então \; temos:$

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

$E\ ainda,\ \lim_{x\to-\pi^+} f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to-\pi^+} h(x)=0, ou\ seja,\ \lim_{x\to-\pi^+} f(x)=\lim_{x\to-\pi^+} h(x)=0,$ $podemos\ garantir\ pelo\ Teorema\ do\ Confronto\ que\ se\ f(x)\le g(x)\le h(x)\ e$ $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0} h(x)\ , então\ \lim_{x\to-\pi^+} g(x)=\lim_{x\to-\pi^+} f(x)=\lim_{x\to-\pi^+} h(x)=0. Portanto,$

$$\lim_{x\to-\pi^+} g(x)=\lim_{x\to-\pi^+} 3^{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot \operatorname{sen} x=0.$$

4.

$$f(t)=\begin{cases} mt-2, & se\ 1\le t\le 2\\ t^4-4, & se\ 2<t\le 3\\ \dfrac{\sqrt{t+1}-2}{t-3}, & se\ 3<t\le 4\end{cases}$$

$a)\ Para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ t=2, devemos\ ter:$

$$f(2)=\lim_{t\to2} f(t)$$

$1)\ f(2)=2m-2\ ;$

$2)\ \lim_{t\to2} f(t)\ \ ; note\ que\ \lim_{t\to2^-} f(t)=f(2). Logo, devemos\ calcular\ \lim_{t\to2^+} f(t)\ ;$

$\lim_{t\to2^+} f(t)=\lim_{t\to2^+}(t^4-4)=2^4-4=16-4=12.$

$*\ Portanto, devemos\ ter\ \ 2m-2=12\Rightarrow 2m=14\Rightarrow m=7.$

$*\ Logo, para\ m=7, f\ \text{é}\ contínua\ em\ t=2.$

$b)\ Para\ m=7\ já\ vimos\ que\ f\ \text{é}\ contínua\ em\ t=2. No\ entanto, f\ possui$ $outro\ ponto\ onde\ há\ mudança\ de\ comportamento\ da\ função, em\ t=3.$ $Vejamos\ se\ f\ \text{é}\ contínua\ em\ t=3.$

$f(3)=3^4-4=81-4=77.$

$\lim_{t\to3} f(t)\ ;\ note\ que\ \lim_{t\to3^-} f(t)=f(3). Logo, devemos\ calcular\ \lim_{t\to3^+} f(t)\ ;$

$$*\ \lim_{t\to3^+} f(t)=\lim_{t\to3^+}\frac{\sqrt{t+1}-2}{t-3}=\lim_{t\to3^+}\frac{\sqrt{t+1}-2}{t-3}\cdot\frac{\sqrt{t+1}+2}{\sqrt{t+1}+2}=$$

$$\lim_{t\to3^+}\frac{(t-3)}{(t-3)\left(\sqrt{t+1}+2\right)}=\lim_{t\to3^+}\frac{1}{\sqrt{t+1}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

$*\ Como\ \lim_{t\to3^-} f(t)\neq\lim_{t\to3^+} f(t)\ , ou\ seja, \lim_{t\to3} f(t)\ \ não\ existe, temos\ que\ f\ não\ \text{é}$ $contínua\ em\ t=3\ e, portanto, f\ não\ \text{é}\ contínua\ em\ [1,4], pois\ f\ não\ \text{é}$ $contínua\ em\ (1,4).$

5.

$a)\ f\big(g(x)\big)=x\ ; f'(x)=1+\big(f(x)\big)^2, \forall x\in\mathbb{R}\ ; Mostrar\ que\ g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}.$

$*\ Por\ derivação\ implícita, temos:$

$$f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)=1\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{f'\big(g(x)\big)};$$

$*\ Temos\ que\ \ f'(x)=1+\big(f(x)\big)^2\ ; façamos\ x=g(x), então:$

$$f'\big(g(x)\big)=1+\Big(f\big(g(x)\big)\Big)^2\Rightarrow f'\big(g(x)\big)=1+x^2$$

$-Assim, obtemos:$

$$g'(x)=\frac{1}{f'\big(g(x)\big)}\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$b)\ f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}\ ;\ determinarr\ f'(x).$

$\ln f(x) = \ln \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}} = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{1/4}$

$\ln f(x) = \dfrac{1}{4}[\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)]$

$*\ Por\ diferenciação\ logarítmica, temos:$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2x}{x^2-1}\right]$

$f'(x) = f(x)\cdot\dfrac{x}{2}\left[\dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2-1}\right]$

$f'(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}\cdot\dfrac{x}{2}\left[\dfrac{-2}{x^4-1}\right]$

$f'(x) = -\dfrac{x}{x^4-1}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

6. $f''(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2+1}\ ;$

$a)\ Analisando\ o\ sinal\ de\ f''(x), temos:$

$+ + +\ + + + +(\,0\,) - - - - - -(\,2\,) + + + + + +$	$x^2 - 2x$
$+ +$	$x^2 + 1$
$+ + + + + + +(\,0\,) - - - - - - -(\,2\,) + + + + + +$	$f''(x) = (x^2-2x)/(x^2+1)$

$-Da\ análise\ acima, concluímos\ que:$

$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ \ em\ (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ em\ (0{,}2).$

$*\ Pontos\ de\ inflexão\ ocorrem\ em\ x = 0\ e\ em\ x = 2\ (onde\ ocorre\ mudança\ de\ direção\ da\ concavidade)\ .$

$b)\ Ele\ quer\ saber\ onde\ f'$é $crescente\ e\ decrescente. Considere\ f'sua\ função\ primitiva, logo\ para\ saber\ onde\ f'$é $crescente\ ou\ decrescente, analisamos\ o\ sinal\ de\ f''.$

$*\ Logo, f'$é $crescente\ em\ (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)\ e\ f'$ é $decrescente\ em\ (0{,}2).$

$c)\ Os\ pontos\ de\ máximos\ e\ mínimos\ locais\ de\ f'\ ocorrem\ nos\ pontos\ onde\ há\ mudança\ na\ direção\ do\ crescimento\ da\ função, nesse\ caso, onde\ f''(x) = 0.$
$Então, em\ x = 0(ponto\ de\ máximo)e\ em\ \ x = 2(ponto\ de\ mínimo).$

7.

$a)\ x^2 + y^2 = 1\ ; retas\ tangentes\ que\ passam\ pelo\ ponto\ (1, 2).$

$*\ Por\ derivação\ implícita, temos:$

$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}.$

$*\ Dada\ um\ ponto\ e\ o\ coeficiente\ angular\ da\ reta, temos:$

$$y - y_o = m(x - x_o)$$
$$y - 2 = -\frac{x}{y}(x - 1)$$
$$y^2 - 2y = -x^2 + x$$
$$y^2 + x^2 - 2y - x = 0$$
$$1 - 2y - x = 0$$
$$x = 1 - 2y \ \ (I)$$
$*$ *Assim, procuramos na curva* $x^2 + y^2 = 1$ *os pontos que satisfazem a equação acima. Logo, substituindo a expressão na curva, temos*:
$$(1 - 2y)^2 + y^2 = 1$$
$$1 - 4y + 4y^2 + y^2 = 1$$
$$-4y + 5y^2 = 0$$
$$y(5y - 4) = 0$$
$$y = 0 \ e \ y = \frac{4}{5}$$
$*$ *Para* $y = 0$, *temos*:
$x = 1 - 2y \rightarrow x = 1 - 0 \therefore x = 1.$ *ponto* $(1, 0)$
$-$*Equação da reta tangente nesse ponto*:
$*$ *Obs*: *como* y', *nesse caso, se apresenta na forma* $-\frac{1}{0}$, *implica dizer que temos uma reta tangente vertical representada na forma* $x = x_o$. *Logo*,
$$x = 1 \ (reta\ tangente)$$
$*$ *Para* $y = \frac{4}{5}$, *temos*:
$x = 1 - 2y \rightarrow x = 1 - \frac{8}{5} \ \therefore \ x = -\frac{3}{5}$. *ponto* $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
$-$*Equação da reta ttangente nesse ponto*:
$$y' = -\frac{\left(-\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{3}{4}$$
$$y - 2 = \frac{3}{4}(x - 1)$$
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$
8.
$f(x) = 2x - 1 - \cos x$; *mostre que* f *possui exatamente uma raíz real.*
$*$ *Calculemos* $f(0)$ *e* $f(\pi)$;
$f(0) = 0 - 1 - \cos 0 = -1 - 1 = -2.$
$f(\pi) = 2\pi - 1 - \cos \pi = 2\pi - 1 - (-1) = 2\pi.$
$*$ f é *uma soma de funções contínuas e, portanto,* f é *contínua em* $[0, \pi]$, *e ainda,* $f(0) < 0 < f(\pi)$. *Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número* c *em* $(0, \pi)$ *tal que* $f(c) = 0$. *Logo,* f *possui uma raíz real em* $(0, \pi)$.
$*$ *Suponhamos que* f *possua duas raízes reais* c *e* b, *tal que* $f(b) = f(c) = 0$, *com* $b \neq c$. f é *contínua em* $[c, b]$ *e diferenciável em* (c, b). *Logo, pelo Teorema de Rolle, existe algum número* $x \in (c, b)$ *tal que* $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 2 + \operatorname{sen} x$; *Note que* $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ *e, portanto,* $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *Logo, não existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f'(x) = 0$ *e, portanto,* f *possui exatamente uma raíz real.*

9.

$a)\ \lim\limits_{x\to1^+} x^{\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)} = \lim\limits_{x\to1^+} e^{\ln x^{\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)}} = \lim\limits_{x\to1^+} e^{\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)\cdot\ln x};$

$*\ Calculando\ o\ limite\ do\ expoente, obtemos:$

$$\lim_{x\to1^+}\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)\cdot\ln x = \lim_{x\to1^+}\frac{-\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to1^+}\frac{-\dfrac{1}{(x-1)}}{\dfrac{-\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}} = \lim_{x\to1^+}\frac{x\cdot(\ln x)^2}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{(\ln x)^2 + x\cdot2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to1^+}\left((\ln x)^2 + x\cdot2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$*\ Logo,$

$$\lim_{x\to1^+} x^{\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)\cdot\ln x} = e^0 = 1.$$

$b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\ ; façamos\ a\ substituição\ x = a.n\ ;\ \ se\ x\to\infty, então\ n\to\infty.$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{a.n}\right)^{ab.n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{ab} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{ab}$$
$$= e^{ab}.$$

10.

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2+4x-12} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+6)(x-2)}$$

$Domínio\ de\ f(x):$

$*\ D(f) = \mathbb{R} - \{-6, 2\};$

$Assíntotas:$

$-Verticais: Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad ou \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

$*\ Verificando\ se\ há\ assíntotas\ verticais\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ de\ f,\ ou\ seja, em\ x = -6\ e\ em\ x = 2.$

$$\lim_{x\to-6^-}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+6)(x-2)} = \lim_{x\to-6^-}\frac{\overbrace{(x+3)}^{-3}\overbrace{(x-2)}^{-8}}{\underbrace{(x+6)}_{0^-}\underbrace{(x-2)}_{-8}} = \lim_{x\to-6^-}\frac{\overbrace{(x+3)(x-2)}^{24}}{\underbrace{(x+6)(x-2)}_{0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-6^-}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+6)(x-2)} = \lim_{x\to-6^-}\frac{\overbrace{(x+3)}^{-3}\overbrace{(x-2)}^{-8}}{\underbrace{(x+6)}_{0^+}\underbrace{(x-2)}_{-8}} = \lim_{x\to-6^-}\frac{\overbrace{(x+3)(x-2)}^{24}}{\underbrace{(x+6)(x-2)}_{0^-}} = -\infty$$

$-Logo, a\ reta\ x = -6\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+6)(x-2)} = \lim_{x\to2}\frac{x+3}{x+6} = \frac{\lim\limits_{x\to2}x + \lim\limits_{x\to2}3}{\lim\limits_{x\to2}x + \lim\limits_{x\to2}6} = \frac{2+3}{2+6} = \frac{5}{8}.$$

$-Logo, a\ reta\ x = 2$ não é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$-Horizontais: Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-6}{x^2+4x-12} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+x-6}{x^2}}{\frac{x^2+4x-12}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}} =$$

$$\frac{\lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x^2}}{\lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{12}{x^2}} = \frac{1+0-0}{1+0-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

$-Logo, a\ reta\ y = 1$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-6}{x^2+4x-12} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2+x-6}{x^2}}{\frac{x^2+4x-12}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}} =$$

$$\frac{\lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{x^2}}{\lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{12}{x^2}} = \frac{1+0-0}{1+0-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Capítulo 6 2011.1

6.1 1ª Avaliação-25 de Março de 2011

1.
$a)\ f(a).f(b) < 0\,;$

$1)\ f(a) > 0\ e\ f(b) < 0\,;$

$*\ Nesse\ caso, como\ f$ é $contínua\ em\ [a,b]\ e\ f(b) < 0 < f(a), pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ , existe\ algum\ número\ c \in (a,b)\ tal\ que\ f(c) = 0. Logo, f\ possui\ , pelo\ menos, uma\ raíz\ real\ em\ (a,b).$

$2)\ f(a) < 0\ e\ f(b) > 0$

$*\ Nesse\ caso, como\ f$ é $contínua\ em\ [a,b]\ e\ f(a) < 0 < f(b), pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ , existe\ algum\ número\ c \in (a,b)\ tal\ que\ f(c) = 0. Logo, f\ possui\ , pelo\ menos, uma\ raíz\ real\ em\ (a,b).$

$\rightarrow Com\ isso, concluímos\ que\ f\ possui, pelo\ menos, uma\ raíz\ real\ em\ (a,b)\ levando\ em\ consideraçao\ que\ f(a).f(b) < 0.$

$$b)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} = \lim_{x\to 2}\left[\left(\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{6-x}+2}{\sqrt{6-x}+2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{3-x}+1}\right)\right] =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(-x+2)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}{(-x+2)\left(\sqrt{6-x}+2\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(3-x)}+\lim\limits_{x\to 2}1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(6-x)}+\lim\limits_{x\to 2}2} =$$

$$\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}3-\lim\limits_{x\to 2}x}+\lim\limits_{x\to 2}1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}6-\lim\limits_{x\to 2}x}+\lim\limits_{x\to 2}2} = \frac{\sqrt{3-2}+1}{\sqrt{6-2}+2} = \frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

2.
$$a)\ f(x) = \begin{cases}\dfrac{2x^3-54}{x-3}, & se\ x \neq 3\\ m, & se\ x = 3\end{cases};$$

$*\ Analisando\ a\ primeira\ sentença\ de\ f(x), temos:$

$$\frac{2x^3-54}{x-3} = \frac{2(x^3-27)}{x-3} = \frac{2(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)}\ ; Para\ essa\ sentença\ x \neq 3.$$

$$Logo, f(x) = \begin{cases}2x^2+6x+18, & se\ x \neq 3\\ m, & se\ x = 3\end{cases}.$$

$*\ Como\ f$ é $uma\ função\ sentencial\ composta\ por\ funções\ polinomiais\ e, portanto, contínuas\ em\ seus\ domínios. Logo, temos\ que\ f$ é $contínua\ em\ (-\infty,3) \cup (3,+\infty).$

$*\ Dizemos\ que\ uma\ função\ f$ é $contínua\ no\ ponto\ x = a\ se, somente\ se,$

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

$* \ Para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ x = 3, devemos\ ter:$

$$f(3) = \lim_{x\to 3} f(x)$$

$$m = \lim_{x\to 3} f(x)$$

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(2x^2 + 6x + 18) = 2.(3^2) + 6.(3) + 18 = 54.$

$* \ Portanto, temos\ que\ m = 54.$

$-Para\ m = 54, f$ é $contínua\ em\ x = 3\ e, portanto, contínua\ nos\ reais.$

$b)\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, & se\ x \le 1 \\ 3n^2, & se\ x > 1 \end{cases};$

$* \ Obs: note\ que\ a\ função\ h\ possui\ uma\ descontinuidade\ em\ x = 1, pois,$
$embora\ exista\ \lim_{x\to 1} h(x)\ não\ temos\ h(1)\ definido, isso\ deve - se\ ao\ fato\ de$
$que\ a\ primeira\ sentença\ possui\ uma\ restrinção\ no\ domínio\ do\ denominador,$
$este\ deve\ ser\ diferente\ de\ 1\ para\ exister\ h(x).$

$* \ Portanto, independente\ do\ valor\ de\ n, h(x)\ permanece\ descontínua\ em\ x = 1.$
$Assim, para\ qualquer\ valor\ de\ n, h(x)\ não\ é\ contínua\ nos\ reais.$

$* \ Obs: Se\ pudéssemos\ reescrever\ h(x)\ de\ modo\ a\ torná - la\ passível\ de$
$continuidade\ nos\ reais, devíamos\ ter:$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, & se\ x < 1 \\ \dfrac{1}{3}, & se\ x = 1 \\ 3n^2, & se\ x > 1 \end{cases}$$

$\dots assim, ao\ fazermos\ as\ contas\ encontraríamos\ n = \dfrac{1}{3}; e\ com\ isso, h\ seria$
$contínua\ nos\ reais.$

3.

$a)\ \lim_{x\to 1^+}(x^3 - 1)\cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^3 - 1}\right);$

$$-1 \le \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3 - 1}\right) \le 1$$

$$-(x^3 - 1) \le (x^3 - 1)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3 - 1}\right) \le (x^3 - 1)$$

$* \ Sejam\ f(x) = -(x^3 - 1), g(x) = (x^3 - 1)\cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^3 - 1}\right)\ e\ h(x) = (x^3 - 1),$
$então\ temos\ f(x) \le g(x) \le h(x). E\ ainda, \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0\ e\ \lim_{x\to 1^+} h(x) = 0, ou\ seja,$
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} h(x), então\ pelo\ Teorema\ do\ Confronto, temos\ que\ \lim_{x\to 1^+} f(x) =$
$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = 0. Portanto,$

$$\lim_{x\to 1^+}(x^3 - 1)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3 - 1}\right) = 0$$

$b)\ f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & se\ x \ne 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}; \quad Determinar\ f'(0).$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$-1\leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1$$

$$-x\leq x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\leq x$$

$* \; Sejam \; f(x)=-x\,, g(x)=x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \; e \; h(x)=x, então \; temos:$

$$f(x)\leq g(x)\leq h(x)$$

$E \; ainda, \lim_{x\to 0}f(x)=0 \; e \; \lim_{x\to 0}h(x)=0\,, ou \; seja, \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}h(x)\,, então \; pelo$ $Teorema \; do \; Confronto, temos \; que \; \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}g(x)=0. Assim,$

$$\lim_{x\to 0}x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$* \; Logo, f'(0)=0.$

4.

$$y=\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x(x+2)(x-2)}$$

$* \; Domínio \; da \; função \; y=f(x):$

$D(f)=\mathbb{R}-\{-2,0,2\};$

$Obs: se \; x\neq 2, então \; temos \; y=f(x)=\dfrac{(x-1)}{x(x+2)}.$

$* \; Assíntotas:$

$-Verticais: Dizemos \; que \; a \; reta \; x=a \; é \; uma \; assíntota \; vertical \; se \; ocorrer \; um \; dos \; seguintes \; casos,$

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$$

$* \; Verificando \; sse \; há \; assíntotas \; nos \; pontos \; de \; descontinuidade, ou \; seja, em \; x=-2, x=0 \; e \; em \; x=2, temos:$

$$\lim_{x\to -2^+}f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{\overbrace{(x-1)}^{-3}}{\underbrace{x}_{-2}\underbrace{(x+2)}_{0^+}}=\lim_{x\to -2^+}\frac{\overbrace{(x-1)}^{-3}}{\underbrace{x(x+2)}_{0^-}}=+\infty$$

$-Logo, a \; reta \; x=-2 \; é \; uma \; assíntota \; vertical \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{(x-1)}^{-1}}{\underbrace{x}_{0^+}\underbrace{(x+2)}_{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{(x-1)}^{-1}}{\underbrace{x(x+2)}_{0^+}}=+\infty$$

$-Logo, a \; reta \; x=0 \; é \; uma \; assíntota \; vertical \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{x(x+2)}=\frac{2-1}{2(2+2)}=\frac{1}{8};$$

$-Logo, a \; reta \; x=2 \; não \; é \; uma \; assíntota \; vertical \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

$-Horizontais: Dizemos \; que \; a \; reta \; y=a \; é \; uma \; assíntota \; horizontal \; se \; ocorrer \; um \; dos \; seguintes \; casos,$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=a \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty}f(x)=a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-3x+2}{x^3}}{\frac{x^3-4x}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{4}{x^2}} =$$

$$\frac{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}}{\lim_{x\to+\infty}1-\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}} = \frac{0-0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$-Logo, a\ reta\ y = 0$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2-3x+2}{x^3}}{\frac{x^3-4x}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{4}{x^2}} =$$

$$\frac{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3}}{\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}} = \frac{0-0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0.$$

5. $Determinar\ as\ retas\ tangentes$ à $curva\ y = x^3-3x\ que\ são\ perpendiculares$ à $reta\ 2x+18y-9=0.$

$* \ 2x+18y-9=0 \rightarrow y = -\frac{1}{9}x+\frac{1}{2};$

$*\ Dado\ os\ coeficientes\ angulares\ m_1\ e\ m_2\ de\ duas\ retas\ perpendiculares, temos\ que\ m_1\cdot m_2 = -1\ . Logo, procuramos\ as\ retas\ tangens$ à $curva\ y = x^3-3x, que\ possuem\ o\ coeficiente\ angular\ m_2 = 9.$

$*\ Seja\ f(x) = y = x^3-3x\ ; então, calculando\ f'(x), temos:$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-3(x+\Delta x)-x^3+3x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-3x-3\Delta x-x^3+3x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2-3)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2-3) = 3x^2-3.$$

$*\ Assim, f'(x) = 3x^2-3.$

$-Sabemos\ que\ o\ valor\ de\ f'(x)\ num\ ponto\ x = a$ é $coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (a, f(a)). Procuramos\ f'(x) = 9. Logo,$

$3x^2-3 = 9 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \therefore x = -2\ e\ x = 2.$

$-Para\ x = -2, temos:$

$f(-2) = (-2)^3-3(-2) = -8+6 = -2.\ \ ponto\ (-2,-2)$

$*\ Equação\ da\ reta\ tangente:$

$$y-y_o = m_2(x-x_o)$$
$$y-(-2) = 9\big(x-(-2)\big)$$
$$y+2 = 9(x+2)$$
$$y = 9x+16$$

$-Para\ x = 2, temos:$

$f(2) = 2^3-3(2) = 8-6 = 2.\ \ ponto\ (2,2)$

$* \, Equação \; da \; reta \; tangente:$

$$y - y_o = m_2(x - x_o)$$
$$y - 2 = 9(x - 2)$$
$$y = 9x - 16$$

6.2 1ª Avaliação-26 de Março de 2011

$1.\ f(x) = \sqrt{x+1}\,;$

$a)\ Determinar\ f'(x);$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+\Delta x)+1} + \sqrt{x+1}} \right) \right] =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x + 1 - x - 1}{\Delta x \left(\sqrt{(x+\Delta x)+1} + \sqrt{x+1} \right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \left(\sqrt{(x+\Delta x)+1} + \sqrt{x+1} \right)} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{(x+\Delta x)+1} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

$b)\ Reta\ tangente\ no\ ponto\ x = 0.$

$f(0) = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1.\ ponto\ (0,1);$

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

$*\ Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (0,1):$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}x$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

$-Interseções\ com\ os\ eixos\ coordenados: (0,1)\ e\ (-2,0)$

$*\ Área\ do\ triângulo\ formado\ pela\ reta\ tangente\ e\ os\ eixos\ coordenados:$

$$Área = \frac{1}{2}\big(0 - (-2)\big) \cdot (1 - 0) = \frac{1}{2}(2) \cdot (1) = 1\ u.A$$

2.

$a)\ Calcular\ os\ seguintes\ limites:$

$$i.\ \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1} - 2 \right) = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(\sqrt{x^2+4x+1} - 2 \right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+4x+1} + 2 \right)}{\left(\sqrt{x^2+4x+1} + 2 \right)} \right] =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+1-4}{\sqrt{x^2+4x+1}+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x-3}{\sqrt{x^2+4x+1}+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2+4x-3}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+4x+1}+2}{|x|}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2+4x-3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+4x+1}}{\sqrt{x^2}} + \frac{2}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{x + 4 - \frac{3}{x}}^{\uparrow\ +\infty}}{\underbrace{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x}}_{\downarrow\ 1}} = +\infty.$$

$$ii.\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}=\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}\cdot\frac{\sqrt{x+6}+x}{\sqrt{x+6}+x}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{-x^2+x+6}{(x^3-3x^2)\left(\sqrt{x+6}+x\right)}=$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)(x+2)}{x^2(x-3)\left(\sqrt{x+6}+x\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x+2)}{x^2\left(\sqrt{x+6}+x\right)}=\frac{-(3+2)}{3^2\left(\sqrt{3+6}+3\right)}=-\frac{5}{54}.$$

$b)$ *Suponha que* f *seja contínua em um intervalo fechado* $[a,b]$ *e seja* N *um número qualquer entre* $f(a)$ *e* $f(b)$, *onde* $f(a)\neq f(b)$. *Então existe um número* c *em* (a,b) *tal que* $f(c)=N$.

$c)$ *Seja* $f(x)=x^2-\sqrt{x+1}$; *mostrar que* f *possui uma raíz em* $(1,2)$.
$*$ *Domínio de* f: $D(f)=\{x\in\mathbb{R}|x\geq -1\}$;
$f(1)=1-\sqrt{2}$; $f(1)<0$.
$f(2)=4-\sqrt{3}$; $f(2)>0$.
$*$ *Como* f *é contínua no intervalo fechado* $[1,2]$ *e* $f(1)<0<f(2)$. *Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número* c *em* $(1,2)$ *tal que* $f(c)=0$. *Logo,* f *possui uma raíz real em* $(1,2)$ *e, portanto, temos algum* x *que satisfaz a igualdade* $x^2=\sqrt{x+1}$.
3.
$$f(x)=\begin{cases}2x^2-3x+\operatorname{sen}(\pi x), & se\ x\leq 1\\ 2x+b^2, & se\ x>1, com\ b\ constante\end{cases}$$
$*$ *Analisando a continuidade de* f, *temos*:
$-$*A primeira sentença é composta por uma soma de funções polinomiais e uma função trigonométrica, ambas funções contínuas em seus domínios e, portanto, a soma de funções contínuas também é uma função contínua. Logo, temos que* f *é contínua em* $(-\infty,1)$.
$-$*A segunda sentença é composto por uma função polinomial e, portanto, contínua em seu domínio. Logo,* f *é contínua em* $(1,+\infty)$.

$*$ *Vamos verificar se há possibilidade, um valor de* b, *para que* f *seja contínua em em* $x=1$.
$*$ *Dizemos que uma função* f *é contínua num ponto* $x=a$ *se, somente se,*
$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$$
$f(1)=2.(1)^2-3.(1)+\operatorname{sen}(\pi)=2-3+0=-1$.
$\lim_{x\to 1}f(x)$; *note que* $\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$, *então devemos calcular* $\lim_{x\to 1^+}f(x)$;
$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x+b^2)=2+b^2$.
$-$*Assim, temos*: $2+b^2=-1\Rightarrow b^2=-3$. *Logo, não existe* $b\in\mathbb{R}|b^2=-3$.
$*$ *Portanto, não há valor para* b *que torne* f *contínua em* $x=1$ *e, contudo, o maior conjunto real no qual* f *é contínua é* $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

4. $f(x+h)=f(x).f(h)$; $f(x)\neq 0$ *em todos os reais.*
$a)$ $f(0)$;
$$f(0+h)=f(0).f(h)\Rightarrow f(h)=f(0).f(h)\Rightarrow f(0)=\frac{f(h)}{f(h)}\therefore f(0)=1.$$
$b)$ $f'(0)$.
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x).f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)[f(h)-1]}{h}=$$

$$f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h};$$

$* \, Logo, temos \ldots \;\; f'(x) = f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} \; ; fazendo \; x = 0, obtemos:$

$$f'(0) = f(0) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} \;\; \therefore \;\; f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} \; .$$

$c) \; f'(x) = f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} \;\; ; do \; item \; anterior, temos \; \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} = f'(0).$

$* \, Portanto,$

$$f'(x) = f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} \;\; \therefore \; f'(x) = f'(0).f(x).$$

5.

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x + 1)(x - 1)}$$

$* \, Domínio \; de \; f(x):$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\};$

$* \, Assíntotas:$

$-Verticais: Dizemos \; que \; a \; reta \; x = a \; é \; uma \; assíntota \; vertical \; se \; ocorrer \; um \; dos \; seguintes \; casos,$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$* \, Verificando \; se \; há \; assíntotas \; nos \; pontos \; de \; descontinuidade \; de \; f, ou \; seja, em \; x = 0, x = -1 \; e \; em \; x = 1, temos:$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x^2 - x + 1)}{x(x - 1)} = \frac{1 + 1 + 1}{-1(-1 - 1)} = \frac{3}{2}.$$

$* \, Obs: se \; x \to -1, então \; x \neq -1.$

$-Logo, a \; reta \; x = -1 \; não \; é \; uma \; assíntota \; vertical, pois \; existe \; \lim_{x \to -1} f(x).$

$* \, Obs: se \; x \neq -1, então \; f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x(x - 1)};$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\overbrace{x^2 - x + 1}^{1}}{\underbrace{x}_{0^-} \underbrace{(x - 1)}_{-1}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\overbrace{x^2 - x + 1}^{1}}{\underbrace{x(x - 1)}_{0^+}} = +\infty$$

$* \, Obs: se \; x \to 0^+, então \; x > 0.$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{x^2 - x + 1}^{1}}{\underbrace{x}_{0^+} \underbrace{(x - 1)}_{-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{x^2 - x + 1}^{1}}{\underbrace{x(x - 1)}_{0^-}} = -\infty$$

$* \, Obs: se \; x \to 0^-, então \; x < 0.$

$-Logo, a \; reta \; x = 0 \; é \; uma \; assíntota \; vertical \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{x^2-x+1}^{1}}{\underbrace{x}_{1}\underbrace{(x-1)}_{0^-}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{x^2-x+1}^{1}}{\underbrace{x(x-1)}_{0^-}} = -\infty$$

$* Obs: se\ x \to 1^-, então\ x < 1. Logo, x - 1 < 0.$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x^2-x+1}^{1}}{\underbrace{x}_{1}\underbrace{(x-1)}_{0^+}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{x^2-x+1}^{1}}{\underbrace{x(x-1)}_{0^+}} = +\infty$$

$* Obs: se\ x \to 1^+, então\ x > 1. Logo, x - 1 > 0.$

$-Logo, a\ reta\ x = 1$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$-Horizontais: Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+1}{x^3-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x^3}}{\frac{x^3-x}{x^3}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to +\infty} 1 + \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to +\infty} 1 - \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^3}} =$$

$$\frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

$-Logo, a\ reta\ y = 1$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+1}{x^3-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x^3}}{\frac{x^3-x}{x^3}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to -\infty} 1 + \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to -\infty} 1 - \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^3}} =$$

$$\frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

6.3 2ª Avalição-15 de Abril de 2011

1.

$a)\ y = x$ é $tangente$ à $curva\ y = x^2 + mx + r\ no\ ponto\ (1,1). Determinar\ m\ e\ r.$

$y = 1^2 + m(1) + r \Rightarrow y = 1 + m + r\ ;\ \ como\ o\ ponto\ (1,1)\ pertence\ a\ curva:$

$m + r + 1 = 1 \Rightarrow m + r = 0\ \ (I).$

$*$ $O\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente$ é $o\ valor\ assumido\ pela\ derivada\ da\ curva\ naquele\ ponto, ou\ seja, y'(1) = 1.$

$y'(x) = 2x + m\ ;\ \ y'(1) = 2 + m \Rightarrow 2 + m = 1\ \ \therefore m = -1\ (II)$

$*$ $Substituindo\ (II)\ em\ (I), obtemos:$

$m + r = 0\ ;\ -1 + r = 0\ \ \therefore r = 1$

$b)\ F(x) = f\left(e^{x^2}\right)\ e\ G(x) = e^{\left(f(x)^2\right)}\ ; Determinar\ F'(x)\ e\ G'(x).$

$F'(x) = D_x\left[e^{x^2}\right] \cdot f'\left(e^{x^2}\right)$

$F'(x) = 2x \cdot e^{x^2} \cdot f'\left(e^{x^2}\right)$

$G'(x) = D_x[f(x)^2] \cdot e^{\left(f(x)^2\right)}$

$G'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) \cdot e^{\left(f(x)^2\right)}$

$2. reta\ normal$ à $elipse\ x^2 - xy + y^2 = 3\ no\ ponto\ (-1,1).$

$Por\ derivação\ implícita, temos:$

$2x - y - xy' + 2yy' = 0$

$y' \cdot (2y - x) = -(2x - y)$

$y' = -\dfrac{2x - y}{2y - x}\ ; o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal$ é$, portanto, m_n = \dfrac{2y - x}{2x - y}.$

$*$ $O\ valor\ do\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal\ no\ ponto\ (-1,1)$ é:

$$m_n = \frac{2y - x}{2x - y} = \frac{2 - (-1)}{-2 - 1} = \frac{3}{-3} = -1.$$

$-Equação\ da\ reta\ normal\ no\ ponto\ (-1,1):$

$$y - 1 = -1\big(x - (-1)\big)$$
$$y - 1 = -1(x + 1)$$
$$y = -x$$

$*$ $Pontos\ de\ interseção\ da\ reta\ normal\ com\ a\ elipse:$

$$x^2 - xy + y^2 = 3$$
$$x^2 - x(-x) + (-x)^2 = 3$$
$$x^2 + x^2 + x^2 = 3$$
$$3x^2 = 3$$
$$x^2 = 1$$
$$\therefore x = 1\ e\ x = -1.$$

$*$ $Para\ x = -1\ já\ temos\ o\ ponto\ (-1,1);$

$*$ $Para\ x = 1, obtemos\ o\ ponto\ (1,-1) \rightarrow segunda\ interseção\ da\ reta!$

$3. y = \sec^{-1} x\ \ \Leftrightarrow \sec y = x\ ;\ \ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\ \ ou\ \pi \le y \le \dfrac{3\pi}{2}\ ;$

$*$ $temos\ que\ y' = [\sec^{-1} x]'\ e\ que, por\ derivação\ implícita, y' \cdot \sec y \cdot \operatorname{tg} y = 1$

$Assim, temos:$

$$y' = \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{\sec y \cdot \operatorname{tg} y}$$

$* \; Sobre\ algumas\ propriedades\ trigonométricas, temos:$

$$\operatorname{tg}^2 y + 1 = \sec^2 y \Rightarrow \operatorname{tg} y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1}$$

$* \; Como\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\ \ ou\ \pi \leq y \leq \dfrac{3\pi}{2}, ou\ seja, y\ pertence\ ao\ 1^{\text{o}}\ e\ 3^{\text{o}}\ quadrantes,$

$temos\ que\ \operatorname{tg} y > 0. Portanto, \operatorname{tg} y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{\sec y \cdot \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$* \; Lembremos, que\ y = \sec^{-1} x \ \Leftrightarrow \sec y = x. Logo,$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$b)\ f(x) = \sec^{-1}(x^2)\ ; determinar\ f'(x).$

$* \; Sejam\ u = x^2\ e\ y = f(u) = \sec^{-1}(u)\ ;$

$-Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = (2x) \cdot \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4 - 1}}$$

4.

$a)\ f(x) = \operatorname{tg}\left(e^{2^x}\right)\ ; mostrar\ que\ f\ não\ possui\ reta\ tangente\ horizontal.$

$* \; Devemos\ provar\ que\ não\ existe\ algum\ x \in \mathbb{R}\ tal\ que\ f'(x) = 0.$

$* \; Sejam\ u = 2^x\ , v = e^u\ e\ y = f(v) = \operatorname{tg}(v)\ ;$

$-Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{dy}{dv}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) \cdot e^u \cdot \sec^2(v)$$

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) \cdot e^{2^x} \cdot \sec^2\left(e^{2^x}\right)$$

$* \; Vamos\ analisar\ f'(x)\ da\ seguinte\ forma:$

$* \; 2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R};$

$* \; \ln(2) > 0;$

$* \; e^{2^x} > 0, \forall x \in \mathbb{R};$

$* \; \sec^2\left(e^{2^x}\right) \geq 1;$

$-Com\ isso, temos\ que\ f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\ e, consequentemente, f\ não\ possui\ reta$
$tangente\ horizontal\ em\ nenhum\ ponto.$

$b)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^2} \cdot \dfrac{x^3}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5} \cdot x^3 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5} \times \lim\limits_{x\to 0} x^3\ ;$

$* \; Calculando\ o\ limite\ do\ primeiro\ fator, temos:$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5}\ ; façamos\ \theta = x^5.\ Se\ x \to 0, então\ \theta \to 0.$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5} = \lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = 1$

$* \, Calculando \; o \; limite \; do \; segundo \; fator, temos:$

$\lim_{x\to 0} x^3 = 0.$

$* \, Portanto, como \; os \; limites \; dos \; fatores \; existem, temos:$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5} \times \lim_{x\to 0} x^3 = 1 \times 0 = 0.$$

5.

$a)\ g(x) = \left(x^3 - \sqrt{x^2+1}\right) \operatorname{sen}^{-1} x\,;$

$$g'(x) = D_x\left[x^3 - \sqrt{x^2+1}\right] \cdot \operatorname{sen}^{-1} x + \left(x^3 - \sqrt{x^2+1}\right) \cdot D_x[\operatorname{sen}^{-1} x]$$

$$g'(x) = \left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)\right) \cdot \operatorname{sen}^{-1} x + \left(x^3 - \sqrt{x^2+1}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g'(x) = \left(3x^2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot \operatorname{sen}^{-1} x + \frac{x^3 - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

$b)\ h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{3^x + x}\,;$

$$h'(x) = \frac{D_x[\operatorname{sen} x] \cdot (3^x + x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x[3^x + x]}{(3^x + x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{\cos x \cdot (3^x + x) - \operatorname{sen} x \cdot (3^x \cdot \ln(3) + 1)}{(3^x + x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x \cdot \ln(3)) \cdot 3^x + x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{(3^x + x)^2}$$

6.4 2ª Avaliação-16 de Abril de 2011

1.

$a)\ y_1 = ax - x^2\ \ e\ \ y_2 = x^2 + 2bx + c\ ;$ *são tangentes no ponto* $(1,0)$.

$*$ *Devemos ter as seguintes igualdades satisfeitas*:

$$y_1(1) = y_2(1) = 0\ \ e\ \ y_1'(1) = y_2'(1)$$

$y_1(1) = a - 1\ ;\ \ y_2(1) = 1 + 2b + c$

$-$*Assim, temos*:

$y_1(1) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \therefore \boldsymbol{a} = \mathbf{1}.$

$y_2(1) = 0 \Rightarrow 1 + 2b + c = 0 \Rightarrow 2b + c = -1\ (I)$

$y'_1(x) = 1 - 2x\ ;\ \ y'_1(1) = 1 - 2 = -1$

$y'_2(x) = 2x + 2b\ ;\ y'_2(1) = 2 + 2b$

$-$*Assim, temos*:

$y_1'(1) = y_2'(1)\ \Rightarrow -1 = 2 + 2b \Rightarrow 2b = -3\ \therefore \boldsymbol{b} = -\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

$-$*Substituindo o valor de b na equação* (I), *obtemos*:

$2b + c = -1 \Rightarrow 2\left(-\dfrac{3}{2}\right) + c = -1 \Rightarrow -3 + c = -1 \therefore \boldsymbol{c} = \mathbf{2}.$

$b)$ *Reta normal à curva* $y = (2 + x) \cdot e^x$ *no ponto* $(0,2)$.

$y' = e^x(x + 3)\ ;$ *Logo, o coeficiente angular da reta normal é* $m_n = -\dfrac{1}{e^x(x + 3)}$

$*$ *Calculando o valor de* m_n *no ponto* $(0,2)$, *temos*:

$$m_n = -\frac{1}{e^x(x + 3)} = -\frac{1}{e^0(0 + 3)} = -\frac{1}{3}$$

$-$*Equação da reta normal no ponto* $(0,2)$:

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 2$$

2. *Considerar a curva* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}\ ;$ *reta tangente no ponto* (a,b).

$*\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2};$

$*$ *Por derivação implícita, temos*:

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + y' \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{y}} = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ ;$ *no ponto* (a,b) *temos* $y' = -\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$

$-$*Equação da reta tangente no ponto* (a,b):

$$y - b = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x - a)$$

$*$ *Interseções com os eixos coordenados*:

$-$*Quando* $x = 0$, *temos*:

$y - b = \dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \Rightarrow y = \dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + b$ *, ou ainda,* $y = \sqrt{ab} + b\ ;$

$-$*Quando* $y = 0$, *temos*:

$-b = -\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x - a) \Rightarrow x - a = \dfrac{b\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Rightarrow x = \dfrac{b\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + a$ *, ou ainda,* $x = \sqrt{ab} + a$

$* \textit{A soma de todas as coordenadas}$ é:

$$\sqrt{ab} + b + \sqrt{ab} + a = a + 2\sqrt{ab} + b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2.$$

3.

$a)\ g(2) = g'(2) = 2\ ;\ determinar\ f'(2)\ se\ f(x) = g\left(g\big(g(x)\big)\right);$

$$f'(x) = g'(x) \cdot g'\big(g(x)\big) \cdot g'\left(g\big(g(x)\big)\right)$$

$$f'(2) = g'(2) \cdot g'\big(g(2)\big) \cdot g'\left(g\big(g(2)\big)\right)$$

$$f'(2) = g'(2) \cdot g'(2) \cdot g'\big(g(2)\big)$$

$$f'(2) = g'(2) \cdot g'(2) \cdot g'(2)$$

$$f'(2) = \big(g'(2)\big)^3 = 2^3 = 8.$$

$b)\ f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 + 3)\ ;\ determinar\ f'(2).$

$$f'(x) = (2x) \cdot \frac{1}{1 + (x^2 + 3)^2}$$

$$f'(2) = (4) \cdot \frac{1}{1 + (4 + 3)^2}$$

$$f'(2) = \frac{4}{1 + 7^2}$$

$$f'(2) = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}.$$

4.

$a)\ h(x) = \dfrac{2^x}{\ln(2) \cdot \cos x}\ ;\ encontrar\ os\ pontos\ em\ [0, 2\pi]\ onde\ h'(x) = 0.$

$$h'(x) = \frac{2^x . \ln(2) . \ln(2) . \cos x + 2^x . \ln(2) . \operatorname{sen} x}{(\ln(2) \cdot \cos x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2^x [\ln(2) . \cos x + \operatorname{sen} x]}{\ln(2) . \cos^2 x};$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2) . \cos x + \operatorname{sen} x = 0\ ;$$

$$\ln(2) . \cos x = -\operatorname{sen} x\ ;\ \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\ln(2) . \cos x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$-\ln(2) . \cos x = \sqrt{1 - \cos^2 x}\ \ ;\ elevando\ ambos\ os\ membros\ ao\ quadrado\ ...$

$$\ln^2(2) . \cos^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x . [1 + \ln^2(2)] = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \ln^2(2)}\ \therefore \cos x = \pm \frac{1}{1 + \ln^2(2)}\ ;$$

$* \textit{Assim, temos reta tangente horizontal em}$:

$$x = \arccos\left(\frac{1}{1 + \ln^2(2)}\right)\ ;\ x = 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{1 + \ln^2(2)}\right)\ ;$$

$$x = \arccos\left(\frac{-1}{1 + \ln^2(2)}\right)\ e\ em\ x = 2\pi - \arccos\left(\frac{-1}{1 + \ln^2(2)}\right);$$

$* \textit{Obs: lembre que a função } y = \arccos x \textit{ tem como imagem } 0 \leq y \leq \pi.$

$* \textit{Logo, os valores encontrados em primeira instância, pertencem ao 1º e 2º quadrantes. Por outro lado, temos que }\cos(x) = \cos(-x)\textit{ e, como queremos}$

$os\ pontos\ no\ intervalo\ [0, 2\pi], aparecem\ outros\ dois\ pontos.$

$$b)\ \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{cotg}\theta - \operatorname{cossec}\theta}{\theta . \operatorname{cossec}\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}{\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta}}{\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} =$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)} = \lim_{\theta \to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} =$$

$$\lim_{\theta \to 0} -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \times \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1} = -1 \times \frac{0}{2} = 0.$$

5.

$a)\ f(x) = \operatorname{tg}\left(\sqrt{\operatorname{cotg}(7x)}\right)\ ;\ \ determinar\ f'(x)$

$*\ Sejam\ u = 7x\ , v = \operatorname{cotg} u\ \ , z = \sqrt{v}\ e\ y = f(z) = \operatorname{tg} z$

$-Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{dz}{dv} \cdot \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = (7) \cdot (-\operatorname{cossec}^2(u)) \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot (\sec^2(z))$$

$$f'(x) = (7) \cdot (-\operatorname{cossec}^2(7x)) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{cotg}(7x)}} \cdot \left(\sec^2\left(\sqrt{\operatorname{cotg}(7x)}\right)\right)$$

$b)\ g(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot \arccos x\ \ ; determinar\ g'(x)$

$g'(x) = D_x\left[\sqrt{1 - x^2}\right] \cdot \arccos x + \sqrt{1 - x^2} \cdot D_x[\arccos x]$

$g'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot \arccos x + \sqrt{1 - x^2} \cdot \left(\dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

$g'(x) = -\dfrac{x . \arccos x + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$

6.5 3ª Avaliação-20 de Maio de 2011

1.

$* \, Variação \; da \; área \; do \; círculo \; \frac{dA_c}{dt} = \sqrt{3}\pi \; m^2/s$

$* \, Área \; do \; círculo{:} \; A_c = \pi r^2$

$* \, Sobre \; triângulo \; equilátero \; de \; lado \; "l" \; , inscrito \; num \; círculo, temos{:}$

$l = r\sqrt{3} \; , onde \; r \; é \; o \; raio \; do \; círculo.$

$* \, Área \; do \; triângulo \; equilátero{:} \; A_t = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \; \Rightarrow A_t = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} \; ;$

$$\frac{dA_c}{dt} = \frac{dA_c}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\sqrt{3}\pi = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2r}$$

$-Usando \; essa \; informação \; na \; situação \; do \; triângulo \; equilátero, temos{:}$

$$\frac{dA_t}{dt} = \frac{dA_t}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA_t}{dt} = \frac{3r\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2r}$$

$$\frac{dA_t}{dt} = \frac{9}{4} m^2/s$$

2.

$a) \; y = 20. \cosh\left(\frac{x}{20}\right) - 15 \; ; determinar \; y'(7).$

$y'(x) = 20. \frac{1}{20}. \operatorname{senh}\left(\frac{x}{20}\right) \; ; \quad y'(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{20}\right)$

$y'(7) = \operatorname{senh}\left(\frac{7}{20}\right) = \frac{e^{\frac{7}{20}} - e^{-\frac{7}{20}}}{2};$

$b) \; Mostrar \; que \; (\operatorname{senh} x + \cosh x)^n = \operatorname{senh}(nx) + \cosh(nx).$

$$(\operatorname{senh} x + \cosh x)^n = \operatorname{senh}(nx) + \cosh(nx)$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^n = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} + \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2}$$

$$\left(\frac{2e^x}{2}\right)^n = \frac{2e^{nx}}{2}$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

$$e^{nx} = e^{nx}$$

$* \, Logo, (\operatorname{senh} x + \cosh x)^n = \operatorname{senh}(nx) + \cosh(nx)$

3.

$a) \; Volume \; de \; uma \; semi-esfera{:} \; V = \frac{2}{3}\pi r^3 \; ; r = 25m \; ; dr = 0{,}05cm$

$Sobre \; diferenciais \; temos{:}$

$$dV = V'(r). dr \; \; e \; \Delta V = V(r + dr) - V(r)$$

$Sabemos\ que\ em\ diferenciais\ dV \cong \Delta V, e\ se\ queremos\ estimar\ o\ valor\ de\ \Delta V$ $basta\ calcularmos\ dV.$

$$dV = V'(r).dr$$
$$dV = (2\pi r^2).dr$$
$$dV = 2\pi(25)^2.(0{,}0005)$$
$$dV = 2\pi(625)(0{,}0005)$$
$$dV = 0{,}625\pi\ m^3$$

$*$ $Logo, a\ quantidade\ necessária\ para\ aplicar\ uma\ camada\ de\ 0{,}05cm\ de\ tinta$ $é\ aproximadamente\ 0{,}625\pi\ m^3.$

$b)\ f(x) = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\ ; encontrar\ os\ números\ críticos\ de\ f.$

$*$ $Domínio\ de\ f(x)$:

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$*$ $Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f\ é\ um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde\ ou$ $f'(c) = 0\ ou\ f'(c)\ não\ existe.$

$$f'(x) = \frac{\cos x\,(1-\operatorname{sen} x) - (1+\operatorname{sen} x)(-\cos x)}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x\,[1-\operatorname{sen} x + 1 + \operatorname{sen} x]}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$$

$\rightarrow$ $Note\ que\ f'(x)\ não\ existe\ para\ x = \dfrac{\pi}{2} \pm 2k\pi\ , porém, não\ pertence\ ao\ domínio$ $de\ f.$

$*$ $Logo, devemos\ procurar\ onde\ f'(x) = 0.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0\ , com\ x \neq \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}$$

$*$ $Portanto, temos\ que\ x = \dfrac{3\pi}{2} \pm 2k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}.$

$*$ $Logo, os\ números\ críticos\ ocorrem\ \forall x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{3\pi}{2} \pm 2k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}.$

4.

$$y = \frac{e^{-3x}.\sqrt{2x-5}}{(6-5x)^4}\ ; determinar\ \frac{dy}{dx}.$$

$$\ln y = \ln\left[\frac{e^{-3x}.\sqrt{2x-5}}{(6-5x)^4}\right]$$

$$\ln y = \ln e^{-3x} + \ln\sqrt{2x-5} - \ln(6-5x)^4$$

$$\ln y = -3x + \frac{1}{2}\ln(2x-5) - 4\ln(6-5x)$$

$*$ $Por\ diferenciação\ logarítmica, temos$:

$$\frac{y'}{y} = -3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(2x-5)} - 4\cdot\frac{(-5)}{(6-5x)}$$

$$\frac{y'}{y} = -3 + \frac{1}{2x-5} + \frac{20}{6-5x}$$

$$y' = y\cdot\left[-3 + \frac{1}{2x-5} + \frac{20}{6-5x}\right]$$

$$y' = \frac{e^{-3x}.\sqrt{2x-5}}{(6-5x)^4} \cdot \left[-3 + \frac{1}{2x-5} + \frac{20}{6-5x}\right]$$

5.

$f(x) = \log_2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)\right]$; *Determinar os valore máximo e mínimo absolutos no intervalo* $-\frac{\sqrt{6}}{6} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$*$ *Pelo Método do Intervalo Fechado, temos*:

1) *Os valores de f nos extremos do intervalo*:

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \log_2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \log_2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \log_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \log_2(\sqrt{3}) - 1.$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \log_2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \log_2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \log_2(1) = 0.$$

2) *Os valores de f nos números críticos*:

$*$ *Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

$$f'(x) = (x\pi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \ln(2)}$$

$$f'(x) = \frac{x\pi.\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)}{\ln(2)};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\pi.\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$*$ *Daí, temos* $x = 0$ *e* $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, *resolvendo*:

$*$ *Obs*: *se* $-\frac{\sqrt{6}}{6} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, *então* ; $\frac{\pi}{3} \leq \left(\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\pi}{2}$;

$*$ *Assim, notamos com facilidade que* $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;

$*$ *Portanto*, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$*$ *Calculando $f(0)$, temos*:

$$f(0) = \log_2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \log_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \log_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

$-$*Comparando todos os valores encontrados, temos*:

$f(0)$ é *o valor mínimo absoluto e* $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é *o valor máximo absoluto.*

6.6 3ª Avaliação-21 de Maio de 2011

1.

$a)\ f(x) = \log_3\left[\frac{e^{3x}.\sqrt{x}}{(3x-4)^5}\right]\ ; determinar\ f'(x).$

$f(x) = \log_3 e^{3x} + \log_3 \sqrt{x} - \log_3 (3x-4)^5$

$f(x) = \log_3 e^{3x} + \frac{1}{2}\log_3 x - 5\log_3(3x-4)$

$f'(x) = 3.\frac{e^{3x}}{e^{3x}.\ln(3)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x.\ln(3)} - 5.\frac{3}{(3x-4).\ln(3)}$

$f'(x) = \frac{3}{\ln(3)} + \frac{1}{2x.\ln(3)} - \frac{15}{(3x-4).\ln(3)}$

$f'(x) = \frac{1}{\ln(3)}\cdot\left[3 + \frac{1}{2x} - \frac{15}{(3x-4)}\right]$

$b)\ Estimar\ \operatorname{tg} 46°\ ; usando\ aproximação\ linear:$

$Seja\ f(x) = \operatorname{tg} x\ ; queremos\ calcular\ f\left(\frac{46\pi}{180}\right), x\ em\ radianos!!!$

$$L(x) - f(a) = f'(a).(x-a)$$

$$L(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$L(x) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \sec^2\frac{\pi}{4}.\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$L(x) - 1 = 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$L(x) = 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 1$$

$$L\left(\frac{46\pi}{180}\right) = 2\left(\frac{\pi}{180}\right) + 1$$

$$L\left(\frac{46\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{90} + 1$$

$$\operatorname{tg} 46° \cong \frac{\pi}{90} + 1$$

2.

$a)Se\ y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)\ ; mostrar\ que\ \sec x = \cosh y\ ;$

$$\cosh y = \frac{e^{\ln(\sec x+\operatorname{tg} x)} + e^{-\ln(\sec x+\operatorname{tg} x)}}{2} = \frac{\sec x + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\sec x + \operatorname{tg} x}}{2} =$$

$$\frac{(\sec x + \operatorname{tg} x)^2 + 1}{2(\sec x + \operatorname{tg} x)} = \frac{\sec^2 x + 2\sec x.\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + 1}{2(\sec x + \operatorname{tg} x)} = \frac{2\sec^2 x + 2\sec x.\operatorname{tg} x}{2(\sec x + \operatorname{tg} x)} =$$

$$\frac{2\sec x\,(\sec x + \operatorname{tg} x)}{2(\sec x + \operatorname{tg} x)} = \frac{2\sec x}{2} = \sec x.$$

$Logo, \sec x = \cosh y\ \ se\ y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x).$

$b)\ y = A.\operatorname{senh}(mx) + B.\cosh(mx)\ ;\ \ y'' = m^2 y.$

$y' = m.A.\cosh(mx) + m.B.\operatorname{senh}(mx)$

$y'' = m^2.A.\operatorname{senh}(mx) + m^2.B.\cosh(mx)$

$y'' = m^2.(A.\operatorname{senh}(mx) + B.\cosh(mx))$
$y'' = m^2 y.$

3.

$$y = \frac{e^{-2x}.(2-x^3)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+x^2}} \text{ ; } determinar\ \frac{dy}{dx}\ por\ diferenciação\ logarítmica.$$

$$\ln y = \ln\left[\frac{e^{-2x}.(2-x^3)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$\ln y = \ln e^{-2x} + \ln(2-x^3)^{\frac{3}{2}} - \ln\sqrt{1+x^2}$$

$$\ln y = -2x + \frac{3}{2}\ln(2-x^3) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$*$ *Por diferenciação logarítmica, temos:*

$$\frac{y'}{y} = -2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{(-3x^2)}{(2-x^3)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(1+x^2)}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{2}\left[4 + \frac{9x^2}{(2-x^3)} + \frac{2x}{(1+x^2)}\right]$$

$$y' = -\frac{1}{2}y\left[4 + \frac{9x^2}{(2-x^3)} + \frac{2x}{(1+x^2)}\right]$$

$$y' = -\frac{e^{-2x}.(2-x^3)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot\left[4 + \frac{9x^2}{(2-x^3)} + \frac{2x}{(1+x^2)}\right]$$

4. *A diagonal do cubo está variando a uma taxa de* $\frac{dd}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{3} cm/s$
Determinar a raxa de variação do volume do cubo.
$*$ *diagonal do cubo* : $d = l\sqrt{3}$, *onde "l" é aresta do cubo.*
−Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dd}{dt} = \frac{dd}{dl}\cdot\frac{dl}{dt}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\cdot\frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{3} cm/s$$

$*$ *volume do cubo*: $V = l^3$;
−Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dl}\cdot\frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = (3l^2)\cdot\frac{1}{3}$$

$$\frac{dV}{dt} = l^2$$

−Quando $l = 3cm$, *temos:*

$$\frac{dV}{dt} = 9cm^3/s$$

5.

$a)\ f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}} + 2$; *determinar os valores máximo e mínimo absolutos no intervalo fechado* $[0, 9]$.

$*$ *Domínio da função*:

$D(f) = \mathbb{R}$

$-$*Pelo Método do Intervalo Fechado, temos*:

1) *Os valores de* f *nos extremos no intervalo*:

$f(0) = (-1)^{\frac{2}{3}} + 2 = 1 + 2 = 3.$

$f(9) = (8)^{\frac{2}{3}} + 2 = 4 + 2 = 6.$

2) *Os valores de* f *nos números críticos*:

$*$ *Um número crítico de uma função* f é *um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe*.

$f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$; *não temos* $f'(x) = 0$ *nesse caso*!

$*$ $f'(x)$ *não existe em* $x = 1$, *e como* $x = 1$ *pertence ao domínio de* f, *então* $x = 1$ é *um número crítico de* f.

$f(1) = (0)^{\frac{2}{3}} + 2 = 0 + 2 = 2.$

$-$*Comparando os valores encontrados, concluímos que*:

$f(9)$ é *o valor máximo absoluto e* $f(1)$ é *o valor mínimo absoluto no intervalo fechado* $[0, 9]$.

$b)\ f(x) = (x+5)^2 . \sqrt[3]{x-4}$; *encontrar os números críticos de* f.

$*$ *Domínio da função* $f(x)$:

$D(f) = \mathbb{R}$

$*$ *Um número crítico de uma função* f é *um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe*.

$$f'(x) = 2(x+5).\sqrt[3]{x-4} + \frac{(x+5)^2}{3\sqrt[3]{(x-4)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{6(x+5)(x-4) + (x+5)^2}{3\sqrt[3]{(x-4)^2}}$$

$\rightarrow$ *Note que* $f'(x)$ *não existe em* $x = 4$, *e como* $x = 4$ *pertence ao domínio de* f, 4 é *um número crítico de* f.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x+5)(x-4) + (x+5)^2 = 0$

$(x+5)(6x - 24 + x + 5) = 0$

$(x+5)(7x - 19) =$

$x = -5$ *e* $x = \dfrac{19}{7}$;

$\rightarrow$ *Logo, os números críticos de* f *são*: $-5, \dfrac{19}{7}$ *e* 4.

6.7 4ª Avaliação-17 de Junho de 2011

1.

$a)\ \lim_{x\to 1^+}(\ln x)^{\mathrm{sen}(\pi x)} = \lim_{x\to 1^+} e^{\ln(\ln x)^{\mathrm{sen}(\pi x)}} = \lim_{x\to 1^+} e^{\sin(\pi x).\ln(\ln x)} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\sin(\pi x).\ln(\ln x)};$

$*\ Calculando\ o\ limite\ do\ expoente, temos:$

$$\lim_{x\to 1^+}\sin(\pi x)\,.\ln(\ln x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{\sin(\pi x)}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}}{-\pi.\frac{\cos(\pi x)}{\mathrm{sen}(\pi x)}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\mathrm{tg}(\pi x)}{-\pi x.\ln x} =$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\pi.\sec^2(\pi x)}{-\pi(\ln x+1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sec^2(\pi x)}{-(\ln x+1)} = \frac{\sec^2\pi}{-(\ln 1+1)} = \frac{(-1)^2}{-(0+1)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

$*\ Assim, temos:$

$$\lim_{x\to 1^+}(\ln x)^{\mathrm{sen}(\pi x)} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\sin(\pi x).\ln(\ln x)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$b)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\ ;\ \ façamos\ a\ substituição\ x = 2n\ , se\ x\to\infty, então\ n\to\infty. Logo,$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 =$$

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = e^2\ ;$$

2.

$V(x) = x.(8-2x).(15-2x)$

$V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$

$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120$

$V'(x) = 4(3x^2 - 23x + 30)$

$3x^2 - 23x + 30 = 0\ ;\ \Delta = 169$

$x = \dfrac{23\pm 13}{6}\ ;\ \ x = 6\ ou\ x = \dfrac{5}{3}$

$\to Estudando\ o\ sinal\ de\ V'(x), temos:$

$+ + + + + + + \left(\frac{5}{3}\right) - - - - - - - - (\ 6\ ) + + + + + +\ \ V'(x) = 12x^2 - 92x + 120$

$-Com\ a\ análise\ acima, concluímos\ que\ obtemos\ o\ maior\ volume\ para\ x = \dfrac{5}{3}cm$
$que\ o\ ponto\ de\ máximo\ local.$

3.

$a)\ Seja\ f\ uma\ função\ que\ satisfaça\ as\ seguintes\ hipóteses:$

$1)\ f\ é\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [a,b]\ ;$

$2)\ f\ é\ diferenciável\ no\ intervalo\ aberto\ (a,b)\ ;$

$3)\ f(a) = f(b)$

$Então\ existe\ algum\ \ c\in(a,b)\ tal\ que\ f'(c) = 0.$

$b)\ f(x) = \mathrm{sen}^2 x - 3x - 5\ ; quantas\ raízes\ reais\ possui\ f\ ?$

$*\ f'(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x\,.\cos x - 3\ ; f'(x) = \mathrm{sen}(2x) - 3$

$\to Note, que\ f'(x) < 0\ \forall x\in\mathbb{R}, pois,$

$$-1 \le \mathrm{sen}(2x) \le 1$$

$$-1-3 \leq \operatorname{sen}(2x)-3 \leq 1-3$$
$$-4 \leq f'(x) \leq -2$$
$\rightarrow$ *Assim, temos que* $\nexists x \in \mathbb{R} \mid f'(x)=0$. *Logo, f possui, no máximo, uma raíz real. Provemos:*

$f(-\pi)=3\pi-5$; $f(-\pi)>0$

$f(0)=-5$; $f(0)<0$

$*$ *Como f é uma soma de funções contínuas e, portanto, f também é uma função contínua, temos que f é contínua em $[-\pi, 0]$ e $f(0)<0<f(-\pi)$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f(c)=0$. Logo, f possui uma raíz real.*

$\rightarrow$ *Suponhamos que f possua duas raízes reais b e c, tal que $f(b)=f(c)=0$, com $b \neq c$. E ainda, f é contínua em $[b, c]$ e diferenciável em (b, c), então pelo Teorema de Rolle, existe algum $x \in (b, c)$ tal que $f'(x)=0$. No entanto, já vimos que $f'(x)$ não possui raíz real e, portanto, f possui exatamente uma raíz real.*

4.
$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$
$*$ *Domínio da função $f(x)$:*
$$D(f)=\{x \in \mathbb{R} \mid x>0\}$$
1) *Interseções com os eixos coordenados:*

$-$*Pelo domínio da função, não podemos ter $x=0$. Logo, vamos verificar a interseção com o eixo x:*

$f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{x}=0 \Rightarrow \ln x=0 \;\therefore x=1.$ *ponto* $(1,0)$

2) *Assíntotas:*

$-$*Verticais: Dizemos que a reta $x=a$ é uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos,*
$$\lim_{x \to a^+} f(x)=\pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x)=\pm\infty$$
$*$ *Verificando no ponto de descontinuidade da função, ou seja, em $x=0$.*

$*$ *Obs: note que não há sentido em calcular $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, pois a função f está definida para $x>0$. Logo, calculamos $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.*
$$\lim_{x \to 0^+} f(x)=\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x}=-\infty$$
$*$ *Obs: se usarmos a Regra de L'Hôspital, o limite acima teria como resultado $+\infty$. No entanto, observe que se $x \to 0^+$, $\ln x \to -\infty$, e ainda, a derivada de $\ln x$ existe para qualquer $x \neq 0$, enquanto que $\ln x$ existe apenas para $x>0$. Por isso, devemos ter cuidado ao usar essa regra em alguns casos.*

$-$*Logo, a reta $x=0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $f(x)$.*

$-$*Horizontais: Dizemos que a reta $y=a$ é uma assíntota horizontal se ocorrer um dos seguintes casos,*
$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=a \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)=a$$
$*$ *Obs: Note que não há sentido em calcular $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, pois f está definida para $x>0$. Logo, calculamos $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$-Logo, a\ reta\ y = 0$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

3) $Crescimento\ e\ Decrescimento$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2}\ ;\ f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$-Analisando\ o\ comportamento\ (sinal)\ de\ f'(x), temos$:

$+ + + + + + + + + + + (e) - - - - - - - - - - - -$	$(1-\ln x)$
$+ + + + (0) + + + + + + + + + + + + + + + + + + +$	x^2
$+ + + + (0) + + + + + (e) - - - - - - - - - - - -$	$f'(x) = (1-\ln x)/x^2$

$-Com\ essa\ análise\ acima, concluímos\ que$:

f é $crescente\ em\ (0, e)\ e$

f é $decrescente\ em\ (e, +\infty)$

4) $Máximos\ e\ mínimos\ locais$:

$-Pela\ análise\ de\ f'(x)\ temos\ um\ ponto\ de\ máximo\ local\ em\ x = e. Logo,$

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}\ ;\quad ponto\ \left(e, \frac{1}{e}\right).$$

5) $Concavidades$:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}.x^2 - (1-\ln x).(2x)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-x - 2x(1-\ln x)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

$-Analisando\ o\ sinal\ de\ f''(x), temos$:

$- - - - - - - - - - - - \left(e^{\frac{3}{2}}\right) + + + + + + + + + + +$	$2\ln x - 3$
$- - - - - (0) + + + + + + + + + + + + + + + + + + +$	x^3
$+ + + + + (0) - - - - \left(e^{\frac{3}{2}}\right) + + + + + + + + + + +$	$f''(x) = (2\ln x - 3)/x^3$

$-Da\ análise\ acima, concluímos\ que$:

$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ em\ \left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)\ e$

$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ baixo\ em\ \left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$

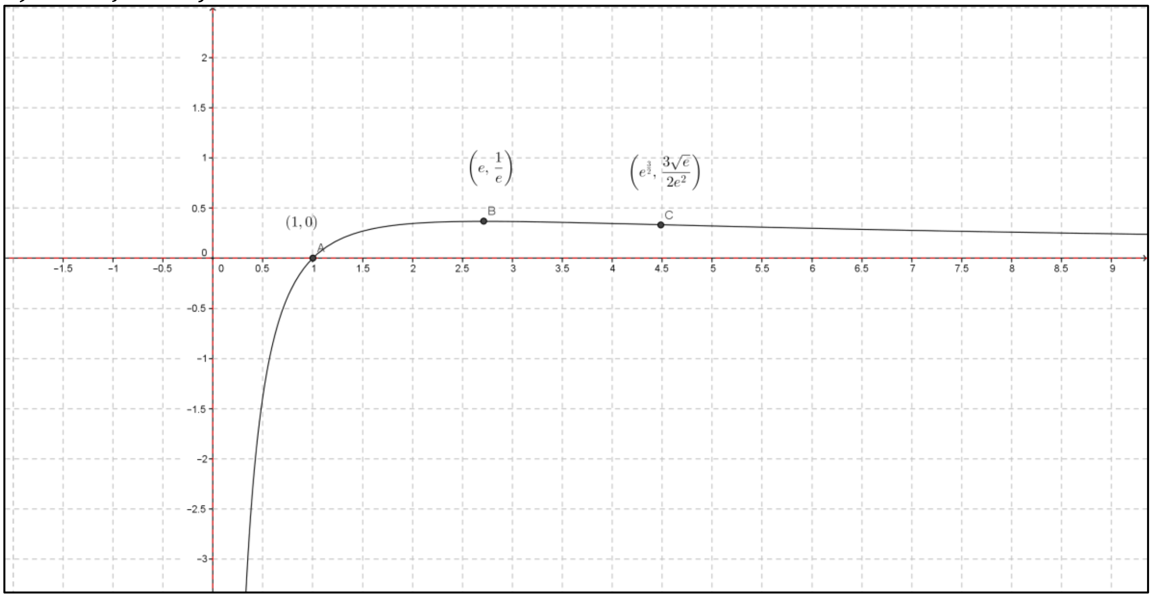
6) $Pontos\ de\ Inflexão$:

$*\ Os\ pontos\ de\ inflexão\ ocorrem\ quando\ há\ mudança\ de\ direção\ da\ concavidade.$

$\rightarrow Essa\ mudança\ ocorre\ em\ x = e^{\frac{3}{2}}, visto\ que, x = 0$ não $pertence\ ao\ domínio\ da\ função.$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{e^3}} = \frac{3}{2e\sqrt{e}} = \frac{3\sqrt{e}}{2e^2}\ ;\ ponto\ \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3\sqrt{e}}{2e^2}\right).$$

7) *Esboço Gráfico*:



5.

$a)$ *Mostrar que a reta* $y = 2x$ é *a assíntota oblíqua da função* $f(x) = 2x + \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$;

$-$*Dizemos que a reta* $y = ax + b$ é *uma assíntota oblíqua (inclinada) se,*

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$$

$*$ *Com isso, ...*

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - 2x] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[2x + \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} - 2x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt[3]{x}}}{1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

$*$ *Portanto, a reta* $y = 2x$ é *uma assíntota oblíqua ao gráfico de* $f(x)$.

$b)$ $f(x) = \arccos(\cos x)$; *para* $0 \le x \le \pi$. *Esboçar o gráfico de* $f(x)$!

$$f'(x) = (-\operatorname{sen} x) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|};$$

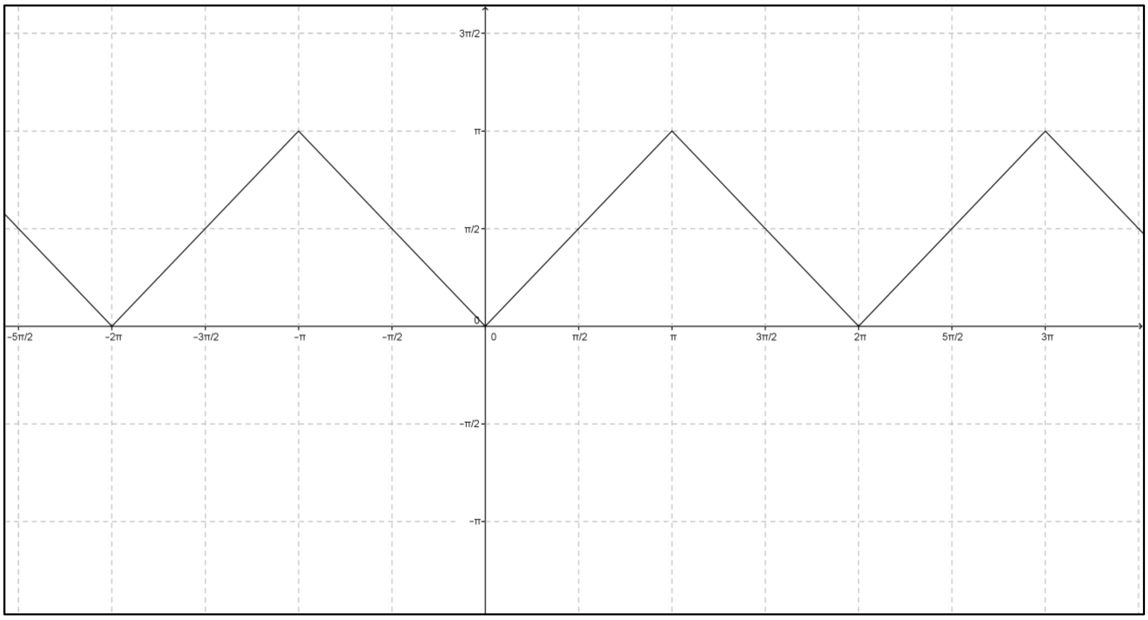
$*$ *Nos pontos onde* $f'(x)$ *existe, ou* $f'(x) = 1$ *ou* $f'(x) = -1$.

$*$ *Temos, portanto, que*:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & se\ \operatorname{sen} x \ge 0 \\ -1, & se\ \operatorname{sen} x < 0 \end{cases}$$

$*$ *Se considerarmos apenas o intervalo* $[0, \pi]$, *ou seja,* $\operatorname{sen} x \ge 0$ *nesse intervalo, então,* $f(x) = \arccos(\cos x) = x$.

$*$ *Observe o gráfico de* $f(x)$ *a seguir*.



3π/2
π
π/2
0
-π/2
-π
-5π/2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π

6.8 4ª Avaliação-18 de Junho de 2011

1.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{e^{2x}-1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-2x-1}{2x(e^{2x}-1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2e^{2x}-2}{2(e^{2x}-1)+4xe^{2x}}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4e^{2x}}{4e^{2x}+4e^{2x}+8xe^{2x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4e^{2x}}{8e^{2x}+8xe^{2x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4e^{2x}}{8e^{2x}(1+x)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2(1+x)}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}e^{\ln(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{tg}x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}e^{\operatorname{tg}x.\ln(\operatorname{sen}x)}=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg}x.\ln(\operatorname{sen}x)};$$

$*$ *Calculando o limite do expoente, temos*:

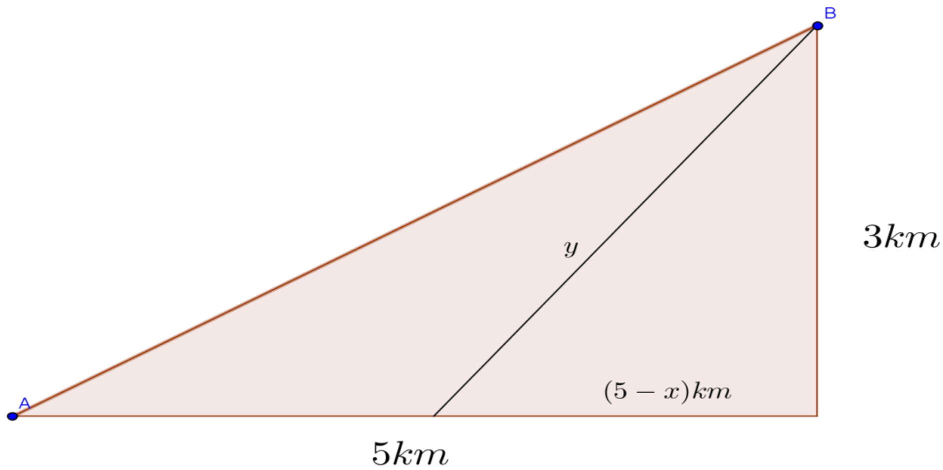
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg}x\,.\ln(\operatorname{sen}x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{cotg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}{-\operatorname{cossec}^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{sen}x\,.\cos x=1\times 0=0.$$

$*$ *Assim, obtemos*:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{tg}x}=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg}x.\ln(\operatorname{sen}x)}=e^0=1.$$

2. *Ilustração do problema*:



$*$ *Cada quilômetro na extensão horizontal custa R\$200.000,00 , enquanto que cada quilômetro na direção inclinada, ou transversal, custa R\$400.000,00.*

$-$*Da ilustração acima, temos*:

$$y^2=3^2+(5-x)^2$$
$$y^2=9+25-10x+x^2$$
$$y=\sqrt{x^2-10x+34}$$

$*$ *Logo, a expressão do custo total da obra é*:

$C=4\times 10^5 y+\ 2\times 10^5 x$

$C(x)=4\times 10^5\sqrt{x^2-10x+34}+2\times 10^5 x$

$$C'(x) = \frac{4 \times 10^5(2x - 10)}{2\sqrt{x^2 - 10x + 34}} + 2 \times 10^5$$
$$C'(x) = \frac{2 \times 10^5(2x - 10)}{\sqrt{x^2 - 10x + 34}} + 2 \times 10^5$$
$-Fazendo\ C'(x) = 0, obtemos:$
$$\frac{2 \times 10^5(2x - 10)}{\sqrt{x^2 - 10x + 34}} + 2 \times 10^5 = 0 \Rightarrow \frac{2 \times 10^5(2x - 10)}{\sqrt{x^2 - 10x + 34}} = -2 \times 10^5$$
$$\frac{(2x - 10)}{\sqrt{x^2 - 10x + 34}} = -1 \Rightarrow (-2x + 10) = \sqrt{x^2 - 10x + 34} \Rightarrow$$
$$4x^2 - 40x + 100 = x^2 - 10x + 34$$
$$3x^2 - 30x + 66 = 0$$
$$x^2 - 10x + 22 = 0$$
$$\Delta = 100 - 88 = 12$$
$$x = \frac{10 \pm \sqrt{12}}{2} \rightarrow x = \frac{10 \pm 2\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = 5 \pm \sqrt{3}\,;$$
$*\ Note\ que\ x = 5 + \sqrt{3}\ não\ é\ possível, pois\ 0 \leq x \leq 5\ e, também, para\ esse\ valor\ não\ temos\ C'(x) = 0, observe:$
$$\frac{2 \times 10^5\left(2\left(5 + \sqrt{3}\right) - 10\right)}{\sqrt{\left(5 + \sqrt{3}\right)^2 - 10\left(5 + \sqrt{3}\right) + 34}} + 2 \times 10^5 = \frac{2 \times 10^5\left(2\sqrt{3}\right)}{\sqrt{12}} + 2 \times 10^5 = 4 \times 10^5.$$

$\rightarrow Logo, temos\ como\ solução\ x = \left(5 - \sqrt{3}\right)km$
$*\ Calculando\ o\ custo\ da\ obra\ para\ esse\ valor\ de\ x, temos:$
$$C(x) = 4 \times 10^5\sqrt{x^2 - 10x + 34} + 2 \times 10^5 x$$
$$C\left(5 - \sqrt{3}\right) = 4 \times 10^5\sqrt{\left(5 - \sqrt{3}\right)^2 - 10\left(5 - \sqrt{3}\right) + 34} + 2 \times 10^5\left(5 - \sqrt{3}\right)$$
$$C\left(5 - \sqrt{3}\right) = 4 \times 10^5\sqrt{12} + 2 \times 10^5\left(5 - \sqrt{3}\right)$$
$$C\left(5 - \sqrt{3}\right) = 8 \times 10^5\sqrt{3} + 10 \times 10^5 - 2 \times 10^5\sqrt{3}$$
$$C\left(5 - \sqrt{3}\right) = 6 \times 10^5\sqrt{3} + 10 \times 10^5$$
$$C\left(5 - \sqrt{3}\right) = 2 \times 10^5\left(3\sqrt{3} + 5\right)\ reais.$$

$\rightarrow Devemos\ verificar\ se\ este\ é\ o\ menor\ custo\ possível, verificando\ os\ valores\ do\ custo\ para\ x = 0\ e\ x = 5, temos:$
$$C(0) = 4 \times 10^5\sqrt{34}\ reais.$$
$$C(5) = 4 \times 10^5(3) + 2 \times 10^5(5)$$
$$C(5) = 22 \times 10^5\ reais.$$

$-Com\ esses\ dados, temos\ que\ C\left(5 - \sqrt{3}\right)\ é\ o\ menor\ valor\ possível\ de\ custo\ da\ obra.$
$.*\ Menor\ custo = R\$200.000{,}00 \times \left(3\sqrt{3} + 5\right)$

3.
$a)\ f(x) = 3x + 2\cos x + 5\,; mostrar\ que\ f\ possui\ exatamente\ uma\ raíz\ real.$
$*\ Calculemos\ f(0)\ e\ f(-\pi);$
$$f(0) = 7\ ;\quad f(0) > 0$$
$$f(-\pi) = -3\pi + 3\,; f(-\pi) < 0$$

$* \, Como \; f$ é $uma \; soma \; de \; funções \; contínuas \; e, portanto, f \; também$ é $uma \; função \; contínua.$
$* \, f$ é $contínua \; no \; intervalo \; fechado \; [-\pi, 0] \; e \; f(-\pi) < 0 < f(0). Assim, pelo \; Teorema \; do \; Valor \; Intermediário, existe \; algum$ número $c \; em \; (-\pi, 0) \; tal \; que \; f(c) = 0. Logo, f \; possui \; uma \; raíz \; real.$
$-Suponhamos \; que \; f \; possua \; duas \; raízes \; reais \; c \; e \; b, tais \; que \; f(b) = f(c) = 0, com \; b \neq c. Como \; f$ é $contínua \; em \; [b, c] \; e \; diferenciável \; em \; (b, c), pelo \; Teorema \; de \; Rolle, existe \; algum \; x \in (b, c) \; tal \; que \; f'(x) = 0.$

$f'(x) = -2\operatorname{sen} x + 3 \; ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{3}{2} \; ;$

$* \, Como - 1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, então \; f'(x) \; não \; possui \; raíz \; real \; e, consequentemente, f \; possui \; exatamente \; uma \; raíz \; real.$

$b)A \; questão \; faz \; referência \; ao \; corolário \; citado \; a \; seguir:$
"$Se \; f'(x) = g'(x) \; para \; todo \; x \; em \; um \; intervalo \; (a, b), então \; f - g$ é $constante \; em \; (a, b); isto$ é, $f(x) = g(x) + c, onde \; c$ é $uma \; constante.$"

$* \, Seja \; F(x) = f(x) - g(x). Então,$

$$F'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$Se \; F'(x) = 0, para \; todo \; x \; em \; (a, b), então:$

$$f'(x) - g'(x) = 0$$
$$f'(x) = g'(x) \;\; ; para \; todo \; x \; em \; (a, b)$$

$* \, Se \; F'(x) = 0 \; para \; todo \; x \; em \; um \; intervalo \; (a, b), então \; F$ é $constante \; em \; (a, b).$ $Isto$ é, $f - g$ é $constante. Logo, para \; todo \; x \; em \; (a, b), temos \; f(x) = g(x) + C, onde \; C$ é $uma \; constante.$

$4. f(x) = x.e^{-x^2} \; ; fazer \; o \; esboço \; do \; gráfico \; de \; f(x).$
$* \, Domínio \; da \; função:$
$D(f) = \mathbb{R};$
1) $Interseções \; com \; os \; eixos \; coordenados:$
$f(0) = 0.e^0 = 0.$
$f(x) = 0 \Rightarrow x.e^{-x^2} = 0 \therefore x = 0. ponto \; (0, 0).$

2) $Assíntotas:$
$\rightarrow Não$ há $assíntotas \; verticais \; ao \; gráfico \; de \; f(x), pois \; f$ é $contínua \; nos \; reais.$ $Logo, não$ há $pontos \; de \; descontinuidade \; infinita.$

$-Horizontais: Dizemos \; que \; a \; reta \; y = a$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; se \; ocorrer \; um \; dos \; seguintes \; casos,$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x.e^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x.e^{x^2}} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x.e^{-x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x.e^{x^2}} = 0$$

$-Logo, a \; reta \; y = 0$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$
3) $Crescimento \; e \; Decrescimento:$

$$f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$$

$-Analisando\ o\ sinal\ de\ f'(x), temos:$

$+ \quad e^{-x^2}$

$- - - - - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + + + + + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - - - - - - \quad (1-2x^2)$

$- - - - - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + + + + + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - - - - - - \quad f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$

$-Da\ análise\ acima, concluímos\ que:$

f é $crescente\ em\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ e$

f é $decrescente\ em\ \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$

4) $Máximos\ e\ mínimos\ locais:$

$*\ Pela\ análise\ de\ f'(x), temos:$

$Em\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ temos\ um\ ponto\ de\ mínimo\ local\ e\ em\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ temos\ um\ ponto\ de\ máximo\ local.$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2e}} \quad ;\ ponto\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right);$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}} \quad ;\ ponto\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right);$

5) $Concavidades:$

$f''(x) = e^{-x^2}(-4x) + \left(-2xe^{-x^2}\right)(1-2x^2)$

$f''(x) = e^{-x^2}(4x^3 - 6x)$

$f''(x) = 2x.e^{-x^2}(2x^2 - 3)$

$-Analisando\ o\ sinal\ de\ f''(x), temos:$

$- - - - - - - - - - - - (\ 0\ ) + + + + + + + + + + + \quad 2x$

$+ \quad e^{-x^2}$

$+ + + + \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) - - - - - - - - - - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + + + + \quad (2x^2 - 3)$

$- - - - \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + + + (\ 0\ ) - - - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + + + + \quad f''(x) = e^{-x^2}(4x^3 - 6x)$

$-Com\ essa\ análise, concluímos\ que:$

$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ em\ \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)\ e$

$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ baixo\ em\ \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$

6) $Pontos\ de\ Inflexão:$

$*\ Os\ pontos\ de\ inflexão\ ocorrem\ quando\ há\ mudança\ de\ direção\ da\ concavidade$

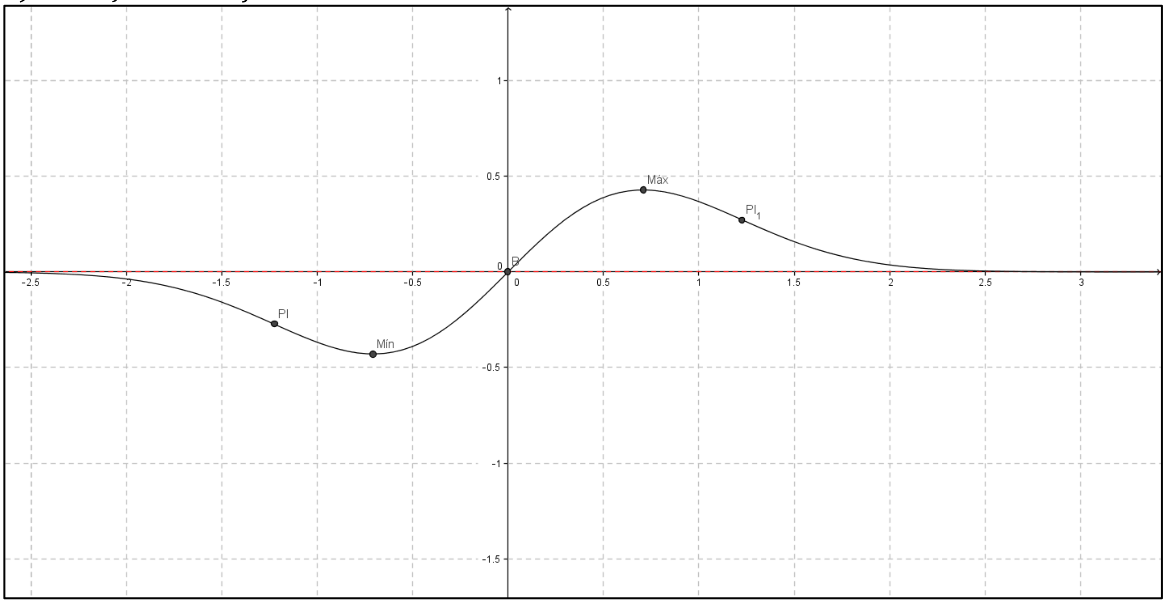
$* \; Logo, os\ pontos\ de\ inflexão\ ocorrem\ em\ x = -\sqrt{\frac{3}{2}}\ , x = 0\ e\ em\ x = \sqrt{\frac{3}{2}}\ ;$

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\ . e^{-\frac{3}{2}} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{e\sqrt{e}} = -\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}}\ ;$$

$f(0) = 0;$

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}\ . e^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{e\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}}\ ;$$

7) $Esboço\ do\ Gráfico$:



5. $f(x) = ax. e^{bx^2}\ ;\ \ f(2) = 1\ \ e\ f'(2) = 0.$

$f(2) = 2a. e^{4b} = 1\ \ \ (I)$

$f'(x) = \ e^{bx^2}(a + 2abx^2); f'(2) = e^{4b}(a + 8ab) = 0\ \ (II)$

$-Da\ equação\ (II), temos$:

$a + 8ab = 0 \rightarrow a(1 + 8b) = 0\ \ \therefore ou\ a = 0\ ou\ b = -\frac{1}{8}\ ;$

$* \; Note\ que\ a = 0\ não\ satisfaz\ a\ equação\ (I). Portanto, temos\ b = -\frac{1}{8}.$

$-Substituindo\ o\ valor\ de\ b\ na\ equação\ (I), obtemos$:

$2a. e^{-\frac{1}{2}} = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}\sqrt{e}\ ;$

6.9 Reavaliação AB1-22 de Junho de 2011

$1. x^2 - y^2 = 2x + 4y\ ; determinar\ os\ pontos\ onde\ a\ reta\ tangente\ é\ horizontal.$

$*\ Por\ derivação\ implícita, temos:$

$2x - 2yy' = 2 + 4y'$

$x - yy' = 1 + 2y'$

$y' = \frac{x-1}{y+2}\ ; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1\ e\ y \neq -2;$

$-Substituindo\ x = 1\ na\ expressão\ da\ curva, temos:$

$$1 - y^2 = 2 + 4y$$
$$y^2 + 4y + 1 = 0$$
$$\Delta = 16 - 4 = 12$$
$$y = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = -2 + \sqrt{3}\ e\ y = -2 - \sqrt{3}$$

$*\ Logo, temos\ reta\ tangente\ horizontal\ nos\ pontos\ \left(1, -2 + \sqrt{3}\right)\ e\ \left(1, -2 - \sqrt{3}\right);$

$*\ Vamos\ verificar\ se\ há\ algum\ ponto\ onde\ a\ reta\ tangente\ é\ vertical;$

$-Obs: o\ coeficiente\ angular\ de\ uma\ reta\ tangente\ vertical, se\ apresenta\ na$
$forma\ \frac{k}{0}\ , onde\ k\ é\ uma\ constante. Logo, procuramos\ algum\ ponto\ da\ curva$
$onde\ y = -2.$

$-Substituindo\ y = -2\ na\ expressão\ da\ curva, temos:$

$$x^2 - 4 = 2x - 8$$
$$x^2 - 2x + 4 = 0$$
$$\Delta = 4 - 16 = 12$$

$*\ Com\ \Delta < 0\ a\ equação\ acima\ não\ possui\ solução\ em\ \mathbb{R}\ e, portanto, não\ há\ ponto$
$da\ curva\ onde\ a\ reta\ tangente\ é\ vertical.$

2.

$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}; *\ Obs: |x-1| = \begin{cases} x-1, & se\ x \geq 1 \\ -(x-1), & se\ x < 1 \end{cases};$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2.$$

$*\ Obs: se\ x \to 1^+, x > 1\ \Rightarrow x - 1 > 0\ . Logo, |x-1| = x - 1.$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} -(x+1) = -2.$$

$*\ Obs: se\ x \to 1^-, x < 1\ \Rightarrow x - 1 < 0\ . Logo, |x-1| = -(x-1).$

$-Como\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|} \neq \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|}\ , então\ \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}\ não\ existe.$

$b)\ \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) . \cos\left(\frac{1}{x}\right)\ ;$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$
$$-\ln(1+x) \leq \ln(1+x) . \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \ln(1+x)$$

$*\ Sejam\ f(x) = -\ln(1+x)\ , g(x) = \ln(1+x) . \cos\left(\frac{1}{x}\right)\ e\ h(x) = \ln(1+x)\ , então:$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$E\ ainda,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\ \ e\ \ \lim_{x\to 0^+} h(x) = 0, ou\ seja,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x)\,.\,Assim,$ $pelo\ Teorema\ do\ Confronto, temos, portanto,$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x)\,.\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$c)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt{2}}; = \lim_{x\to 2}\left[\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{x+2}+\sqrt{2}}\right] =$

$\lim_{x\to 2} \dfrac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt[4]{x+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)} = \lim_{x\to 2}\left(\sqrt[4]{x+2}+\sqrt{2}\right) = \lim_{x\to 2}\sqrt[4]{x+2} + \lim_{x\to 2}\sqrt{2} =$

$\sqrt[4]{\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2} + \lim_{x\to 2}\sqrt{2} = \sqrt[4]{2+2}+\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}+\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

3.

$a)\ y_1 = e^{-x^2}\ \ e\ \ y_2 = e^{x^2}; Em\ quais\ pontos\ as\ retas\ tangentes\ as\ curvas\ são$ $perpendiculares?$

$*\ Procuramos\ os\ valores\ de\ x\ para\ os\ quais\ {y'}_1\cdot {y'}_2 = -1\,;$

$${y'}_1 = -2x.\,e^{-x^2}\ \ ;\ \ \ {y'}_2 = 2x.\,e^{x^2}$$

${y'}_1\cdot{y'}_2 = \left(-2x.\,e^{-x^2}\right)\left(2x.\,e^{x^2}\right) = -4x^2\,;$

$*\ Logo, {y'}_1\cdot{y'}_2 = -1 \Rightarrow -4x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{4}\ \therefore x = \pm\dfrac{1}{2}\,;$

$*\ Para\ x = \dfrac{1}{2}, temos:$

$y_1 = e^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}\ .\ ponto\ \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)\ \ ;\ \ y_2 = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}\ .\ ponto\ \left(\dfrac{1}{2},\sqrt[4]{e}\right)$

$*\ Para\ x = -\dfrac{1}{2}, temos:$

$y_1 = e^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}\ .\ ponto\ \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)\ \ ;\ \ y_2 = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}\ .\ ponto\ \left(-\dfrac{1}{2},\sqrt[4]{e}\right)$

$b)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-6x+9, & se\ x \geq 2 \\ x^2-2x+1, & se\ x < 2 \end{cases}$$

$*\ Analisar\ a\ diferenciabilidade\ de\ f\ em\ x = 2.$

$*\ f(2) = 2^2 - 6.\,(2) + 9 = 4 - 12 + 9 = 1$

${f'}_-(2) = \lim_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x+1-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x}{x-2} =$

$\lim_{x\to 2^-}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} x = 2.$

${f'}_+(2) = \lim_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-6x+9-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-6x+8}{x-2} =$

$\lim_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2^+}(x-4) = 2-4 = -2.$

$* \; Como \; f'_{-}(2) \neq f'_{+}(2)$, $temos \; que \; f$ não é $diferenciável \; em \; x = 2$.

4.

$$f(x) = \left|\frac{x^2.\cos x}{x^2+1}\right|$$

$* \; Analisar \; a \; continuidade \; de \; f.$
$* \; Obs$: $as \; expressões \; x^2 \; e \; (x^2+1) \; são \; sempre \; positivas \; para \; todo \; x \in \mathbb{R}. \; Logo,$
$podemos \; reescrever \; f(x) \; da \; seguinte \; forma$:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot |\cos x|$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+1}.\cos x, & se \cos x \geq 0 \\ -\dfrac{x^2}{x^2+1}.\cos x, & se \cos x < 0 \end{cases}$$

$* \; Vendo \; dessa \; forma, f$ é $uma \; função \; sentencial \; cujas \; sentenças \; são \; funções$ $polinomiais \; racionais \; combinadas \; com \; funções \; trigonométricas, ambas$ $contínuas \; em \; seus \; domínios. Portanto, temos \; que \; f$ é $contínua \; em \; todos \; os$ $pontos \; onde \cos x \neq 0. \; Como \; a \; função \cos x$ é $uma \; função \; periódica \; e, portanto,$ $a \; igualdade \cos x = 0 \; ocorre \; para \; os \; pontos \; onde \; x = \dfrac{\pi}{2} \pm 2k\pi \; ou \; x = \dfrac{3\pi}{2} \pm 2k\pi,$ $com \; k \in \mathbb{Z}, vamos \; analisar \; a \; continuidade \; de \; f \; em \; um \; desses \; pontos.$

$* \; Vamos \; analisar \; em \; x = \dfrac{\pi}{2}, \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi^2}{2}}{\frac{\pi^2}{2}+1}.\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\frac{\pi^2}{2}}{\frac{\pi^2}{2}+1}.0 = 0.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{x^2}{x^2+1}.\cos x\right) = 0;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(-\frac{x^2}{x^2+1}.\cos x\right) = 0;$$

$Logo, \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 \; e, como \; \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \; temos \; que \; f$ é $contínua \; em \; x = \dfrac{\pi}{2}$;

$* \; Com \; isso, temos \; que \; f$ é $contínua \; em \; qualquer \; ponto \; onde \; \cos x = 0 \; e, em \; posse,$ $do \; que \; foi \; exposto \; acima, concluímos \; que \; f$ é $contínua \; nos \; reais.$

$b) \; f(x) = x^3 - x - 1$; $mostrar \; que \; f \; possui \; uma \; raíz \; real.$
$f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1$; $f(1) < 0$
$f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5$; $f(2) > 0$
$* \; Como \; f$ é $uma \; função \; polinomial \; e, portanto, contínua \; em \; [1,2]$, $e \; ainda,$
$f(1) < 0 < f(2), pelo \; Teorema \; do \; Valor \; Intermediário \; existe \; algum$ número
$c \in (1,2) \; tal \; que \; f(c) = 0 \; e, portanto, f \; possui \; uma \; raíz \; real \; em \; (1,2).$
$* \; Onde \; c$ é $um \; número \; que \; somado \; ao \; número \; 1$ é $igual \; ao \; seu \; cubo.$

$c)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & se\ x > 1 \end{cases}$$

$*\ f$ é $uma\ função\ sentencial\ composta\ por\ uma\ função\ polinomial\ e, portanto,$ $contínua\ no\ domínio\ desta\ função; e\ uma\ função\ raíz\ cujo\ domínio\ está\ definido$ $para\ x \geq 0. Como\ o\ domínio\ da\ segunda\ sentença\ vale\ para\ x > 1, então\ temos$ $que\ \sqrt{x}$ é $contínua\ para\ x > 1. Com\ isso, temos\ que\ f$ é $contínua\ em\ (-\infty, 1) \cup (1, +\infty). Vamos\ analisar\ a\ continuidade\ de\ f\ em\ x = 1:$

$-Dizemos\ que\ uma\ função\ f$ é $contínua\ no\ ponto\ x = a\ se, somente\ se,$

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

$f(1) = 1^2 = 1\ ;$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \to 1^+} x} = \sqrt{1} = 1;$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 1\ ;$

$*\ Como\ f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)\ , temos\ que\ f$ é $contínua\ em\ x = 1\ e, com\ isso, temos\ que$ f é $contínua\ em\ \mathbb{R}.$

5.

$a)\ f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}\ ; área\ do\ retângulo\ determinado\ pelas\ assíntotas\ e\ o\ eixo\ x.$

$*\ Domínio\ de\ f(x):\ D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$*\ Assíntotas:$

$-Verticais: Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a$ é $uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um$ $dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*\ Verificando\ se\ há\ assíntotas\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ de\ f, ou\ seja, em$ $x = -1\ e\ em\ x = 1:$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\overset{-1}{\overset{\uparrow}{x}}\ \overbrace{(x+2)}^{\overset{1}{\uparrow}}}{\underbrace{(x+1)}_{\underset{0^+}{\downarrow}}\ \underbrace{(x-1)}_{\underset{-2}{\downarrow}}} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\overbrace{x(x+2)}^{\overset{-1}{\uparrow}}}{\underbrace{(x+1)(x-1)}_{\underset{0^-}{\downarrow}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{\overset{-1}{\overset{\uparrow}{x}}\ \overbrace{(x+2)}^{\overset{1}{\uparrow}}}{\underbrace{(x+1)}_{\underset{0^-}{\downarrow}}\ \underbrace{(x-1)}_{\underset{-2}{\downarrow}}} = \lim_{x \to -1^-} \frac{\overbrace{x(x+2)}^{\overset{-1}{\uparrow}}}{\underbrace{(x+1)(x-1)}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = -\infty$$

$-Logo, a\ reta\ x = -1$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\overset{1}{\overset{\uparrow}{x}}\ \overbrace{(x+2)}^{\overset{3}{\uparrow}}}{\underbrace{(x+1)}_{\underset{2}{\downarrow}}\ \underbrace{(x-1)}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{x(x+2)}^{\overset{3}{\uparrow}}}{\underbrace{(x+1)(x-1)}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\overbrace{x}^{1}\,\overbrace{(x+2)}^{3}}{\underbrace{(x+1)}_{2}\,\underbrace{(x-1)}_{0^-}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\overbrace{x(x+2)}^{3}}{\underbrace{(x+1)(x-1)}_{0^-}} = -\infty$$

$-Logo, a\ reta\ x = 1$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$-Horizontais: Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+2x}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}}{\lim_{x\to+\infty}1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+2x}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x\to-\infty}1+\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}}{\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

$-Logo, a\ reta\ y = 1$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$*$ $Área\ do\ retângulo\ formado\ pelas\ assíntotas\ e\ o\ eixo\ x:$

$$A = (1-0)\times\big(1-(-1)\big) = 1\times 2 = 2\,u.A$$

$b)$ $Como\ as\ assíntotas\ verticais\ assintotam\ o\ gráfico$ às $proximidades\ do\ ponto\ de\ descontinuidade, elas$ não $interceptam\ a\ curva. Vamos\ verificar\ a\ assíntota\ horizontal\ y = 1\ ;$

$$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{x^2+2x}{x^2-1} = 1 \Rightarrow x^2+2x = x^2-1 \Rightarrow 2x = -1 \therefore x = -\frac{1}{2}\ ;$$

$*$ $Logo, a\ assíntota\ horizontal\ intercepta\ a\ função\ no\ ponto$ $\left(-\frac{1}{2}, 1\right).$

6.10 Reavaliação AB1-25 de Junho de 2011

1.

$$c_1: x^2 - y^2 = 3 \quad e \quad c_2: x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$$

$* \, Da\ expressão\ da\ primeira\ curva, temos:\ y^2 = x^2 - 3. Substituindo\ na\ essa\ expressão\ na\ segunda\ curva, obtemos:$

$$x^2 - 4x + (x^2 - 3) + 3 = 0$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$2x(x - 2) = 0$$
$$x = 0 \ ou \ x = 2;$$

$* \, Note\ que\ para\ x = 0\ a\ expressão\ y^2 = x^2 - 3\ não\ possui\ solução\ em\ \mathbb{R}. Logo,\ para\ x = 2, obtemos:$

$$y^2 = 2^2 - 3$$
$$y^2 = 4 - 3$$
$$y^2 = 1$$
$$\therefore y = 1 \ e \ y = -1$$

$* \, Pontos\ de\ interseção\ entre\ as\ curvas:\ (2,1)\ e\ (2,-1).$

$-Ângulo\ ente\ às\ curvas\ no\ ponto\ (2,1):$

$* \, Por\ derivação\ implícita, temos:$

$c_1:\ 2x - 2yy' = 0\ ;\ \ y_1{}' = \dfrac{x}{y}\ . no\ ponto\ (2,1)\ temos\ y_1' = \dfrac{2}{1} = 2.$

$c_2: 2x - 4 + 2yy' = 0\ ;\ \ y_2{}' = -\dfrac{x-2}{y}\ . no\ ponto\ (2,1)\ temos\ y_2' = -\dfrac{0}{1} = 0.$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \left|\frac{y_1' - y_2'}{1 + y_1' \cdot y_2'}\right| = \left|\frac{2-0}{1+2.0}\right| = \left|\frac{2}{1}\right| = 2 \therefore \alpha_1 = \operatorname{arctg}(2)$$

$-Ângulo\ entre\ às\ curvas\ no\ ponto\ (2,-1):$

$y_1{}' = \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{-1} = -2\,.$

$y_2{}' = -\dfrac{x-2}{y} = -\dfrac{2-2}{-1} = \dfrac{0}{1} = 0\,.$

$\operatorname{tg}\alpha_2 = \left|\dfrac{y_1' - y_2'}{1 + y_1' \cdot y_2'}\right| = \left|\dfrac{-2-0}{1-2.0}\right| = \left|\dfrac{-2}{1}\right| = 2 \therefore \alpha_2 = \operatorname{arctg}(2)$

$* \, Logo, o\ ângulo\ entre\ as\ curvas\ nos\ pontos\ de\ interseção\ é\ \alpha = \operatorname{arctg}(2).$

2.

$a)\ \lim\limits_{x\to 1} |x^2 - 1| \cdot 2^{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}\ ;$

$$-1 \le \cos\left(\frac{1}{1-x}\right) \le 1$$
$$-|x^2 - 1| \le |x^2 - 1| \cdot \cos\left(\frac{1}{1-x}\right) \le |x^2 - 1|$$

$* \, Sejam\ f(x) = -|x^2 - 1|\,, g(x) = |x^2 - 1| \cdot \cos\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\ e\ h(x) = |x^2 - 1|, então$

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

$* \, Obs: se\ x \to 1^+, x^2 - 1 > 0. Logo, |x^2 - 1| = x^2 - 1. Assim, temos:$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} -(x^2-1) = \lim_{x\to1^+} -x^2 + \lim_{x\to1^+} 1 = -1+1 = 0\,;$
$\lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^+} (x^2-1) = \lim_{x\to1^+} x^2 - \lim_{x\to1^+} 1 = 1-1 = 0\,;$
$*\,Obs: se\ x\to1^-, x^2-1<0. Logo, |x^2-1| = -x^2+1. Assim, temos:$
$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} -(-x^2+1) = \lim_{x\to1^-} x^2 - \lim_{x\to1^-} 1 = 1-1 = 0\,;$
$\lim_{x\to1^-} h(x) = \lim_{x\to1^-} -(x^2-1) = \lim_{x\to1^-} -x^2 + \lim_{x\to-} 1 = -1+1 = 0\,;$

$*\,Como \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x)\,, temos\ que \lim_{x\to1} f(x) = 0\ e, \lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^-} h(x),$
$temos\ que \lim_{x\to1} h(x) = 0.$
$*\,Assim, se\ f(x)\le g(x)\le h(x)\ e \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} h(x)\,, podemos\ garantir, pelo$
$Teorema\ do\ Confronto, que \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} h(x) = \lim_{x\to1} g(x) = 0. Portanto,$

$$\lim_{x\to1} |x^2-1|\cdot 2^{\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)} = 0$$

$b)\ \lim_{x\to2} \dfrac{x^3+x^2-8x+4}{x-2} = \lim_{x\to2} \dfrac{(x-2)(x^2+3x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to2}(x^2+3x-2) =$
$\lim_{x\to2} x^2 + \lim_{x\to2} 3x - \lim_{x\to2} 2 = 2^2 + 3.(2) - 2 = 4+6-2 = 8.$

$$c)\ \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{x-1} = \lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}}\right) =$$

$$\lim_{x\to1} \frac{3+x-(5-x)}{(x-1)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}\right)} = \lim_{x\to1} \frac{2x-2}{(x-1)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}\right)} =$$
$$\lim_{x\to1} \frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}\right)} = \lim_{x\to1} \frac{2}{\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}} = \frac{\lim_{x\to1} 2}{\lim_{x\to1}\sqrt{3+x} + \lim_{x\to1}\sqrt{5-x}}$$
$$= \frac{\lim_{x\to1} 2}{\sqrt{\lim_{x\to1} 3 + \lim_{x\to1} x} + \sqrt{\lim_{x\to1} 5 - \lim_{x\to1} x}} = \frac{2}{\sqrt{3+1}+\sqrt{5-1}} = \frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

3.

$$f(x) = ae^{\frac{-(x-b)^2}{2c^2}}$$

$a)\ f'(x) = \dfrac{a}{2c^2}\cdot(-2)(x-b)\cdot e^{\frac{-(x-b)^2}{2c^2}}$
$f'(x) = -\dfrac{a}{c^2}(x-b)e^{\frac{-(x-b)^2}{2c^2}}\,;$

$b)$
$i.\, f(2) = 4\,; f'(2) = 0$
$ii.\, f(0) = \dfrac{4}{e^2}\ ;\ \ f'(0) = \dfrac{8}{e^2}$

$-Com\ as\ informações\ obtidas\ em\ i), obtemos:$
$f(2) = ae^{\frac{-(2-b)^2}{2c^2}} = 4\,;$

$$f'(2) = -\frac{a}{c^2}(2-b)e^{\frac{-(2-b)^2}{2c^2}} \rightarrow f'(2) = -\frac{(2-b)}{c^2} \cdot 4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{2}$$

$-Com\ as\ informações\ obtidas\ em\ ii), obtemos:$

$$f(x) = ae^{\frac{-(x-2)^2}{2c^2}}\ ;\ f(0) = ae^{\frac{-(0-2)^2}{2c^2}} = ae^{-\frac{2}{c^2}};\ \ f(0) = 4.e^{-2}$$

$$ae^{-\frac{2}{c^2}} = 4.e^{-2}\ \Rightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{4}\ \ e\ \boldsymbol{c} = \pm\mathbf{1}$$

$$f'(x) = -\frac{4}{c^2}(x-2)e^{\frac{-(x-2)^2}{2c^2}}; f'(0) = \frac{8}{c^2} \cdot e^{\frac{-2}{c^2}} = \frac{8}{e^2} \Rightarrow \boldsymbol{c} = \pm\mathbf{1};$$

$*\ Portanto, temos\ a = 4, b = 2\ e\ c = \pm 1.$

4.

$a)\ y = x^3 - 3x\ ;\ \ \ Determinar\ x\ quando\ y = 1;$

$*\ Seja\ f(x) = x^3 - 3x - 1;$

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) - 1 = -8 + 6 - 1 = -3;$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 1 = -1 + 3 - 1 = 1;$

$*\ Como\ f$ é $uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ [-2,-1], e\ ainda,$
$f(-2) < 0 < f(-1), pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ existe\ algum\ c_1\ em$
$(-2,-1)\ tal\ que\ f(c_1) = 0.$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 1 = -1 + 3 - 1 = 1;$

$f(0) = 0^3 - 3(0) - 1 = 0 - 0 - 1 = -1;$

$*\ Como\ f$ é $uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ [-1,0], e\ ainda,$
$f(0) < 0 < f(-1), pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ existe\ algum\ c_2\ em$
$(-1,0)\ tal\ que\ f(c_2) = 0.$

$f(0) = 0^3 - 3(0) - 1 = 0 - 0 - 1 = -1;$

$f(2) = 2^3 - 3(2) = 8 - 6 - 1 = 1;$

$*\ Como\ f$ é $uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ [0,2], e\ ainda,$
$f(0) < 0 < f(2), pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ existe\ algum\ c_2\ em$
$(0,2)\ tal\ que\ f(c_2) = 0.$

$\rightarrow Como\ f$ é $um\ polinônio\ de\ grau\ 3, f\ possui, no\ máximo, 3\ raízes\ reais - já$
$determinadas\ acima\ pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário.$

$*\ Logo, existe\ algum\ x\ pertencente\ a\ cada\ intervalo\ tomada\ acima, que\ a\ curva$
$y = x^3 - 3x\ intercepta\ a\ curva\ y = 1.$

$b)\ v(t) = f\left(2^{x(t)}\right); Calcular\ a(1)\ \ sabendo\ que\ x(1) = 3, f'(8) = -2\ e\ f(8) = 2.$

$a(t) = v'(t) = x'(t) \cdot 2^{x(t)} \cdot \ln(2) \cdot f'\left(2^{x(t)}\right);\ \ \ x'(t) = v(t)$

$a(t) = v(t) \cdot 2^{x(t)} \cdot \ln(2) \cdot f'\left(2^{x(t)}\right)$

$a(t) = f\left(2^{x(t)}\right) \cdot 2^{x(t)} \cdot \ln(2) \cdot f'\left(2^{x(t)}\right)$

$a(1) = f\left(2^{x(1)}\right) \cdot 2^{x(1)} \cdot \ln(2) \cdot f'\left(2^{x(1)}\right)$

$a(1) = f(2^3) \cdot 2^3 \cdot \ln(2) \cdot f'(2^3)$

$a(1) = f(8) \cdot 8 \cdot \ln(2) \cdot f'(8)$

$a(1) = 2 \cdot 8 \cdot \ln(2) \cdot (-2)$

$a(1) = -32\ln(2)$

5.

$a)\ f(x) = \dfrac{2x-4}{\sqrt{x^2+x}}$;

$*$ *Domínio de* $f(x)$:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 0\}$;

$*$ *Assíntotas*:

$-$*Verticais*: *Dizemos que a reta* $x = a$ é *uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos,*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*$ *Verificando se há assíntotas verticais nos pontos de descontinuidade de* f, *ou seja*, à *esquerda de* $x = -1$ *e* à *direita de* $x = 0$, *temos*:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\overbrace{2x-4}^{\overset{-6}{\uparrow}}}{\underbrace{\sqrt{x(x+1)}}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = -\infty$$

$-$*Logo, a reta* $x = -1$ é *uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{2x-4}^{\overset{-4}{\uparrow}}}{\underbrace{\sqrt{x(x+1)}}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = -\infty$$

$-$*Logo, a reta* $x = 0$ é *uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$-$*Horizontais*: *Dizemos que a reta* $y = a$ é *uma assíntota horizontal se ocorrer um dos seguintes casos,*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{2x-4}{|x|}}{\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{|x|}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{2x-4}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to +\infty} 2 - \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to +\infty} 1 + \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}}} = \frac{2-0}{\sqrt{1+0}} = \frac{2}{\sqrt{1}} = \frac{2}{1} = 2.$$

$-$*Logo, a reta* $y = 2$ é *uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\dfrac{2x-4}{|x|}}{\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{|x|}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\dfrac{2x-4}{-x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2+\dfrac{4}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to -\infty} -2 + \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to -\infty} 1 + \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x}}} = \frac{-2+0}{\sqrt{1+0}} = \frac{-2}{\sqrt{1}} = \frac{-2}{1} = -2.$$

$-$*Logo, a reta* $y = -2$ é *uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

$* \ Pontos\ de\ interseção\ entre\ as\ assíntotas: (0,2), (0,-2), (-1,2)\ e\ (-1,-2)$

$b)\ Vejamos\ a\ reta\ y = -2:$

$f(x) = -2 \Rightarrow \dfrac{2x-4}{\sqrt{x^2+x}} = -2$

$\dfrac{-x+2}{\sqrt{x^2+x}} = 1 \Rightarrow -x+2 = \sqrt{x^2+x} \Rightarrow (-x+2)^2 = \left(\sqrt{x^2+x}\right)^2$

$x^2 - 4x + 4 = x^2 + x \Rightarrow 5x = 4\ \therefore x = \dfrac{4}{5}$;

$* \ A\ assíntota\ horizontal\ y = -2\ intercepta\ a\ curva\ em\ \left(\dfrac{4}{5}, -2\right)$;

$* \ Vejamos\ a\ reta\ y = 2:$

$\dfrac{2x-4}{\sqrt{x^2+x}} = 2 \Rightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+x}} = 1 \Rightarrow x-2 = \sqrt{x^2+x} \Rightarrow (x-2)^2 = \left(\sqrt{x^2+x}\right)^2$

$x^2 - 4x + 4 = x^2 + x \Rightarrow 5x = 4 \therefore x = \dfrac{4}{5}$;

$-Pergunta: afinal, qual\ é\ a\ imagem\ de\ x = \dfrac{4}{5}$?

$f\left(\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{\frac{8}{5} - 4}{\sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{5}}} = \dfrac{-\frac{12}{5}}{\sqrt{\frac{36}{25}}} = \dfrac{-\frac{12}{5}}{\frac{6}{5}} = -2;$

$* \ Portanto, a\ assíntota\ y = 2\ não\ intercepta\ a\ curva\ f(x). Logo, somente\ a\ reta\ y = -2\ intercepta\ a\ curva.$

$c)$

$$f(x) = \begin{cases} x^4 . \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$$

$* \ f\ é\ uma\ função\ sentencial\ contínua\ onde\ suas\ sentenças\ estão\ definidas\ para\ seus\ domínios.$

$* \ Obs: para\ x \neq 0\ note\ que\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\ está\ definido;$

$* \ Com\ isso, temos\ que\ f\ é\ contínua\ em\ (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\ . Devemos, agora, verificar\ se\ f\ é\ contínua\ em\ x = 0.$

$-Dizemos\ que\ uma\ função\ f\ é\ contínua\ em\ x = a\ se, somente\ se,$

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

1) $f(0) = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^4 . \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x^4 \leq x^4 . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^4$$

$* \ Sejam\ g(x) = -x^4, f(x) = x^4 . \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\ e\ h(x) = x^4\ , então\ g(x) \leq f(x) \leq h(x).$
$E\ ainda, \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0\ e\ \lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0, ou\ seja, \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} h(x)\ , pelo\ Teorema\ do\ Confronto, temos\ \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0. Logo,$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^4.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$3) f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$; $Portanto, f$ é $contínua\ em\ x = 0\ e, consequentemente, pela$ $continuidade\ afirmada\ anteriormente, temos\ que\ f$ é $contínua\ em\ \mathbb{R}$.

6.11 Reavaliação AB2-22 de Junho de 2011

1. $y = x^2$; $coordenada\ x(medida\ em\ metros)$

$\frac{dx}{dt} = 10m/s$; $Determinar\ a\ taxa\ de\ variação\ da\ inclinação\ da\ reta\ tangente$

$em\ x = 3\ metros;$

$* \ y' = m = \operatorname{tg}\alpha \ \therefore \alpha = \operatorname{arctg}(y')$;

$\alpha = \operatorname{arctg}(2x)$

$-Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$
$$\alpha'(t) = \frac{2}{1+4x^2} \cdot 10$$
$$\alpha'(t) = \frac{20}{1+4x^2}$$

$-Quando\ x = 3\ metros, obtemos:$

$$\alpha'(t) = \frac{20}{1+4.3^2} = \frac{20}{1+4.(9)} = \frac{20}{1+36} = \frac{20}{37} rad/s$$

2.

$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $g(x) = \operatorname{senh}(x) + 2 = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 2;$

$* \ Interseção\ entre\ as\ curvas:$

$$f(x) = g(x)$$
$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 2$$
$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2$$
$$\frac{2e^{-x}}{2} = 2$$
$$e^{-x} = 2$$
$$-x = \ln(2)$$
$$x = -\ln(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$* \ f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}}{2} = \frac{\frac{1}{2}+2}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4} \ ; \quad ponto\ \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right), \frac{5}{4}\right)$$

$-Calculando\ a\ inclinação\ da\ reta\ tangente\ nesse\ ponto:$

$f(x) = \cosh(x)$

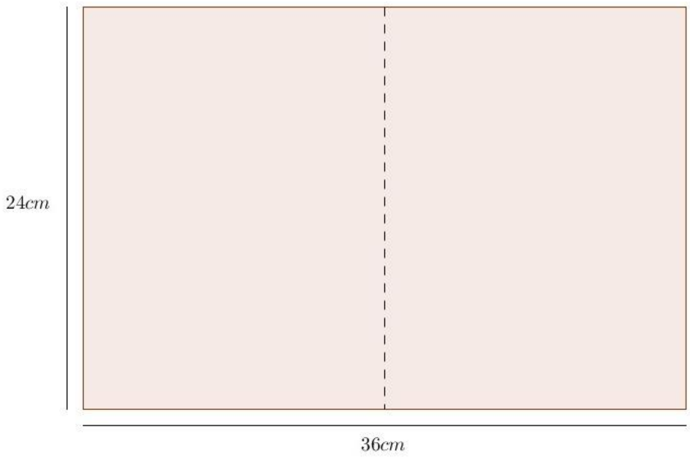
$f'(x) = \operatorname{senh}(x)$

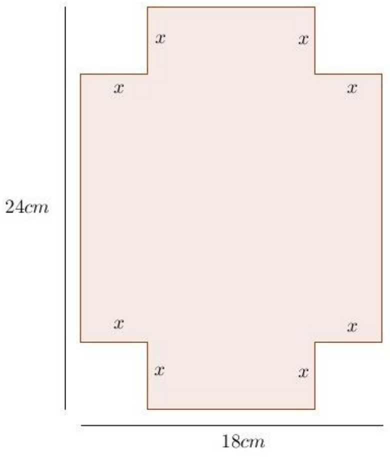
$$f'\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \operatorname{senh}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}}{2} = \frac{\frac{1}{2}-2}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4};$$

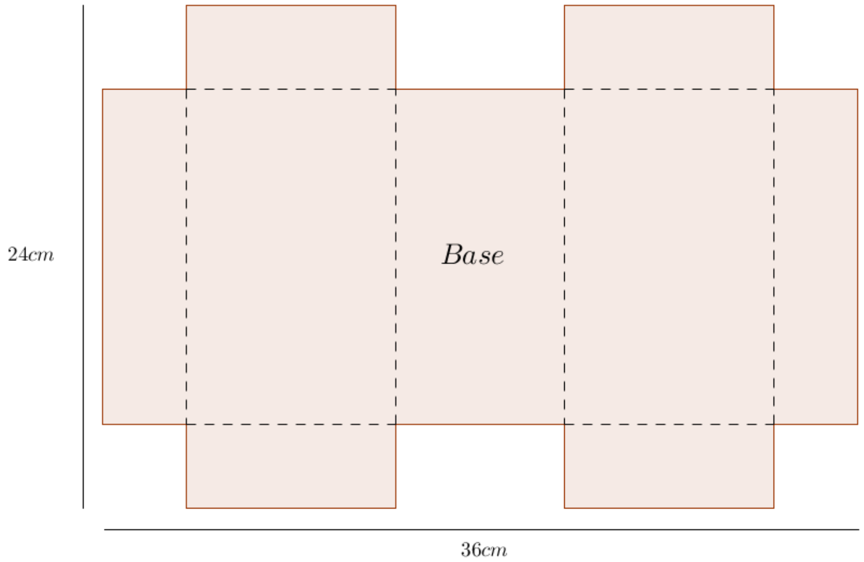
$-Equação\ da\ reta\ tangente:$

$$y - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}(x + \ln(2))$$
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5 - 3\ln(2)}{4}$$

3. $Ilustração\ do\ problema:$







$-Expressão\ para\ o\ volume\ do\ sólido\ gerado:$
$V(x) = (36 - 4x)(24 - 2x)x$
$V(x) = 4(9 - x)2(12 - x)x$
$V(x) = 8x(9 - x)(12 - x)$
$V(x) = 8x(x^2 - 21x + 108)$
$V(x) = 8(x^3 - 21x^2 + 108x)$
$V'(x) = 8(3x^2 - 42x + 108)$
$V'(x) = 24(x^2 - 14x + 36)$
$-Analisando\ o\ sinal\ de\ V'(x), obtemos:$

$+ + + + +\left(7 - \sqrt{13}\right) - - - -\left(7 + \sqrt{13}\right) + + + + +\quad V'(x) = 24(x^2 - 14x + 36)$

$*\ Com\ essa\ análise\ encontramos\ um\ ponto\ de\ máximo\ local\ em\ x = \left(7 - \sqrt{13}\right).$
$Logo, ao\ cortarmos\ quadrados\ congruentes\ com\ lado\ medindo\ x = \left(7 - \sqrt{13}\right)cm$
$obtemos\ a\ caixa\ de\ maior\ volume.$

4.
$a)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(mx)}{[\ln(1+nx)]^2} = \lim_{x\to 0}\frac{m.\operatorname{sen}(2mx)}{\frac{2n.\ln(1+nx)}{1+nx}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+nx).m.\operatorname{sen}(2mx)}{2n.\ln(1+nx)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{n.m.\operatorname{sen}(2mx)+(1+nx).2m^2.\cos(2mx)}{\dfrac{2n^2}{1+nx}}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)[n.m.\operatorname{sen}(2mx)+(1+nx).2m^2.\cos(2mx)]}{2n^2}=$$
$$\frac{(1+n.0)[n.m.\operatorname{sen}0+(1+n.0).2m^2.\cos 0]}{2n^2}=\frac{2m^2}{2n^2}=\left(\frac{m}{n}\right)^2;$$
$$*\ Como\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(mx)}{[\ln(1+nx)]^2}=1\ ,então:$$
$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=1\Rightarrow m^2=n^2\ ,ou\ ainda,|m|=|n|.$$

$b)$
$y=\left(\sqrt{x}\right)^x.e^x$; *Determinar as abscissas dos pontos onde* $y'=0$.
Domínio da função:
$D(y)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$
$\ln y=\ln\left(\sqrt{x}\right)^x+\ln e^x$
$\ln y=\ln x^{\frac{x}{2}}+x.\ln e$
$\ln y=\dfrac{x}{2}.\ln x+x$
−Por diferenciação logarítmica, temos:
$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{2}.\ln x+\dfrac{1}{2}+1$
$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{2}.\ln x+\dfrac{3}{2}$
$y'=\dfrac{1}{2}y.(\ln x+3)$
$y'=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^x.e^x[\ln x+3]$;
$y'=0\Leftrightarrow\ln x+3=0\Rightarrow\ln x=-3\ \therefore x=e^{-3}=\dfrac{1}{e^3}$;
$\rightarrow$ *Em* $x=\dfrac{1}{e^3}$ *tem uma reta tangente horizontal*!

5.
$$f(x)=\frac{10x}{(x-1)^3}\ ;f'(x)=\frac{-20x-10}{(x-1)^4}\ ;\ f''(x)=\frac{60x+60}{(x-1)^5}$$

$*$ *Domínio da função*:
$D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 1\}$;

1) *Interseções com os eixos coordenados*:
$f(0)=\dfrac{10.(0)}{(0-1)^3}=\dfrac{0}{-1}=0$; *ponto* $(0,0)$.
$f(x)=0\Rightarrow 10x=0\ \therefore x=0$.

2) *Assíntotas*:
−Verticais: *Dizemos que a reta* $x=a$ é *uma assíntota vertical se ocorrer um*

dos seguintes casos,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*$ *Verificando se no ponto de descontinuidade* $x = 1$ *existe uma assíntota*:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{10x}^{\substack{10\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-1)^3}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$

$*$ *Obs*: *se* $x \to 1^+, x > 1.$ *Logo*, $x - 1 > 0.$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{10x}^{\substack{10\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-1)^3}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = -\infty$$

$*$ *Obs*: *se* $x \to 1^-, x < 1.$ *Logo*, $x - 1 < 0.$

$-$*Assim, a reta* $x = 1$ é *uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$-$*Horizontais*: *Dizemos que a reta* $y = a$ é *uma assíntota horizontal se ocorrer um dos seguintes casos,*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{10x}{(x-1)^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{10x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{10x}{|x|}}{\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{|x|}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{10x}{x}}{\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{10}{\underbrace{x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x}}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}}} = 0.$$

$-$*Logo, a reta* $y = 0$ é *a assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

3) *Crescimento e Decrescimento*:

$$f'(x) = \frac{-20x - 10}{(x-1)^4}$$

$-$*Analisando o sinal de* $f'(x)$, *temos*:

$+ + + + + + + + (-1/2) - - - - - - - - - -$	$(-20x - 10)$
$+ + + + + + + + + + + + + + + + (1) + + +$	$(x-1)^4$
$+ + + + + + + + (-1/2) - - - - (1) - - -$	$f'(x) = (-20x - 10)/(x-1)^4$

$-$*Da análise acima, concluímos que*

f é *crescente em* $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ *e*

f é *decrescente em* $\left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

4) *Máximos e mínimos locais*:

$*$ *Temos um ponto de máximo local em* $x = -\frac{1}{2}$;

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{10\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^3} = \frac{-5}{\left(-\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{-5}{\frac{-27}{8}} = \frac{40}{27}; \quad ponto\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{40}{27}\right)$$

5) *Concavidades*:

$$f''(x) = \frac{60x+60}{(x-1)^5}$$

$-$*Analisando o sinal de* $f''(x)$, *temos*:

$- - - - - - - -(-1) + + + + + + + + + + + \qquad (60x+60)$

$- - - - - - - - - - - - - - - (1) + + + + + + \qquad (x-1)^5$

$+ + + + + + + (-1) - - - - (1) + + + + + + \qquad f''(x) = (60x+60)/(x-1)^5$

$-$*Da análise acima, concluímos que*

f *possui concavidade voltada para cima em* $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
f *possui concavidade voltada para baixo em* $(-1, 1)$

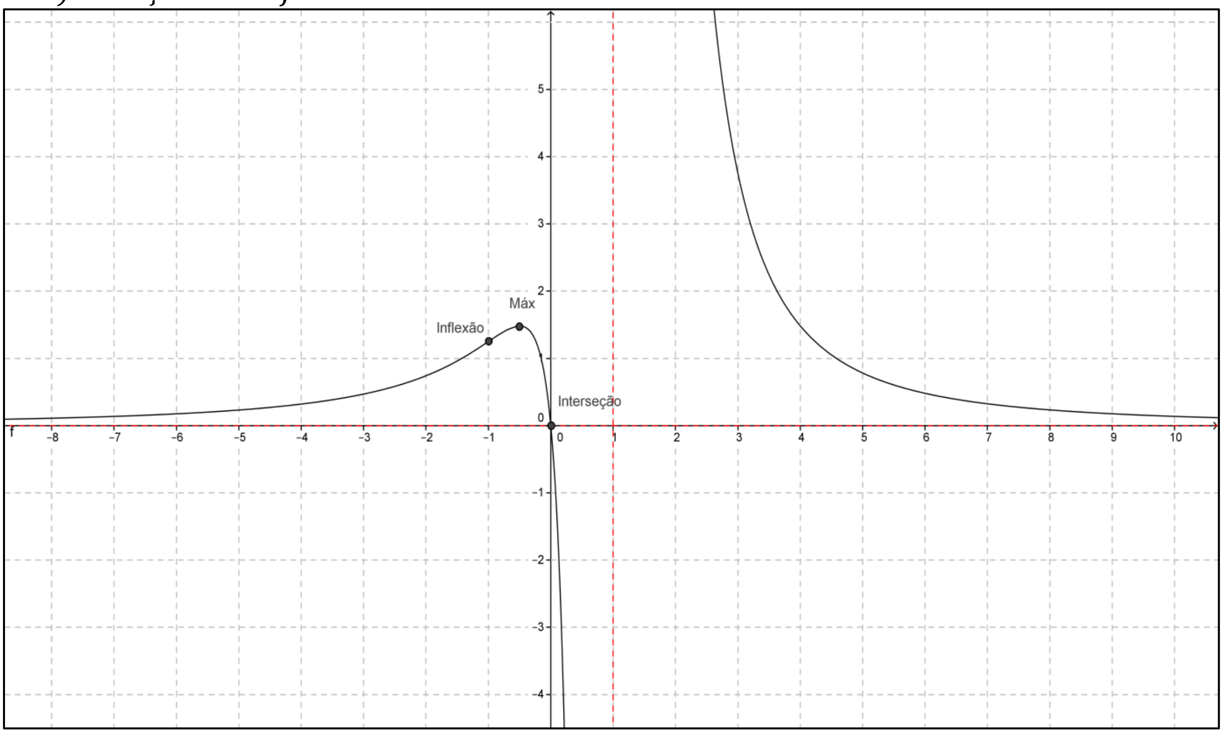
6) *Pontos de Inflexão*:

$*$ *Os pontos de inflexão ocorrem, nos pontos do domínio de* f, *quando há mudança na direção da concavidade*.

$*$ *Temos um ponto de inflexão em* $x = -1$.

$$f(-1) = \frac{10(-1)}{(-1-1)^3} = \frac{-10}{(-2)^3} = \frac{-10}{-8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}; \quad ponto\ \left(-1, \frac{5}{4}\right).$$

7) *Esboço do Gráfico*:



6.12 Reavaliação AB2-25 de Junho de 2011

1.

$a)\ Linearizações\ das\ funções\ f(x) = \mathrm{tg}(x)\ \ e\ g(x) = \mathrm{sen}(x)\ \ em\ x = 0.$

$-Linearização\ de\ f(x)\ em\ x = 0:$

$$L_1(x) - f(0) = f'(0).(x - 0)$$
$$L_1(x) - \mathrm{tg}\,0 = (\sec^2 0).x$$
$$L_1(x) - 0 = 1.x$$
$$L_1(x) = x$$

$-Linearização\ de\ g(x)\ em\ x = 0:$

$$L_2(x) - g(0) = g'(0).(x - 0)$$
$$L_2(x) - \mathrm{sen}\,0 = (\cos 0).x$$
$$L_2(x) - 0 = 1.x$$
$$L_2(x) = x$$

$b)\ Calculando\ L_1(x)\ e\ L_2(x)\ para\ x = \frac{\pi}{6}\ obtemos:$

$$L\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \cong 0{,}52$$

$*\ Vejamos:$

$$\rightarrow \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}58 \quad e \quad \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = 0{,}5\ ;$$

$\rightarrow Com\ isso, temos\ que\ a\ linearização\ da\ função\ \mathrm{sen}(x)\ \text{é}\ mais\ precisa\ do\ que\ a\ linearização\ da\ função\ \ \mathrm{tg}(x).$

$*\ Podemos\ chegar\ a\ essa\ conclusão\ calculando\ a\ distância\ entre\ os\ pontos\ encontrados\ para\ cada\ função\ e\ a\ reta\ y = x.$

$-Fazendo\ isso, temos:$

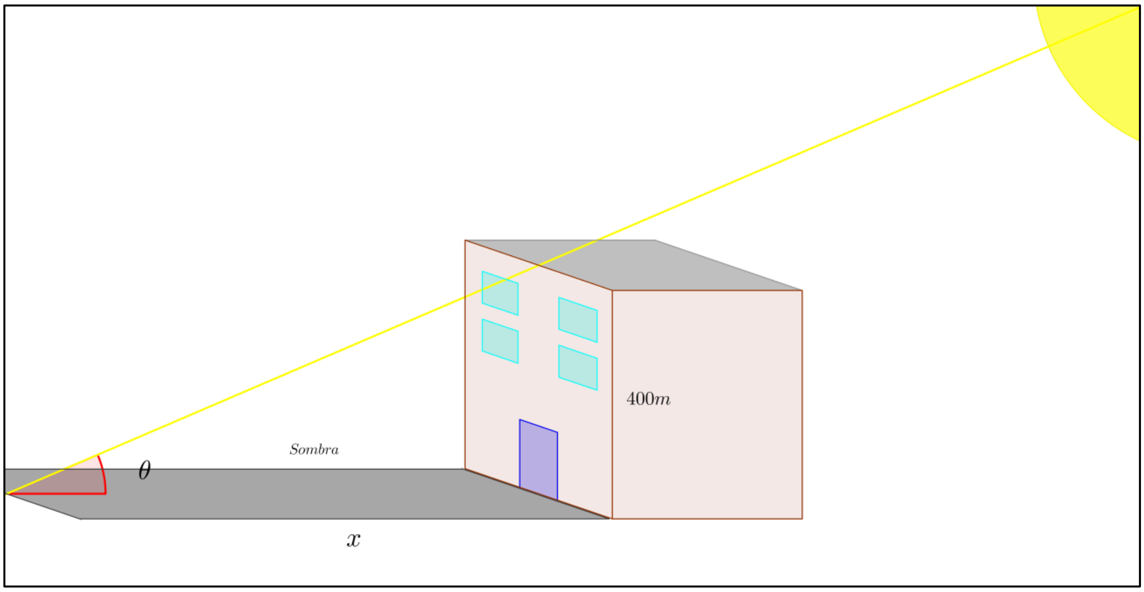
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ; ponto\ \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad ; \quad g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\ ;\ \ ponto\ \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

$$d_{f,r} = \frac{|y - x|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\frac{2\sqrt{3} - \pi}{6}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{3} - \pi}{6}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{6\sqrt{2}}$$

$$d_{g,r} = \frac{|y - x|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\frac{3 - \pi}{6}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{-3 + \pi}{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi - 3}{6\sqrt{2}}$$

$*\ Notamos\ que\ a\ distância\ do\ ponto\ da\ função\ g\ está\ mais\ próximo\ da\ reta\ da\ linearização\ do\ que\ o\ ponto\ que\ pertence\ a\ função\ f.$

2.



$*$ *No enunciado da questão, temos que*

$\dfrac{d\theta}{dt} = -0{,}25 rad/min$; *o sinal negativo indica o decrescimento do ângulo.*

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{400}{x} \Rightarrow x = \frac{400}{\operatorname{tg}\theta}$$

$-$*Pela Regra da Cadeia, obtemos*:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{400.\sec^2\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} \cdot (-0{,}25)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{100.\sec^2\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}$$

$-$*Quando* $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ *radianos, a velocidade com a qual a sombra do prédio está crescendo é*:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{100.\sec^2\frac{\pi}{6}}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{100.\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = 400 m/min$$

b)

$$\lim_{x\to1^+}(\ln x)^{\operatorname{tg}(x-1)} = \lim_{x\to1^+} e^{\ln(\ln x)^{\operatorname{tg}(x-1)}} = \lim_{x\to1^+} e^{\operatorname{tg}(x-1).\ln(\ln x)} = e^{\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(\ln x)}{\operatorname{cotg}(x-1)}};$$

$*$ *Calculando o limite do expoente, temos*:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(\ln x)}{\operatorname{cotg}(x-1)} = \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}}{-\operatorname{cossec}^2(x-1)} = \lim_{x\to1^+}\frac{-\operatorname{sen}^2(x-1)}{x.\ln x} =$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{-2\operatorname{sen}(2x-2)}{\ln x+1} = \frac{-2\operatorname{sen}(0)}{\ln 1+1} = \frac{-2.(0)}{0+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

$* \, Portanto, obtemos:$

$$\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{\text{tg}(x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln(\ln x)}{\text{cotg}(x-1)}} = e^0 = 1.$$

3.

$a) \; f(x) = 5 + 3.(x-1)^{2/3} \; ;$

$f(0) = 5 + 3.(-1)^{2/3} = 5 + 3.(1) = 5 + 3 = 8.$

$f(2) = 5 + 3.(1)^{2/3} = 5 + 3.(1) = 5 + 3 = 8.$

$-Logo, temos \; f(0) = f(2);$

$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x-1}} \; ;$

$f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \; ;$

$* \, O \; fato \; de \; que \; não \; existe \; um \; número \; c \in (0,2) \; tal \; que \; f'(c) = 0 \; não \; contradiz$ $o \; Teorema \; de \; Rolle, pois, f \; não \; é \; diferenciável \; em \; (0,2). f \; não \; é \; derivável \; em$ $x = 1, embora \; f \; seja \; contínua \; em \; [0,2].$

$b) \; f(x) = \cosh(x) \;\; e \; g(x) = \text{senh}(x) \;\; ; interseção \; da \; reta \; tangente \; à \; f, no \; ponto$ $em \; que \; x = 0, com \; a \; função \; g.$

$f(0) = \cosh(0) = 1; \quad ponto \; (0,1).$

$f'(x) = \text{senh}(x) \;\; ; \quad f'(0) = \text{senh}(0) = 0.$

$-Equação \; da \; reta \; tangente \; no \; ponto \; (0,1):$

$$y - 1 = 0(x - 0)$$
$$y - 1 = 0$$
$$y = 1$$

$-Interseção \; com \; a \; função \; g(x):$

$$g(x) = 1 \Rightarrow \text{senh}(x) = 1$$
$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$$
$$e^x - e^{-x} = 2$$
$$e^x - \frac{1}{e^x} - 2 = 0$$
$$e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$$

$-Façamos \; a \; substituição \; b = e^x, então \; b > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$b^2 - 2b - 1 = 0$$
$$\Delta = 4 + 4 = 8$$
$$b = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \quad (b > 0)$$
$$b = 1 + \sqrt{2}$$
$$b = e^x \Rightarrow x = \ln b \; \therefore \; x = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

$* \, Interseção: \left(\ln\left(1 + \sqrt{2}\right), 1\right)$

4.

$V = \pi r^2 h \; ; \; \pi r^2 h = 1 dm^3 \; ; \;\; h = \dfrac{1}{\pi r^2} \; (I)$

$A_L = 2\pi r h \; ; \;\; custo: R\$2{,}00$

$A_{Bs} = 2\pi r^2 \; ; \;\; custo: R\$3{,}00$

$* \, Custo \; total \; (C): \quad C = 2A_L + 3A_{Bs}\,; C = 4\pi rh + 6\pi r^2$
$* \, Substituindo \; a \; equação \; (I) \; na \; expressão \; do \; custo \; total, obtemos$:

$$C(r) = 4\pi r. \frac{1}{\pi r^2} + 6\pi r^2$$

$$C(r) = \frac{4}{r} + 6\pi r^2$$

$$C'(r) = -\frac{4}{r^2} + 12\pi r$$

$$C'(r) = \frac{12\pi r^3 - 4}{r^2}$$

$-Analisando \; o \; sinal \; de \; C'(r), temos$:

$$- - - - - - - - - - - - - - -\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}\right) + + + + + + + + + \quad C'(r) = \frac{12\pi r^3 - 4}{r^2}$$

$$* \, Para \; r = \frac{1}{\sqrt[3]{3\pi}} dm \; obtemos \; o \; menor \; custo \; para \; a \; construção \; do \; cilindro.$$

$$Logo, h = \frac{1}{\pi r^2} \therefore h = \frac{\sqrt[3]{9\pi^2}}{\pi} dm.$$

5. $Esboçar \; o \; gráfico \; da \; função \; f(x) = e^x . \operatorname{sen} x \; no \; intervalo \; [0,2\pi]$.

1) $Interseções \; com \; os \; eixos \; coordenados$:
$f(0) = e^0 . \operatorname{sen}(0) = 1.(0) = 0 \,.\, ponto \; (0,0)$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \; \therefore x = 0; x = \pi \; e \; x = 2\pi.$
$* \, Interseções: (0,0), (\pi,0) \; e \; (2\pi,0);$

2) $Assíntotas$:
$-Como \; não \; há \; pontos \; de \; descontinuidade \; em \; f, não \; há \; assíntotas \; verticais!$

$-Horizontais: Dizemos \; que \; a \; reta \; y = a$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; se \; ocorrer \; um \; dos \; seguintes \; casos,$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x . \operatorname{sen} x\,;$$

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$
$$-e^x \leq e^x . \operatorname{sen} x \leq e^x$$

$* \, Sejam \; g(x) = -e^x \; e \; h(x) = e^x, então \; temos \; g(x) \leq f(x) \leq h(x) \; e, ainda,$
$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0 \; e \; \lim_{x \to -\infty} h(x) = 0. Assim, pelo \; Teorema \; do \; Confronto, temos$:
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0. Portanto, \lim_{x \to -\infty} e^x . \operatorname{sen} x = 0.$

$-Logo, a \; reta \; y = 0$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; ao \; gráfico \; de \; f(x)$.

3) $Crescimento \; e \; Decrescimento$:
$f'(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$
$-Analisando \; o \; sinal \; de \; f'(x), temos$:

$$+ \qquad e^x$$
$$(0) + + + + + + (3\pi/4) - - - - - - -(7\pi/4) + + + + + + (2\pi) \qquad (\operatorname{sen} x + \cos x)$$
$$(0) + + + + + + (3\pi/4) - - - - - - -(7\pi/4) + + + + + + (2\pi) \qquad f'(x)$$

$-Da \; análise \; acima, concluímos \; que$

f é $crescente\ em\ (0, 3\pi/4) \cup (7\pi/4\,, 2\pi)\ e$
f é $decrescente\ em\ (3\pi/4\,, 7\pi/4)$

$4)\ Máximos\ e\ Mínimos\ locais$:
$-Pela\ análise\ de\ f'(x)\ temos$:

$$*\ Ponto\ de\ máximo\ local\ em\ x = 3\pi/4\ ;\quad ponto\ \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right)$$

$$*\ Ponto\ de\ mínimo\ local\ em\ x = 7\pi/4\ ;\ ponto\ \left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}}{2}\right)$$

$5) Concavidade$:
$f''(x) = 2e^{x}.\cos x$
$-Analisando\ o\ sinal\ de\ f''(x)$:

$(0) + + + + + (\pi/2) - - - - - - -(3\pi/2) + + + + + (2\pi)$ $\quad \cos x$
$+ +$ $\quad 2e^{x}$
$(0) + + + + + (\pi/2) - - - - - - -(3\pi/2) + + + + + (2\pi)$ $\quad f''(x) = 2e^{x}.\cos x$

$-Dessa\ análise, concluímos\ que$

$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ em\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)\ e$

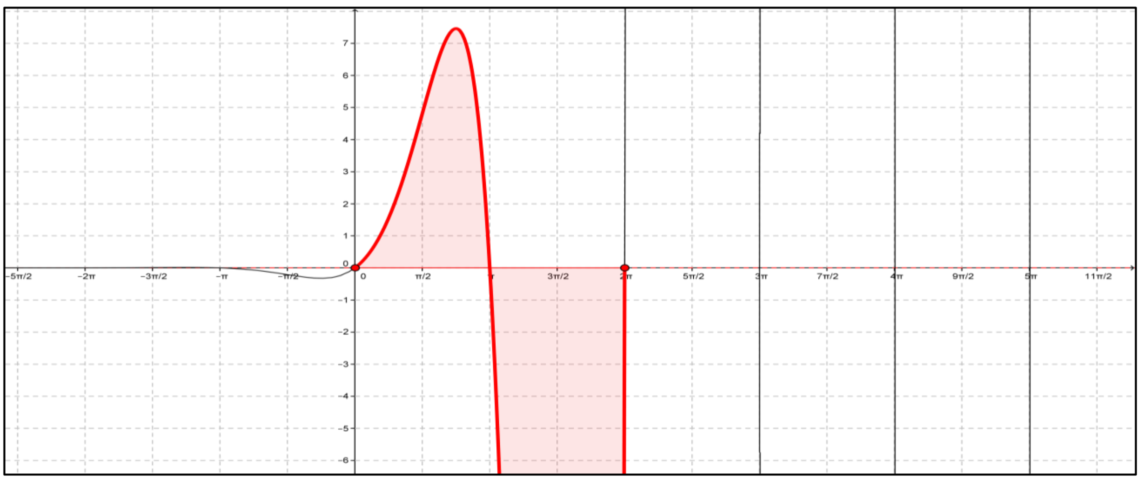
$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ baixo\ em\ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

$6)\ Pontos\ de\ Inflexão$:

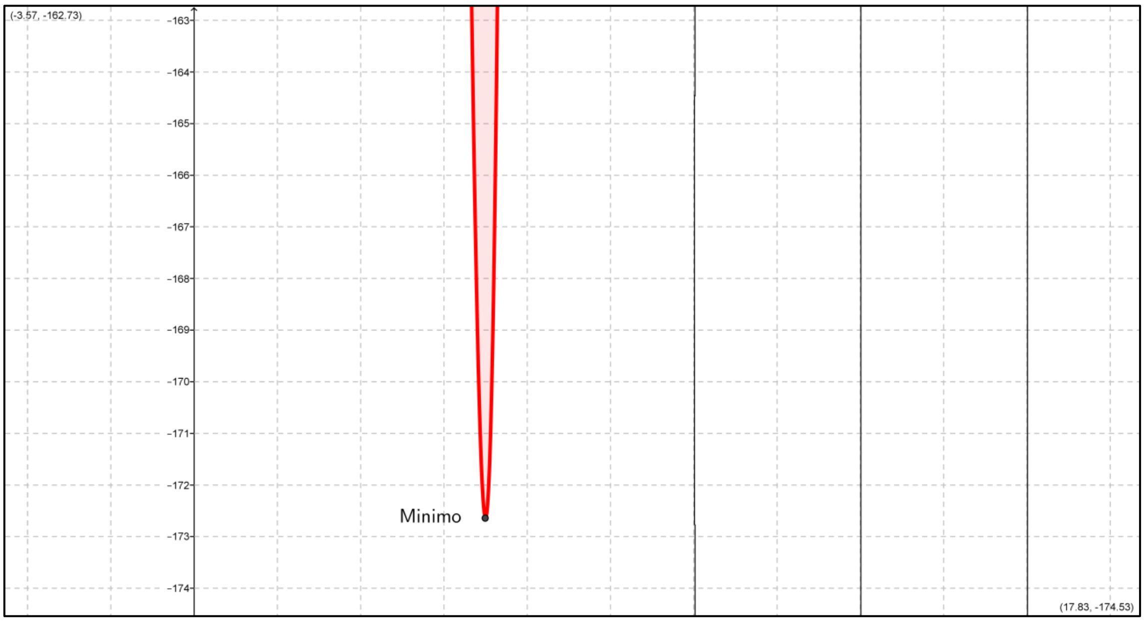
$*\ Os\ pontos\ de\ inflexão\ ocorre\ quando\ há\ mudança\ na\ direção\ da\ concavidade.$
$Logo, temos\ ponto\ de\ inflexão\ em\ x = \pi/2\ \ e\ em\ x = 3\pi/2\,;$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}\ ;\quad ponto\ \left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -e^{\frac{3\pi}{2}}\ ;\quad ponto\ \left(\frac{3\pi}{2}, -e^{\frac{3\pi}{2}}\right)\ ;$$

$7)\ Esboço\ do\ Gráfico$:



$* \, O \ ponto \ de \ mínimo \ local \ está \ ilustrado \ abaixo!$

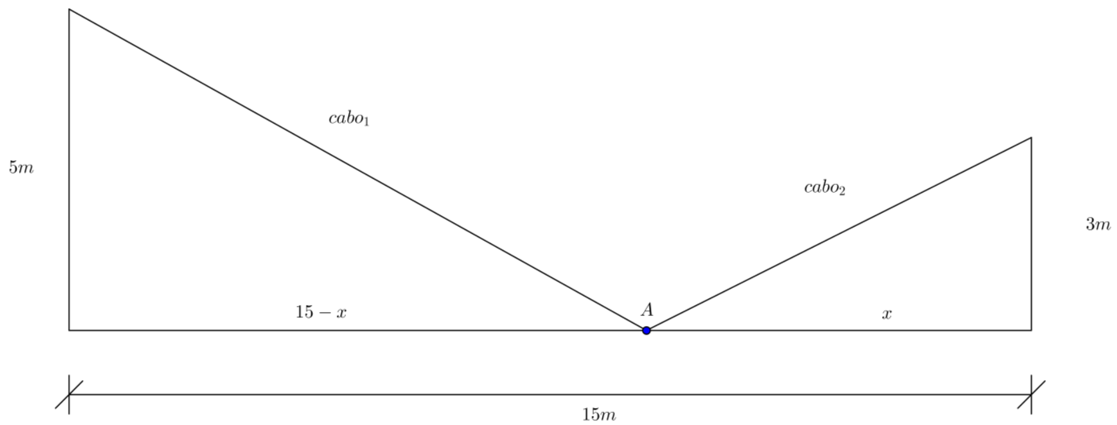


6.13 Avaliação Final-01 de Julho de 2011

$1. a > 0;\ \ n \geq 0\ ; f(x) = x^{(2n+1)} + ax + b\ ; provar\ que\ f\ não\ pode\ ter\ duas\ raízes\ reais\ distintas.$

$*\ Suponhamos\ que\ a\ função\ f\ possui\ duas\ raízes\ reais\ distintas, c\ e\ d, tal\ que\ f(c) = f(d) = 0.$
$*\ Como\ f\ é\ uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ [c,d]\ e\ diferenciável\ em\ (c,d), com\ f(c) = f(d), podemos\ afirmar\ pelo\ Teorema\ de\ Rolle\ que\ existe\ um\ x \in (c,d)\ tal\ que\ f'(x) = 0.$
$f'(x) = (2n+1)x^{2n} + a$
$f'(x) = 0 \Rightarrow\ x^{2n} = -\dfrac{a}{(2n+1)}\ ; como\ a > 0\ e\ 2n+1 > 0\ temos\ que\ x^{2n} < 0;$
$*\ No\ entantro, x^{2n} > 0, \forall x \in \mathbb{R}. Logo, f'(x)\ não\ possui\ raíz\ real\ e, portanto,\ f\ não\ pode\ ter\ duas\ raízes\ reais\ distintas.$

2.



$cabo_1 = \sqrt{5^2 + (15-x)^2} \Rightarrow\ cabo_1 = \sqrt{x^2 - 30x + 250}$
$cabo_2 = \sqrt{x^2 + 9}$
$Quantidade\ total\ de\ cabo - guia\ usado: Q = cabo_1 + cabo_2.$
$Q(x) = \sqrt{x^2 - 30x + 250} + \sqrt{x^2 + 9}$
$$Q'(x) = \frac{2x - 30}{2\sqrt{x^2 - 30x + 250}} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}}$$
$$Q'(x) = \frac{x - 15}{\sqrt{x^2 - 30x + 250}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}. fazendo\ Q'(x) = 0\ temos:$$
$$\frac{x - 15}{\sqrt{x^2 - 30x + 250}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 9}} => \frac{x - 15}{-x} = \sqrt{\frac{x^2 - 30x + 250}{x^2 + 9}}.$$
$$\left(\frac{x - 15}{-x}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{x^2 - 30x + 250}{x^2 + 9}}\right)^2 => \frac{x^2 - 30x + 225}{x^2} = \frac{x^2 - 30x + 250}{x^2 + 9}$$
$x^4 - 30x^3 + 225x^2 + 9x^2 - 270x + 2025 = x^4 - 30x^3 + 250x^2$
$$16x^2 + 270x - 2025 = 0$$
$\Delta = (270)^2 - 4.(16).(-2025) = 202500$

$$x = \frac{-270 \pm 450}{32}\ ; x = \frac{180}{32} = \frac{90}{16} = \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{8}}\boldsymbol{m}$$
$O\ outro\ valor\ para\ x\ é\ negativo, como\ trata - se\ de\ medida. x > 0.$

3.

$$a)\ \lim_{x\to3^+}\left(\frac{2x}{\ln(x-2)} - \frac{1}{x-3}\right) = \lim_{x\to3^+}\left(\frac{2x(x-3) - \ln(x-2)}{(x-3).\ln(x-2)}\right) =$$
$$\lim_{x\to3^+}\left(\frac{2x^2 - 6x - \ln(x-2)}{(x-3).\ln(x-2)}\right) = \lim_{x\to3^+}\left(\frac{4x - 6 - \frac{1}{x-2}}{\ln(x-2) + \frac{x-3}{x-2}}\right) =$$
$$\lim_{x\to3^+}\left(\frac{(4x-6)(x-2) - 1}{(x-2).\ln(x-2) + x - 3}\right) = \lim_{x\to3^+}\frac{\overbrace{4x^2 - 14x + 11}^{\substack{5\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-2).\ln(x-2) + x - 3}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$
$$*\ Por\ definição, \lim_{x\to3^+}\left(\frac{2x}{\ln(x-2)} - \frac{1}{x-3}\right) \nexists.$$

$b)\ Se\ o\ gráfico\ fosse\ da\ primeira\ derivada\ de\ uma\ função\ f, o\ ponto\ (c, 0),$
$onde\ f'(c) = 0\ é\ classificado\ como\ um\ ponto\ crítico!\ Onde\ podemos\ ter\ f(c)$
$sendo\ um\ valor\ máximo\ ou\ mínimo\ local, neste\ caso, temos\ um\ ponto\ de\ máximo$
$local\ em\ x = c, pois\ a\ função\ passa\ de\ crescente\ à\ decrescente\ em\ x = c.$

$c)\ Se\ o\ gráfico\ fosse\ da\ segunda\ derivada\ da\ função\ f, como\ há\ mudança\ na$
$direção\ da\ concavidade\ em\ x = c, temos\ que\ o\ ponto\ (c, 0)\ é\ classificado\ como$
$ponto\ de\ inflexão, na\ verdade, \big(c, f(c)\big)\ é\ o\ ponto\ de\ inflexão!$

4.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & se\ x \le 1, \\ mx + b, & se\ x > 1 \end{cases}$$
$a)\ Relação\ entre\ m\ e\ b\ para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ x = 1.$
$-Dizemos\ que\ uma\ função\ f\ é\ contínua\ no\ ponto\ x = a\ se, somente\ se,$
$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$
$1)\ f(1) = 1^3 = 1.$
$2)\ \lim_{x\to1} f(x)\ ; note\ que\ devemos\ calcular\ o\ limite\ lateral\ á\ direita\ de\ x = 1, pois$
$o\ limite\ lateral\ esquerdo\ já\ satisfaz\ a\ igualdade\ acima!$
$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(mx + b) = m + b;$
$3)\ f(1) = \lim_{x\to1^+} f(x) \Rightarrow 1 = m + b\ \therefore m + b = 1\ (I)$

$b)\ Como\ f\ é\ uma\ função\ sentencial\ composta\ por\ funções\ polinomiais, temos$
$que\ f\ é\ diferenciável\ no\ domínio\ de\ cada\ sentença, ou\ seja, f\ é\ diferenciável$
$em\ (-\infty, 1) \cup (1, +\infty). Para\ que\ f\ seja\ diferenciável\ em\ \mathbb{R}\ devemos\ encontrar$
$os\ valores\ de\ m\ e\ b\ para\ que\ exista\ f'(1).$
$-Calculando\ as\ derivadas\ laterais\ em\ x = 1, temos:$
$$f'_-(1) = \lim_{x\to1^-}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to 1^-}(x^2+x+1) = \lim_{x\to 1^-} x^2 + \lim_{x\to 1^-} x + \lim_{x\to 1^-} 1 = 1^2+1+1 = 3.$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{mx+b-1}{x-1}\ ; pela\ equação\ (I), temos\ b = 1-m$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{mx+b-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{mx+1-m-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{m(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} m = m.$$

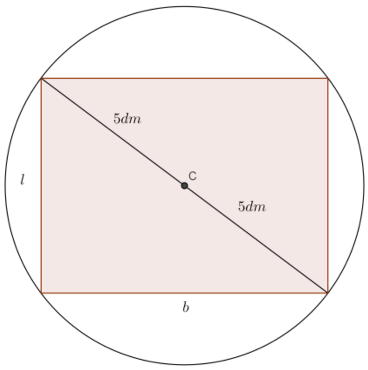
$-$*Dizemos que* f *é diferenciável em* $x = a$, *se as derivadas laterais existem e são iguais. Logo,* $f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 3 = m \therefore m = 3.$
$*$ *Com* $m = 3$, *substituindo na equação* (I), *obtemos* $b = -2.$
$*$ *Com esses valores de* m *e* b, *temos* f *diferenciável em* $\mathbb{R}$.

$c)$ *Determinar* $f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & se\ x \le 1, \\ 3x-2, & se\ x > 1 \end{cases}$$
$\rightarrow$ *Seja* $x + \Delta x < 1$ *e, consequentemente, para* $x < 1$ *temos*:
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2) = 3x^2$$
$\rightarrow$ *Seja* $x + \Delta x > 1$ *e, consequentemente, para* $x > 1$ *temos*:
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)-2-3x+2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3.$$

$-$*Assim, uma expressão para* $f'(x)$ *é*:
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & se\ x < 1 \\ 3, & se\ x > 1 \end{cases}$$

5.
$*$ *Sobre o retângulo temos*:
$$b^2 + l^2 = 100 \Rightarrow l = \sqrt{100-b^2}$$
$*$ *A área do retângulo em função da medida da base*:
$$A = b.l$$
$$A = b\sqrt{100-b^2}$$



$*$ *Como* A *e* b *estão em função do tempo então*:
$$A(t) = b(t)\sqrt{100-(b(t))^2}$$
$$A'(t) = b'(t)\sqrt{100-\left(b(t)\right)^2} + b(t).\frac{\left(-2b(t).b'(t)\right)}{2\sqrt{100-\left(b(t)\right)^2}}$$
$$A'(t) = b'(t)\sqrt{100-\left(b(t)\right)^2} - \frac{\left(b(t)^2.b'(t)\right)}{\sqrt{100-\left(b(t)\right)^2}}$$
Da questão temos: $b'(t) = -2$ *e* $b(t) = 6dm$. *Logo, obtemos*:
$$A'(t) = -2\sqrt{100-36} + \frac{36.2}{\sqrt{100-36}} = -16 + \frac{72}{8} = -16+9 = -7dm^2/s$$

$* \, Obs$: *o sinal negativo usado nas taxas indicam o decrescimento das áreas, tanto do retângulo inscrito quanto a área do círculo.*

6.

$a)\; y = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right);$ *encontrar o ponto de inflexão!*

$$y' = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$y' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

$$y' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{(1+x^2)}{2|x|}$$

$$y' = -\frac{2x}{|x|(1+x^2)} \quad ; \qquad g(x) = |x| \to g'(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$y'' = \frac{-2|x|(1+x^2) + 2x\left[\frac{|x|}{x}.(1+x^2) + |x|.(2x)\right]}{[|x|(1+x^2)]^2}$$

$$y'' = \frac{4x^2|x|}{x^2(1+x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{4|x|}{(1+x^2)^2}$$

$* \, Obs$: *note que a segunda derivada da função y é sempre positiva, ou seja, $y'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e, portanto, não há mudança na direção da concavidade e, consequentemente, não há ponto de inflexão em y.*

$b)\; f(x) = x^3 + x + 1 \;;\; g(f(x)) = x$; *determinar* $g'(1)$.

$* \, f'(x) = 3x^2 + 1$

$-$*Sobre a derivada da função inversa, temos:*

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$g'(1) \Rightarrow f(x) = 1;$

$f(x) = 1 \Rightarrow x^3 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2+1) = 0 \therefore x = 0$

$-$*Logo, temos:*

$$g'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)}$$

$$g'(1) = \frac{1}{3.(0)^2 + 1}$$

$$g'(1) = \frac{1}{0+1}$$

$$g'(1) = \frac{1}{1}$$

$$g'(1) = 1$$

7.

$a)\ f(x) = x^{\operatorname{sen} x}\ ;\ \ determinar\ f'(x).$
$\ln f(x) = \ln x^{\operatorname{sen} x}$
$\ln f(x) = \operatorname{sen} x\,.\ln x$
$-Por\ diferenciação\ logarítmica, obtemos:$
$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x\,.\ln x + \operatorname{sen} x\,.\frac{1}{x}$
$f'(x) = f(x)\left[\cos x\,.\ln x + \operatorname{sen} x\,.\frac{1}{x}\right]$
$f'(x) = x^{\operatorname{sen} x}\left[\cos x\,.\ln x + \operatorname{sen} x\,.\frac{1}{x}\right]$

$b)\ f(x) = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\ \ ;\ \ determinar\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right).$
$f'(x) = \frac{\sec x\,.\operatorname{tg} x + \sec^2 x}{\sec x + \operatorname{tg} x}$
$f'(x) = \frac{\sec x\,(\sec x + \operatorname{tg} x)}{(\sec x + \operatorname{tg} x)}$
$f'(x) = \sec x$
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$

8.
$a)\ Estimar\ o\ valor\ de\ \sqrt[3]{26^2}. A\ função\ original\ para\ o\ cálculo\ é:$
$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}.\ Ou\ ainda, f(x) = x.x^{-\frac{1}{3}}\ e\ f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$
$*\ Dos\ valores\ próximos\ a\ 26, temos\ como\ valor\ conhecido\ \sqrt[3]{27}$
$*\ Logo, queremos\ f(27-1).$
$Sobre\ diferenciais\ temos:$
$$dy = f'(x).dx\ \ e\ \Delta y = f(x+dx) - f(x)$$
$Sabemos\ que\ em\ diferenciais\ dy \cong \Delta y, então:$
$$f(x + dx) - f(x) \cong f'(x).dx$$
$Se\ queremos\ f(27-1)\ temos\ que\ x = 27\ e\ \ dx = -1, logo:$
$$f(27-1) - f(27) \cong \frac{2}{3\sqrt[3]{27}}.(-1)$$
$$f(26) - \sqrt[3]{27^2} \cong -\frac{2}{9}$$
$$f(26) \cong -\frac{2}{9} + 9$$
$$f(26) \cong \frac{79}{9}$$

$b)\ y = \cosh x\ \ ; determinar\ os\ pontos\ onde\ y' = 1.$
$y' = \operatorname{senh} x\,;\ \ y' = 1 \Rightarrow \operatorname{senh} x = 1$
$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$$
$$e^x - e^{-x} = 2$$
$$e^x - \frac{1}{e^x} - 2 = 0$$
$$e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$$

$\rightarrow$ *Façamos a substituição* $b = e^x$, *logo, procuramos* $b > 0$, *já que* $e^x > 0$.

$$b^2 - 2b - 1 = 0$$
$$\Delta = 4 + 4 = 8$$
$$b = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \quad (b > 0)$$
$$b = 1 + \sqrt{2}$$
$$b = e^x$$
$$x = \ln b$$
$$x = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

$$y = \cosh\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) = \frac{e^{\ln(1+\sqrt{2})} + e^{-\ln(1+\sqrt{2})}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}}{2} =$$
$\frac{2\sqrt{2}+2}{2+2\sqrt{2}} = 1$; *portanto, o ponto em questão é* $\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right), 1\right)$.

9.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}\ ; f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}\ ; f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

$*$ *Domínio da função*:

$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$;

1) *Interseções com os eixos coordenados*:

$f(0) = \frac{0^3}{(0-1)^2} = \frac{0}{1} = 0.$ *ponto* $(0, 0)$

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \therefore x = 0.$ *ponto* $(0, 0)$;

2) *Assíntotas*:

$-$*Verticais*: *Dizemos que a reta* $x = a$ *é uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos,*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*$ *Verificando se há assíntota vertical no ponto de descontinuidade de* f, *ou seja, em* $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{x^3}^{\substack{1 \\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\overbrace{x^3}^{\substack{1 \\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}}} = +\infty$$

$-$*Logo, a reta* $x = 1$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$-$*Horizontais*: *Dizemos que a reta* $y = a$ *é uma assíntota horizontal se ocorrer um dos seguintes casos,*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{x^2-2x+1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{x^2-2x+1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\infty$$

−Logo, não há assíntotas horizontais ao gráfico de $f(x)$.

−Oblíquas: Dizemos que a reta $y = ax + b$ é uma assíntota inclinada se, somente se,

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x+1} = (x+2) + \frac{3x-2}{x^2-2x+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{2x-2} = 0.$$

−Logo, a reta $y = x + 2$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de $f(x)$.

3) *Crescimento e Decrescimento*:

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

−Analisando o sinal de $f'(x)$, temos:

+ + + + + + (0) + + + + + + + + + + + + + +	x^2
− − − − − − − − − − − − − − − − − (3) + + + +	$(x-3)$
− − − − − − − − − − − − (1) + + + + + + + + +	$(x-1)^3$
+ + + + + + (0) + + (1) − − (3) + + + +	$f'(x) = x^2(x-3)/(x-1)^3$

−Da análise acima, concluímos que
f é crescente em $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$ e
f é decrescente em $(1, 3)$

4) *Máximos e Mínimos locais*:

∗ Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

−Pela análise no item anterior, temos pontos críticos em $x = 0$ e em $x = 3$, uma vez que, $x = 1$, embora não exista $f'(1)$, não pertence ao domínio da função.
−Pela análise do sinal de $f'(x)$, concluímos que há um ponto de mínimo local em $x = 3$, enquanto que em $x = 0$ é apenas um ponto crítico.

$$f(3) = \frac{3^3}{(3-1)^2} = \frac{27}{4}\ ; \quad ponto\ de\ mínimo\ local\ \left(3, \frac{27}{4}\right);$$

$5)\ Concavidades:$

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

$-Analisando\ o\ sinal\ de\ f''(x), temos:$

$- - - - - - - - - - - (0) + + + + + + + + + + +$ $\quad 6x$

$+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + (1) + + + +$ $\quad (x-1)^4$

$- - - - - - - - - - - (0) + + + + (1) + + + +$ $\quad f''(x) = 6x/(x-1)^4$

$-Da\ análise\ acima, concluímos\ que$

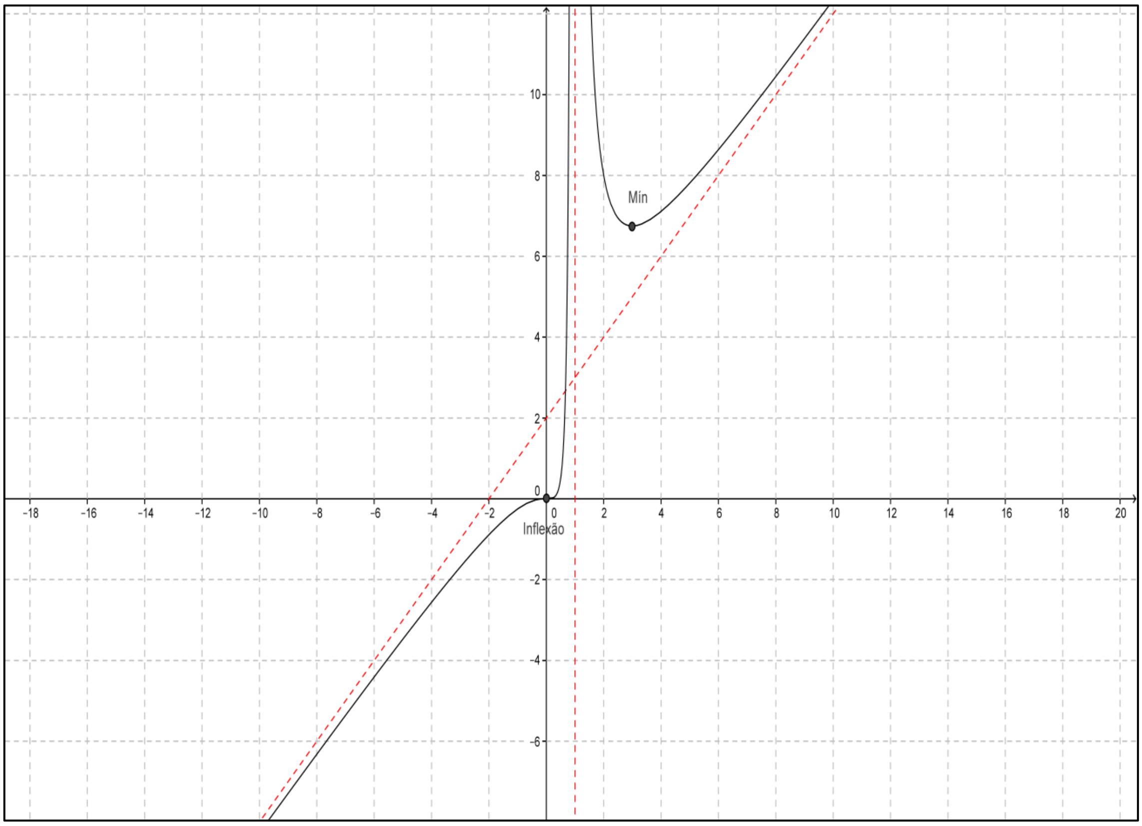
$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ em\ (0,1) \cup (1, +\infty)\ e$
$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ baixo\ em\ (-\infty, 0)$

$6)\ Pontos\ de\ Inflexão:$

$*\ Os\ pontos\ de\ inflexão\ ocorrem\ quando\ há\ mudança\ na\ direção\ da\ concavidade,$
$ou\ seja, quando\ há\ mudança\ no\ sinal\ de\ f''(x).$

$-Logo, temos\ um\ ponto\ de\ inflexão\ em\ x = 0. f(0) = 0.\ \ ponto\ (0,0).$

$7)\ Esboço\ do\ Gráfico:$



Capítulo 7 2011.2

7.1 1ª Avaliação-02 de Setembro de 2011

1.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{|2x^3+mx^2-4|}{-2x^3+7x^2+mx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{|2x^3+mx^2-4|}{|x^3|}}{\frac{-2x^3+7x^2+mx}{|x^3|}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|2+\frac{m}{x}-\frac{4}{x^3}\right|}{\frac{-2x^3+7x^2+mx}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|2+\frac{m}{x}-\frac{4}{x^3}\right|}{-2+\frac{7}{x}+\frac{m}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left|2+\frac{m}{x}-\frac{4}{x^3}\right|}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{7}{x}+\frac{m}{x^2}\right)}=\frac{\left|\lim\limits_{x\to+\infty}2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{m}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}\right|}{\lim\limits_{x\to+\infty}-2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{m}{x^2}}=$$

$$\frac{|2+0-0|}{-2+0+0}=\frac{|2|}{-2}=\frac{2}{-2}=-1.$$

$$b)\ \lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-\cos^3(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)\,[1-\cos^2(x)]}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)\,.\,\mathrm{sen}^2(x)}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to0}\left[\cos(x)\,.\left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^2\right]=\lim_{x\to0}\cos(x)\times\lim_{x\to0}\left[\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right]^2=\lim_{x\to0}\cos(x)\times\left[\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right]^2$$

$$=\cos(0)\times1^2=1\times1=1.$$

2.

$$f(x)=\frac{1}{|x|}\ ;\textit{determinar } f'(1) \textit{ e a equação da reta tangente em } (1,1).$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{1}{|x+\Delta x|}-\frac{1}{|x|}}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{1}{|x+\Delta x|}-\frac{1}{|x|}}{\Delta x}\cdot\frac{\left(\frac{1}{|x+\Delta x|}+\frac{1}{|x|}\right)}{\left(\frac{1}{|x+\Delta x|}+\frac{1}{|x|}\right)}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}}{\Delta x\left(\frac{1}{|x+\Delta x|}+\frac{1}{|x|}\right)}=$$

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{x^2-(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)}{x^2(x+\Delta x)^2}}{\Delta x\left(\frac{1}{|x+\Delta x|}+\frac{1}{|x|}\right)}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x\left(\frac{1}{|x+\Delta x|}+\frac{1}{|x|}\right)x^2(x+\Delta x)^2}=$$

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{-(2x+\Delta x)}{\left(\frac{1}{|x+\Delta x|}+\frac{1}{|x|}\right)x^2(x+\Delta x)^2}=-\frac{2x}{\frac{2x^4}{|x|}}=-\frac{|x|}{x^3}\ ;$$

$$f'(x)=-\frac{|x|}{x^3}\ \textit{, ou ainda, } f'(x)=-\frac{1}{x.|x|}\ ;$$

$$f'(1)=-\frac{1}{1}=-1.$$

$-$*Equação da reta tangente no ponto* $(1,1)$:

$$y-1=-1(x-1)$$
$$y-1=-x+1$$
$$y=-x+2$$

3.

$$x^2 + \frac{x^6}{3} \leq f(x) \leq \sec^2(x) + \frac{x^6}{3} - 1$$

$a)\ \lim_{x \to 0} f(x)\ ;$

$*\ Sejam\ g(x) = x^2 + \frac{x^6}{3}\ e\ h(x) = \sec^2(x) + \frac{x^6}{3} - 1, então, g(x) \leq f(x) \leq h(x).$

$*\ E\ ainda,$

$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \left(x^2 + \frac{x^6}{3}\right) = \lim_{x \to 0} x^2 + \lim_{x \to 0} \frac{x^6}{3} = 0 + 0 = 0.$

$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \left(\sec^2(x) + \frac{x^6}{3} - 1\right) = \lim_{x \to 0} \sec^2(x) + \lim_{x \to 0} \frac{x^6}{3} - \lim_{x \to 0} 1 = 1 + 0 - 1 = 0$

$-Assim, pelo\ Teorema\ do\ Confronto, temos\ que\ \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} f(x).$

$Portanto, \lim_{x \to 0} f(x) = 0.$

$b)\ \lim_{x \to 0} f(x).\cos\left(\frac{1}{x + x^2}\right)\ ;$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x + x^2}\right) \leq 1$$

$$-f(x) \leq f(x).\cos\left(\frac{1}{x + x^2}\right) \leq f(x)$$

$*\ E\ ainda, \lim_{x \to 0} f(x) = 0\ e\ \lim_{x \to 0} -f(x) = -\lim_{x \to 0} f(x) = 0. Assim, pelo\ Teorema\ do$

$Confronto, temos\ \lim_{x \to 0} f(x).\cos\left(\frac{1}{x + x^2}\right) = 0.$

4.

$a)\ \sqrt[3]{x - 8} + 9\sqrt[3]{x^2} = 29\ ; provar\ que\ existe\ solução\ em\ [0, 8].$

$*\ Seja\ f(x) = \sqrt[3]{x - 8} + 9\sqrt[3]{x^2}, então:$

$f(0) = -2;$

$f(8) = 36;$

$*\ Como\ f\ é\ uma\ função\ contínua\ em\ [0, 8], e\ ainda, f(0) < 29 < f(8), podemos\ garantir, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário, que\ existe\ algum\ número\ c\ em\ (0{,}8)\ tal\ que\ f(c) = 29.$

$b)$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$$

$*\ Qualquer\ função\ racional\ é\ contínua\ sempre\ que\ estiver\ definida, ou\ seja, é\ contínua\ em\ seu\ domínio.$

$-Domínio\ da\ função:\ D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\};$

$*\ Portanto, f\ é\ contínua\ em\ (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$

$$f(x) = \frac{2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 1}{x + 2} = \frac{\lim_{x \to 2} 2x - \lim_{x \to 2} 1}{\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 2} = \frac{4 - 1}{2 + 2} = \frac{3}{4};$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{\overbrace{2x-1}^{\substack{-5\\ \uparrow}}}{\underbrace{x+2}_{\substack{\downarrow\\ 0}}} = \infty \left(\lim_{x\to -2} f(x) \nexists\right);$$

5.

$$f(x) = \frac{kx^2 + (m+1)x + 2}{x^2 + 2x - 3}$$

$a) - Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{kx^2 + (m+1)x + 2}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{kx^2 + (m+1)x + 2}{x^2}}{\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{k + \frac{(m+1)}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to +\infty} k + \lim_{x\to +\infty} \frac{m+1}{x} + \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x^2}}{\lim_{x\to +\infty} 1 + \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x^2}} = \frac{k+0+0}{1+0-0} = \frac{k}{1} = k$$

$-Logo, temos\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 2\ para\ que\ a\ reta\ y = 2\ seja\ a$ única $assíntota\ horizontal, então\ k = 2.$

$b)$

$$f(x) = \frac{kx^2 + (m+1)x + 2}{(x+3)(x-1)}$$

$*\ Para\ que\ a\ reta\ x = 1$ não $seja\ assíntota\ vertical\ devemos\ ter\ o\ polinômio\ do\ numerador\ redutível, sendo\ um\ dos\ fatores\ (x-1). Dessa\ forma, \lim_{x\to 1} f(x)\ \exists.$

$-Dizemos\ que\ (x-1)$ é $um\ fator\ do\ numerador\ equivale\ dizer, pelo\ Teorema\ de\ D'Alembert, que\ x = 1$ é $raíz\ do\ numerador\ cujo\ resto$ é $zero.$

$$2x^2 + (m+1)x + 2 = 0$$
$$2.(1)^2 + (m+1).(1) + 2 = 0$$
$$2 + m + 1 + 2 = 0$$
$$m = -5$$

$-Assim,$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 + 2x - 3}$$
$$f(x) = \frac{2(x-1)^2}{(x+3)(x-1)}$$

7.2 1ª Avaliação-03 de Setembro de 2011

1.

$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}\cdot\frac{\left[\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right]}{\left[\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right]}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)\left[\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right]}{(\sqrt{x}-1)}=$
$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)=\lim_{x\to 1}\sqrt[6]{x^2}+\lim_{x\to 1}\sqrt[6]{x}+\lim_{x\to 1}1=\sqrt[6]{\lim_{x\to 1}x^2}+\sqrt[6]{\lim_{x\to 1}x}+\lim_{x\to 1}1=$
$\sqrt[6]{1^2}+\sqrt[6]{1}+1=1+1+1=3.$

$b)\ \lim_{x\to 0}x.\operatorname{cotg}(3x)=\lim_{x\to 0}\frac{x.\cos(3x)}{\operatorname{sen}(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x.\cos(3x)}{\operatorname{sen}(3x)}\cdot\frac{3}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)}\cdot\frac{\cos(3x)}{3}=$
$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)}\times\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)}{3}=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$

2.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x\,, & se\ x<0\\ \sqrt{1-x^2}, & se\ 0\le x\le 1\\ x^2-2, & se\ x>1\end{cases}$$

$*$ *Como f é uma função sentencial então f é contínua onde suas sentenças são contínuas, ou seja, onde estão definidas para seus domínios.*
−A função trigonométrica $\cos x$ é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, contínua em $(-\infty,0)$
−A função raíz $\sqrt{1-x^2}$ é contínua onde o seu radical é maior que zero. Logo, para $-1\le x\le 1$, como o domínio dessa sentença é $[0,1]$, essa sentença é contínua em $[0,1]$.
−A última sentença é uma função polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$ e, assim, contínua em $(1,+\infty)$;
$*$ *Dessas informações, temos que f é contínua em $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.*
$*$ *Vamos verificar se f é contínua nos pontos onde há mudança de sentença na função. Ou seja, em $x=0$ e em $x=1$.*
−Dizemos que uma função f é contínua no ponto $x=a$ se, somente se,

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$$

−Em $x=0$, temos:
$f(0)=\sqrt{1-0^2}=\sqrt{1-0}=\sqrt{1}=1.$
$\lim_{x\to 0}f(x)$ *; nesse caso, devemos calcular o limite lateral esquerdo, pois, $\lim_{x\to 0^+}f(x)$ já satisfaz a igualdade $f(0)$; Logo,*
$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos(x)=\cos(0)=1.$ *Portanto,* $\lim_{x\to 0}f(x)=1.$
3) $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=1.$
−Logo, f é contínua em $x=0$.

−Em $x=1$, temos:
$f(1)=\sqrt{1-1^2}=\sqrt{1-1}=\sqrt{0}=0.$
$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-2)=\lim_{x\to 1^+}x^2-\lim_{x\to 1^+}2=1^2-2=1-2=-1.$
$*$ *Como $\lim_{x\to 1^+}f(x)\neq f(1)$, já temos que não existe $\lim_{x\to 1}f(x)$ e, consequentemente, f não é contínua em $x=1$.*

$* \ Portanto, f$ é $contínua \ em \ (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$

3.

$a)$

$$f(x) = \frac{7}{x^2 + kx - 5x - 5k}$$

$* \ Para \ que \ f \ possua \ apenas \ uma \ assíntota \ vertical, devemos \ ter \ apenas \ um \ ponto \ de \ descontinuidade \ de \ f, ou \ seja, o \ denominador \ possui \ apenas \ uma \ raíz \ real \ de \ multiplicidade \ 2. O \ denominador$ é $um \ quadrado \ perfeito!$

$$x^2 + (k-5)x - 5k$$
$$\Delta = (k-5)^2 - 4.(1)(-5k)$$
$$\Delta = k^2 - 10k + 25 + 20k$$
$$\Delta = k^2 + 10k + 25$$
$$\Delta = (k+5)^2$$

$\rightarrow Para \ que \ o \ polinômio \ do \ denominador \ tenha \ apenas \ uma \ raíz \ real, \Delta = 0.$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (k+5)^2 = 0 \therefore k = -5$$

$b)$

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^4 + 4}}{2x + 1}$$

$-Dizemos \ que \ a \ reta \ y = a$ é $uma \ assíntota \ horizontal \ se \ ocorrer \ um \ dos \ seguintes \ casos,$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+4}}{2x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt[4]{x^4+4}}{|x|}}{\frac{2x+1}{|x|}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt[4]{x^4+4}}{\sqrt[4]{x^4}}}{\frac{2x+1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{1 + \frac{4}{x^4}}}{2 + \frac{1}{x}} =$$

$$\frac{\sqrt[4]{\lim_{x \to +\infty} 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x^4}}}{\lim_{x \to +\infty} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt[4]{1+0}}{2+0} = \frac{\sqrt[4]{1}}{2} = \frac{1}{2};$$

$-Logo, a \ reta \ y = \frac{1}{2}$ é $uma \ assíntota \ horizontal \ ao \ gráfico \ de \ f(x).$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+4}}{2x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\sqrt[4]{x^4+4}}{|x|}}{\frac{2x+1}{|x|}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\sqrt[4]{x^4+4}}{\sqrt[4]{x^4}}}{\frac{2x+1}{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[4]{1 + \frac{4}{x^4}}}{-2 - \frac{1}{x}} =$$

$$\frac{\sqrt[4]{\lim_{x \to -\infty} 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x^4}}}{\lim_{x \to -\infty} -2 - \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt[4]{1+0}}{-2-0} = \frac{\sqrt[4]{1}}{-2} = -\frac{1}{2};$$

$-Logo, a \ reta \ y = -\frac{1}{2}$ é $uma \ assíntota \ horizontal \ ao \ gráfico \ de \ f(x).$

4.

$a) \ \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x}.10^{\cos 2x};$

$$-1 \leq \cos(2x) \leq 1$$

$$10^{-1} \leq 10^{\cos(2x)} \leq 10^{1}$$
$$\sqrt[3]{x}.10^{-1} \leq \sqrt[3]{x}.10^{\cos 2x} \leq \sqrt[3]{x}.10$$
$* \, Sejam\ f(x) = \sqrt[3]{x}.10^{-1}, g(x) = \sqrt[3]{x}.10^{\cos 2x}\ e\ h(x) = \sqrt[3]{x}.10, então\ temos$
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$
$* \, Se\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ e\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = 0, então\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0.$
$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x}.10^{\cos 2x} = 0$$

$b)\ f(x) = \cos x^3 - x\ ; provar\ que\ f\ se\ anula\ em\ algum\ número\ positivo.$

$f(0) = \cos 0 - 0 = 1 - 0 = 1.$
$f\left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} = 0 - \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}.$
$* \, Como\ f$ é $uma\ soma\ de\ funções\ contínuas, então\ f\ também$ é $uma\ função\ contínua.$
$-Como\ f$ é $contínua\ em\ \left[0, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right]\ e\ f\left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right) < 0 < f(0), podemos\ afirmar\ pelo$
$Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ que\ existe\ algum\ número\ c \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right)\ tal\ que$
$f(c) = 0.$
$-Logo, f\ possui\ uma\ raíz\ real\ em\ algum\ número\ positivo\ nesse\ intervalo.$

5.
$a)\ f(x) = \sqrt[3]{x}. Determinar\ f'(2).$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x}.\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x}.\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} =$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left[\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x}.\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}\right]} =$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left[\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x}.\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}\right]} =$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x}.\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ ; f'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}.$$

$b)$
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \leq 2 \\ -2x^2 + 6x, & se\ x > 2 \end{cases}$$
$* \, Vamos\ calcular\ as\ derivadas\ laterais\ em\ x = 2:$
$* \, f(2) = 2^2 = 4.$
$$f'_{-}(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2 - 4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}\lim_{x\to 2^-}(x+2) = 4.$$

$$f'_{+}(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-2x^2 + 6x - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-2(x-2)(x-1)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} -2(x-1) = -2(2-1) = -2.(1) = -2.$$

$* \, Como \; f'_{-}(2) \neq f'_{+}(2) \; então \; f \; não \; é \; diferenciável \; em \; x = 2 \; e, portanto, não \; há \; reta \; tangente \; no \; ponto \; x = 2.$

7.3 2ª Avaliação-30 de Setembro de 2011

1.

$a)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}, & se\ x\neq 0\\ 0, & se\ x=0\end{cases}$$

$i)\ Verificar\ a\ continuidade\ de\ f\ em\ x=0.$

$-Dizemos\ que\ uma\ função\ f\ é\ contínua\ no\ ponto\ x=a\ se, somente\ se,$

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(a)$$

$-Em\ x=0, temos:$

$f(0)=0;$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}\ ;$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$*\ Obs: se\ x\to 0^+, x>0. Então, |x|=x.$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen} x}{-x}=-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=-1$

$*\ Obs: se\ x\to 0^-, x<0. Então, |x|=-x.$

$-Como\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\ então, \lim\limits_{x\to 0} f(x)\ não\ existe.$

$*\ Portanto, f\ não\ é\ contínua\ em\ x=0.$

$ii)\ Verificar\ a\ diferenciabilidade\ de\ f\ em\ x=0.$

$-Se\ f\ for\ diferenciável\ em\ x=a, então\ f\ é\ contínua\ em\ a.$

$*\ Como\ f\ não\ é\ contínua\ em\ x=0, então\ f\ não\ é\ diferenciável\ em\ x=a.$

$b)\ F(x)=e^{[g(x)]^2}.g(x)\ ; determinar\ F'(x).$

$F'(x)=2g(x).g'(x).e^{[g(x)]^2}.g(x)+e^{[g(x)]^2}.g'(x)$

$F'(x)=g'(x).e^{[g(x)]^2}\left[2\big(g(x)\big)^2+1\right];$

2.

$a)\ y=\log_2\left(4^{\operatorname{arctg} x^2}x\right);\ \ determinar\ y'.$

$y=\log_2 4^{\operatorname{arctg} x^2}+\log_2 x$

$y=\operatorname{arctg} x^2\cdot\log_2 4+\log_2 x$

$y=2\operatorname{arctg} x^2+\log_2 x$

$y'=2\cdot(2x)\cdot\dfrac{1}{1+(x^2)^2}+\dfrac{1}{x.\ln(2)}$

$y'=\dfrac{4x}{1+x^4}+\dfrac{1}{x.\ln(2)}$

$b)\ y=e^{\operatorname{tg} x}-\sec x\ \ ; equação\ da\ reta\ normal\ no\ ponto\ em\ que\ x=0.$

$* \, Para \; x = 0, temos:$
$y = e^0 - \sec(0) = 1 - 1 = 0 \, . \; ponto \; (0,0) \, ;$

$y' = \sec^2 x \, . \, e^{\operatorname{tg} x} - \sec x \, . \operatorname{tg} x$
$* \, Calculando \; o \; valor \; de \; y' no \; ponto \; em \; que \; x = 0, obtemos:$
$y' = \sec^2(0) \, . \, e^{\operatorname{tg} 0} - \sec(0) \, . \operatorname{tg}(0)$
$y' = 1. e^0 - 1. (0)$
$y' = 1 - 0 = 1.$

$-Logo, o \; coeficiente \; angular \; da \; reta \; normal \; m_n = -\dfrac{1}{y'} = -\dfrac{1}{1} = -1.$

$* \, Equação \; da \; reta \; normal \; no \; ponto \; (0,0):$

$$y - 0 = -1(x - 0)$$
$$y = -x$$

3.
$a) \; f(x) = \operatorname{arcsen}(x) + \arccos(x) \;\; ; mostrar \; que \; f'(x) = 0, para \; todo \; x \in [-1,1].$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$f'(x) = \frac{0}{\sqrt{1 - x^2}} = 0;$$

$* \, Como \; f$ é $constante, basta \; atribuirmos \; qualquer \; valor \; para \; x \; do \; seu \; domínio$ $para \; determinar \; seu \; valor.$
$* \, Seja \; x = 1, então:$

$$f(1) = \operatorname{arcsen}(1) + \arccos(1)$$
$$f(1) = \frac{\pi}{2} + 0$$
$$f(1) = \frac{\pi}{2};$$

$* \, Logo, f(x) = \dfrac{\pi}{2}, \forall x \in [-1,1].$

$b) \; y = \log_{10}\left(\dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}\right) \; ; Determinar \; y'.$

$$y = \log_{10}(1 + e^x) - \log_{10}(1 - e^x)$$
$$y' = \frac{e^x}{(1 + e^x). \ln(10)} + \frac{e^x}{(1 - e^x). \ln(10)}$$
$$y' = \frac{e^x}{\ln(10)} \cdot \left[\frac{1}{1 + e^x} + \frac{1}{1 - e^x}\right]$$
$$y' = \frac{e^x}{\ln(10)} \cdot \frac{2}{1 - e^{2x}}$$
$$y' = \frac{2e^x}{(1 - e^{2x}). \ln(10)}$$

$4. \, x^2 + xy + y^2 = 7 \; ; determinar \; os \; pontos \; em \; que \; y = 0.$
$* \, Substituindo \; y = 0, obtemos:$
$x^2 = 7 \therefore x = \sqrt{7} \; e \; x = -\sqrt{7}$

$* \; Pontos \; de \; interseção \; com \; o \; eixo \; x: \left(\sqrt{7}, 0\right) \; e \; \left(-\sqrt{7}, 0\right);$

$-Por \; derivação \; implícita, temos:$

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0$$

$$y'.(2y + x) = -(2x + y)$$

$$y' = -\frac{2x + y}{2y + x}$$

$-Calculando \; o \; valor \; de \; y' para \; os \; pontos \; encontrados \; acima:$

$* \; Para \; \left(\sqrt{7}, 0\right), obtemos:$

$$y' = -\frac{2\sqrt{7} + 0}{2.(0) + \sqrt{7}} = -\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = -2;$$

$* \; Para \; \left(\sqrt{7}, 0\right), obtemos:$

$$y' = -\frac{\left(-2\sqrt{7}\right) + 0}{2.(0) - \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{-\sqrt{7}} = -2;$$

$* \; Dizemos \; que \; duas \; reta \; são \; parelelas \; quando \; seus \; coeficientes \; angulares \; são \; iguais. Note \; que \; encontramos \; os \; mesmos \; valores \; para \; y' \; em \; ambos \; os \; pontos, ou \; seja, temos \; duas \; retas \; tangentes \; paralelas.$

5.

$2^{\operatorname{sen} x}. \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{3} \; ; \; \; determinar \; y' \; no \; ponto \; em \; que \; y = \sqrt{3} \; ;$

$* \; Para \; y = \sqrt{3}, temos:$

$$2^{\operatorname{sen} x}. \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$2^{\operatorname{sen} x}. \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$2^{\operatorname{sen} x} = 1 \; \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \therefore x = 0. \; ponto \; \left(0, \sqrt{3}\right)$$

$-Por \; derivação \; implícita, temos:$

$$\cos x \, . \, 2^{\operatorname{sen} x}. \ln(2) \, . \operatorname{arctg} y + 2^{\operatorname{sen} x}. y'. \frac{1}{1 + y^2} = 0$$

$$y' = -\frac{(\cos x \, . \, 2^{\operatorname{sen} x}. \ln(2) \, . \operatorname{arctg} y). (1 + y^2)}{2^{\operatorname{sen} x}}$$

$-Calculando \; o \; valor \; de \; y' \; no \; ponto \; encontrado, obtemos:$

$$y' = -\frac{\left(\cos(0) \, . \, 2^{\operatorname{sen}(0)}. \ln(2) \, . \operatorname{arctg} \sqrt{3}\right). \left(1 + \sqrt{3}^2\right)}{2^{\operatorname{sen}(0)}}$$

$$y' = -\frac{\ln(2) \, . \frac{\pi}{3} . \, 4}{1}$$

$$y' = -\frac{4\pi. \ln(2)}{3}$$

7.4 2ª Avaliação-01 de Outubro de 2011

1.

$a)\ f(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{e^{x^2}}\ ;$

$$f'(x) = \frac{3\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{x^2} - 3\sqrt{x}\cdot(2x)\cdot e^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{3}{2\sqrt{x}} - 6x\sqrt{x}}{e^{x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{3-12x^2}{2e^{x^2}.\sqrt{x}}\ , ou\ ainda, f'(x) = \frac{3(1-4x^2)}{2e^{x^2}.\sqrt{x}}$$

$b)\ f(x) = \sqrt{\mathrm{sen}(2x+x^6)} + 15;$

$$f'(x) = (6x^5+2)\cdot\cos(2x+x^6)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{sen}(2x+x^6)}}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^5+1)\cdot\cos(2x+x^6)}{\sqrt{\mathrm{sen}(2x+x^6)}}$$

2.

$a)\ f(x) = \sqrt[7]{x^2}\ ;\ \ f(x) = x^{\frac{2}{7}};$

$$f'(x) = \frac{2}{7}\cdot x^{-\frac{5}{7}}\ ;\ \ f'(x) = \frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}\ ;$$

$\rightarrow$ *Notamos que* $f'(0)$ *não existe, ou seja,* f *não é diferenciável em* $x = 0$.

$*$ *Se* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = +\infty$ *ou* $-\infty$*, então* f *não é derivável em* $x = x_o$*. Mas, se* f *é contínua em* x_o*, seu gráfico admite uma reta tangente vertical no ponto* $P = \big(x_o, f(x_o)\big)$.

$*$ *Note que* $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *, ou seja,* f *é contínua em* $x = 0$.

$-$*Analisando o comportamento de* $f'(x)$ *em* $x = 0$*, obtemos:*

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty\ e\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$$

$*$ *Logo,* f *admite uma reta tangente vertical no ponto* $(0,0)$ *cuja equação da reta é* $x = 0$.

$b)\ f(x) = x.\mathrm{arcsen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\ ;\ \ calcular\ f'\left(\dfrac{1}{2}\right).$

$*$ *Domínio da função* f:

$$-1 \le \frac{1}{x} \le 1\ \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| \le 1\ \Rightarrow \frac{1}{x^2} \le 1 \Rightarrow x^2 \ge 1\ \therefore x \le -1\ ou\ x \ge 1$$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R}\ |\ x \le -1\ ou\ x \ge 1\}$

$*$ *Com isso, já podemos concluir que não existe* $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$*, pois* $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *não está definido e, portanto,* f *não é contínua em* $x = 1/2$ *e, consequentemente, não*

$é\ diferenciável\ nesse\ ponto.$
$*\ Comprovando\ ...$

$$f'(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$f'(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{|x|}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{arcsen(2)} - \frac{\left|\frac{1}{2}\right|}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-1}}\ ;$$

$*\ Note\ que\ os\ termos\ em\ destaque\ não\ possuem\ imagem\ nos\ reais\ e, portanto,$
$não\ existe\ f'\left(\frac{1}{2}\right).$

3.

$$f(x) = |x^2-5x+6| = \begin{cases} x^2-5x+6, & se\ x \le 2\ ou\ x \ge 3 \\ -(x^2-5x+6), & se\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5, & se\ x < 2\ ou\ x > 3 \\ -(2x-5), & se\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$*\ Como\ f$ é $uma\ função\ sentencial\ composta\ por\ funções\ polinomiais\ e, portanto,$
$contínuas\ e\ diferenciáveis\ nos\ reais, temos\ que\ f$ é $diferenciável\ no\ domínio$
$de\ cada\ sentença, onde\ esta$ é $diferenciável. Ou\ seja, f$ é $diferenciável\ em\ (-\infty, 2)$
$\cup (2,3) \cup (3,+\infty). Falta\ verificar\ se\ f$ é $derivável\ nos\ pontos\ x = 2\ e\ x = 3.$
$-Verificando\ as\ derivadas\ laterais\ em\ x = 2, temos:$
$f'_-(2) = 2.(2) - 5 = 4 - 5 = -1.$
$f'_+(2) = -(2.(2)-5) = -(4-5) = -(-1) = 1.$
$*\ Logo, como\ as\ derivadas\ laterais\ existem, mas\ são\ diferentes, temos\ que\ f$
$não$ é $derivável\ em\ x = 2.$
$-Verificando\ as\ derivadas\ laterais\ em\ x = 3, temos:$
$f'_-(3) = 2.(3) - 5 = 6 - 5 = 1.$
$f'_+(3) = -(2.(3)-5) = -(6-5) = -(1) = -1.$
$*\ Logo, como\ as\ derivadas\ laterais\ existem, mas\ são\ diferentes, temos\ que\ f$
$não$ é $derivável\ em\ x = 3.$

$-Portanto, f$ é $diferenciável\ em\ nos\ reais, exceto\ em\ x = 2\ e\ x = 3.$

4.
$a)\ \operatorname{arcsec}(x+y) = x^2 - y\ ; determinar\ y'.$

$$(1+y') \cdot \frac{1}{|x+y|\sqrt{(x+y)^2-1}} = 2x - y'$$

$$y'.\left(\frac{1}{|x+y|\sqrt{(x+y)^2-1}} + 1\right) = 2x - \frac{1}{|x+y|\sqrt{(x+y)^2-1}}$$

$$y' = \frac{2x - \frac{1}{|x+y|\sqrt{(x+y)^2-1}}}{\frac{1}{|x+y|\sqrt{(x+y)^2-1}} + 1}$$

$$y' = \frac{2x|x+y|\sqrt{(x+y)^2-1} - 1}{|x+y|\sqrt{(x+y)^2-1} + 1}$$

$b)\ y = \sec^{-1} x \ \Leftrightarrow \sec y = x\ ;\ \ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\ \ ou\ \pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2}\ ;$

$*\ temos\ que\ y' = [\sec^{-1} x]'\ e\ que, por\ derivação\ implícita, y' \cdot \sec y \cdot \operatorname{tg} y = 1$

$Assim, temos:$

$$y' = \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{\sec y \cdot \operatorname{tg} y}$$

$*\ Sobre\ algumas\ propriedades\ trigonométricas, temos:$

$$\operatorname{tg}^2 y + 1 = \sec^2 y \Rightarrow \operatorname{tg} y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1}$$

$*\ Como\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\ \ ou\ \pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2}, ou\ seja, y\ pertence\ ao\ 1^{\underline{o}}\ e\ 3^{\underline{o}}\ quadrantes,$

$temos\ que\ \ \operatorname{tg} y > 0. Portanto, \operatorname{tg} y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{\sec y \cdot \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$*\ Lembremos, que\ y = \sec^{-1} x\ \ \Leftrightarrow \sec y = x. Logo,$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$5. (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\ ; determinar\ y' no\ ponto\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$

$-Por\ derivação\ implícita, temos:$

$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 2(2x - 2yy')$

$2(x^2 + y^2)(x + yy') = 2(x - yy')$

$x(x^2 + y^2) + y'(x^2 y + y^3) = x - yy'$

$yy'.(x^2 + y^2 + 1) = x(1 - x^2 - y^2)$

$$y' = \frac{x(1 - x^2 - y^2)}{y(x^2 + y^2 + 1)}$$

$-Calculando\ o\ valor\ de\ y'\ para\ o\ ponto\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), obtemos:$

$$y' = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-1)}{\frac{1}{2}(1+1)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(0)}{\frac{1}{2}(2)} = \frac{0}{1} = 0.$$

7.5 3ª Avaliação-04 de Novembro de 2011

1.

$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{e}{x}\right)^{x}$; *façamos a substituição de variável* $x = e.n$, *se* $x \to \infty, n \to \infty$;

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{e}{x}\right)^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{e}{e.n}\right)^{e.n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{e.n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{e} =$

$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{e} = e^{e};$

$b)\ f(x) = 2x - 3 + \cos x$;

$f(0) = 0 - 3 + 1 = -2;$

$f(\pi/2) = \pi - 3;$

$*$ *Como* f *é uma soma de funções contínuas em* $\mathbb{R}$, f *é uma função contínua em* $\mathbb{R}$.

$-$*Assim,* f *é contínua no intervalo fechado* $[0, \pi/2]$ *e* $f(0) < 0 < f(\pi/2)$. *Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número* $c \in (0, \pi/2)$ *tal que* $f(c) = 0$.

$-$*Portanto,* f *possui uma raíz real em* $(0, \pi/2)$.

$*$ *Suponhamos que* f *possui duas raízes reais distintas* c *e* b, $f(b) = f(c) = 0$.

$f'(x) = 2 - \operatorname{sen}(x)$; $D(f') = \mathbb{R};$

1) f *é contínua no intervalo fechado* $[b, c]$;

2) f *é diferenciável no intervalo aberto* (b, c);

3) $f(b) = f(c)$;

Então existe algum $x \in (b, c)$ *tal que* $f'(x) = 0$;

$\to$ *Note que* $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *e, portanto, não existe* x *tal que* $f'(x) = 0$.

$*$ *Logo, a equação* $2x - 3 + \cos x = 0$ *possui exatamente uma única solução.*

2. $y = s(t) = t^3 - t^2 - 5t + 6$; *com* $t \geq -2$.

$a)$ *Determinar as funções da velocidade e aceleração;*

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t) = 3t^2 - 2t - 5$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t) = 6t - 2$$

$b)$ *Distância percorrida no intervalo* $0 \leq t \leq 3$.

$s(3) = 3^3 - 3^2 - 5.(3) + 6 = 27 - 9 - 15 + 6 = 9$

$s(0) = 0^3 - 0^2 - 5.(0) + 6 = 0 - 0 - 0 + 6 = 6.$

$\Delta s = s(3) - s(0) = 9 - 6 = 3.$

$c)$ *Encontrar a velocidade máxima e mínima, no intervalo* $[-2, 3]$;

$-$*Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:*

1) *Os valores de* v *nos extremos do intervalo:*

$v(-2) = 3.(-2)^2 - 2.(-2) - 5 = 3.(4) + 4 - 5 = 12 + 4 - 5 = 11$

$v(3) = 3.(3)^2 - 2.(3) - 5 = 3.(9) - 6 - 5 = 27 - 6 - 5 = 16.$

$2)$ *Os valores de v nos números críticos, ou seja, onde* $a(t) = 0$.

$a(t) = 0 \Rightarrow 6t - 2 = 0 \Rightarrow 6t = 2 \therefore t = \frac{1}{3}$;

$v\left(\frac{1}{3}\right) = 3.\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2.\left(\frac{1}{3}\right) - 5 = 3.\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{2}{3} - 5 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 5 = -\frac{1}{3} - 5 = -\frac{16}{3}$;

$3)$ *Comparando os valores encontrados, concluímos que*:

$v(3) = 16$ é *a velocidade máxima no intervalo e*

$v\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{16}{3}$ é *a velocidade mínima no intervalo*;

3. *A velocidade com a qual o volume está aumentando no cilindro* é *igual* à *velocidade com a qual o volume do cone está entrando no cilindro. Em outras palavras, temos*:

$$\frac{dV_{cilindro}}{dt} = \frac{dV_{cone}}{dt}$$

$*$ *Com relação ao cone, temos*:

$$\frac{h}{4} = \frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}h$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V_{cone} = \frac{\pi h^3}{12}$$

$-$*Pela Regra da Cadeia, temos*:

$$\frac{dV_{cone}}{dt} = \frac{dV_{cone}}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV_{cone}}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \cdot 2$$

$$\frac{dV_{cone}}{dt} = \frac{\pi h^2}{2}$$

$-$*Quando o cone está totalmente submerso, ou seja,* $h = 4cm$, *obtemos*:

$$\frac{dV_{cone}}{dt} = 8\pi cm^3/s$$

$*$ *Devemos determinar* $\frac{dh}{dt}$ *no cilindro*!

$$\frac{dV_{cilindro}}{dt} = \frac{dV_{cilindro}}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$8\pi = \pi r^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$8\pi = 16\pi \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}5cm/s$$

$-$*Logo, o nível de água no cilindro está crescendo* à *uma velocidade de* $0{,}5cm/s$

4. $f(x) = 1 - x^{2/3}$; *determinar os extremos absolutos no intervalo* $[-1, 8]$;

$-$*Pelo Método do Intervalo Fechado, temos*:

1) $Os\ valores\ de\ f\ nos\ extremos\ do\ intervalo$:
$f(-1) = 1 - (-1)^{2/3} = 1 - 1 = 0.$
$f(8) = 1 - (8)^{2/3} = 1 - 4 = -3.$

2) $Os\ valores\ de\ f\ nos\ números\ críticos\ no\ intervalo$:

$*\ Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f$ é $um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde\ ou$ $f'(c) = 0\ ou\ f'(c)\ não\ existe.$

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$\rightarrow Note\ que\ não\ temos\ f'(x) = 0. No\ entanto, f'(0)\ não\ existe. Logo, x = 0$ é um $número\ crítico\ de\ f, pois\ x = 0\ pertence\ ao\ domínio\ de\ f.$
$f(0) = 1 - (0)^{2/3} = 1 - 0 = 1.$

3) $Comparando\ os\ valores\ encontrados, concluímos\ que$
$f(0) = 1$ é $o\ valor\ máximo\ absoluto\ no\ intervalo\ [-1, 8]\ e$
$f(8) = -3$ é $o\ valor\ mínimo\ absoluto\ no\ intervalo\ [-1,8].$

5. $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$; $comprovar\ as\ hipóteses\ do\ Teorema\ do\ Valor\ Médio, no$ $intervalo\ [-\pi/2\ ,\pi/2];$
$*\ Domínio\ da\ função$:

$$1 + \cos x \geq 0$$
$$\cos x \geq -1$$

$D(f) = \mathbb{R}, pois -1 \leq \cos x \leq 1. Logo, f\ está\ definida\ para\ todo\ x\ nos\ reais.$

1. f é $contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [-\pi/2\ ,\pi/2];$

$f'(x) = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1 + \cos x}}$; $D(f') = \mathbb{R}$;

2. f é $diferenciável\ no\ intervalo\ aberto\ (-\pi/2\ ,\pi/2)$;

$Então, existe\ algum\ c \in (-\pi/2\ ,\pi/2)\ tal\ que\ f'(c) = \dfrac{f(\pi/2) - f(-\pi/2)}{\pi/2 - (-\pi/2)}.$
$f'(c) = \dfrac{1 - 1}{\pi} = \dfrac{0}{\pi} = 0;\ \ f'(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0\ \therefore x = 0$.
$*\ E\ x = 0\ pertence\ ao\ intervalo\ \ (-\pi/2\ ,\pi/2), comprovando\ as\ hipóteses\ do$ $Teorema\ do\ Valor\ Médio.$

7.6 3ª Avaliação-05 de Novembro de 2011

$1. h_o = 112m\ ;\ \ s(t) = -16t^2 + 96t\ , s\ em\ metros\ e\ t\ em\ segundos.$

$a)\ v(t) = s'(t) = -32t + 96$
$v(2) = -32.(2) + 96$
$v(2) = -64 + 96$
$v(2) = 32m/s$

$b)\ s(t)\ quando\ v(t) = 0;$
$v(t) = 0 \Rightarrow -32t + 96 = 0 \Rightarrow 32t = 96 \therefore t = 3s$
$s(3) = -16.(3)^2 + 96.(3)$
$s(3) = -16.(9) + 288$
$s(3) = -144 + 288$
$s(3) = 144m$
$*\ Obs: s(3)$ *corresponde à distância percorrida verticalmente a partir do topo do prédio, como se a altura do prédio fosse* 0 *em relação ao plano horizontal do movimento. Logo, a altura máxima, em relação ao solo,* é $112m + 144m = 256m$

$c)\ s(t) = -112$
$-16t^2 + 96t = -112$
$16t^2 - 96t + 112 = 0$
$t = -1\quad ou\quad t = 7s$
$*\ t = 0$ é *o início do movimento. Logo, a bola leva* $7s$ *para atingir o solo.*

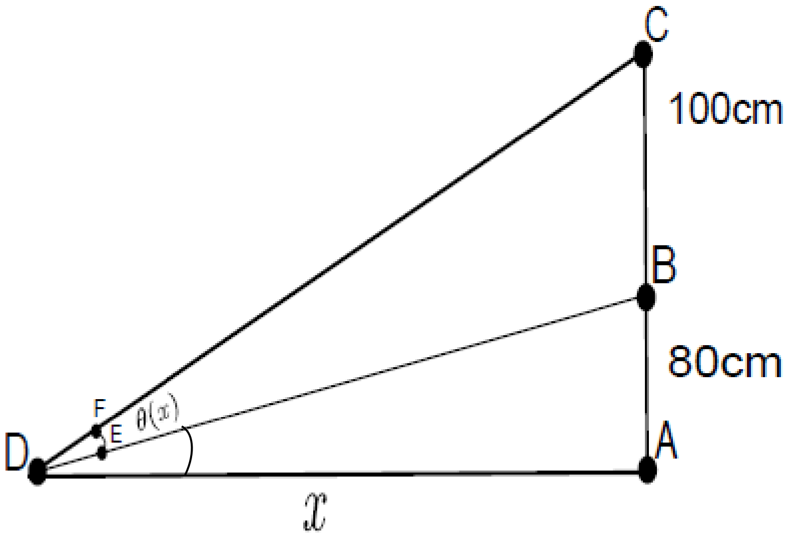
$d)\ v(6) = -32.(6) + 96$
$v(6) = -192 + 96$
$v(6) = -96m/s$

2.
$a)\ f(x) = \cosh x + \operatorname{arctg}(\operatorname{senh}(2x))\ ; Linearização\ em\ a = 0.$

$$L(x) - f(a) = f'(a).(x - a)$$
$$L(x) - f(0) = f'(0).(x - 0)$$
$$L(x) - [\cosh(0) + \operatorname{arctg}(\operatorname{senh}(0))] = \left[\operatorname{senh}(0) + \frac{2\cosh(0)}{1 + \operatorname{senh}^2(0)}\right].(x)$$
$$L(x) - [1 + 0] = \left[0 + \frac{2}{1 + 0}\right]x$$
$$L(x) - 1 = 2x$$
$$L(x) = 2x + 1$$

$b)\ L(0{,}03) \cong f(0{,}03)$
$L(0{,}03) = 2.(0{,}03) + 1$
$L(0{,}03) = 0{,}06 + 1$
$L(0{,}03) = 1{,}06$

3.



$a)$ *Seja* α *o ângulo* $A\widehat{D}B$, *então temos* $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{80}{x}$ *; com* x *em centímetros nessa expressão. Vamos colocar as medidas em metros para facilitar o cálculo do ítem b.*

$$\operatorname{tg}(\alpha+\theta) = \frac{1{,}80}{x}$$
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{tg}\theta} = \frac{1{,}80}{x}$$
$$\frac{\frac{0{,}8}{x} + \operatorname{tg}\theta}{1-\frac{0{,}8}{x}.\operatorname{tg}\theta} = \frac{1{,}80}{x}$$
$$0{,}8 + x.\operatorname{tg}\theta = 1{,}80 - \frac{(1{,}80).(0{,}8)}{x}.\operatorname{tg}\theta$$
$$0{,}8 + x.\operatorname{tg}\theta = 1{,}80 - \frac{1{,}44}{x}.\operatorname{tg}\theta$$
$$\operatorname{tg}\theta\left(x+\frac{1{,}44}{x}\right) = 1{,}00$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{x+\frac{1{,}44}{x}}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{x^2+1{,}44}$$
$$\theta(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x^2+1{,}44}\right)$$

$b)$ *Calcular* $\dfrac{d\theta}{dt}$ *quando* $x = 2$; $\dfrac{dx}{dt} = -1{,}5\,m/s = -\dfrac{3}{2}m/s$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx}.\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \theta'(x) = \frac{x^2+1{,}44-2x^2}{(x^2+1{,}44)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x^2+1{,}44}\right)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1{,}44-x^2}{(x^2+1{,}44)^2+x^2}\ ;\ \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1{,}44-4}{5{,}44^2+4} = -\frac{2{,}56}{33{,}5936}rad/m$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dx}.\frac{dx}{dt}\rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt}=-\frac{2{,}56}{33{,}5936}.\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3{,}84}{33{,}5936}rad/s$$

4.

$a)\ f(x)=2\,\mathrm{sen}\,x+\cos 2x\ ;Achar\ os\ extremos\ absolutos\ em\ [0,2\pi].$

$-Pelo\ Método\ do\ Intervalo\ Fechado, temos:$

$1)\ Os\ valores\ de\ f\ nos\ extremos\ do\ intervalo:$

$f(0)=2.\mathrm{sen}(0)+\cos(0)=2.(0)+1=0+1=1;$

$f(2\pi)=2.\mathrm{sen}(2\pi)+\cos(4\pi)=2.(0)+1=0+1=1;$

$2)\ Os\ valores\ de\ f\ nos\ números\ críticos:$

$*\ Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f$ é $um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde\ ou$ $f'(c)=0\ ou\ f'(c)\ não\ existe.$

$f'(x)=2\cos x-2\,\mathrm{sen}(2x)$

$f'(x)=2\cos x-4\,\mathrm{sen}\,x\,.\cos x$

$f'(x)=2\cos x\,.(1-2\,\mathrm{sen}\,x)$

$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}2\cos x=0\\1-2\,\mathrm{sen}\,x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\\\mathrm{sen}\,x=1/2\end{cases}\ ;para\ o\ intervalo\ \ (0,2\pi)\ temos:$

$x=\frac{\pi}{2}\ ;x=\frac{3\pi}{2}\ ;x=\frac{\pi}{6}\ e\ x=\frac{5\pi}{6}\ são\ os\ números\ críticos\ de\ f\ no\ intervalo.$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}+\cos\pi=2+(-1)=1;$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}+\cos 3\pi=-2+(-1)=-3;$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2};$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{3}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2};$

$3) Comparando\ os\ valores\ obtidos, concluímos\ que$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$ é $o\ valor\ máximo\ absoluto\ e$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3$ é $o\ valor\ mínimo\ absoluto.$

$b)\ Mostrar\ que\ \ \mathrm{cotgh}(2x)=\frac{1}{2}[\mathrm{tgh}(x)+\mathrm{cotgh}(x)]$

$$\mathrm{cotgh}(2x)=\frac{\cosh(2x)}{\mathrm{senh}(2x)}=\frac{\cosh^2(x)+\mathrm{senh}^2(x)}{2\,\mathrm{senh}(x)\cosh(x)}=\frac{1}{2}\left[\frac{\cosh^2(x)+\mathrm{senh}^2(x)}{\mathrm{senh}(x)\cosh(x)}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\cosh(x)}{\mathrm{senh}(x)}+\frac{\mathrm{senh}(x)}{\cosh(x)}\right]=\frac{1}{2}[\mathrm{cotgh}(x)+\mathrm{tgh}(x)]=\frac{1}{2}[\mathrm{tgh}(x)+\mathrm{cotgh}(x)];$$

5.

$a)\ f(x)=\sqrt{1-\mathrm{sen}\,x}\ ;comprovar\ as\ hipóteses\ do\ Teorema\ do\ Valor\ Médio$ $no\ intervalo\ [0,\pi/2];$

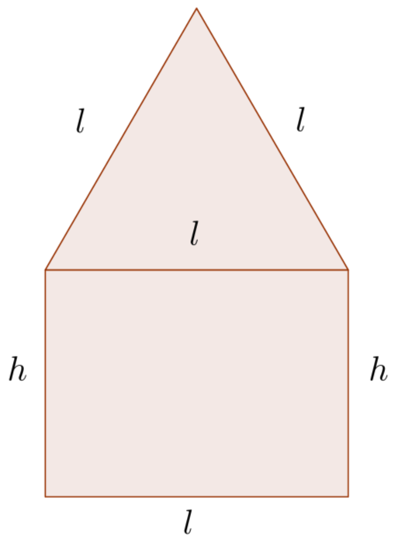
$*\ Domínio\ da\ função\ f:$

$$1 - \operatorname{sen} x \geq 0$$
$$\operatorname{sen} x \leq 1$$
$$D(f) = \mathbb{R}, pois, -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$
$-No\ intervalo\ em\ questão\ essa\ igualdade$ é $satisfeita. Logo, f$ é $contínua\ em$ $[0, \pi/2]$;
$$f'(x) = -\frac{\cos x}{2\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}$$
$$D(f') = \mathbb{R}, pois, -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$
$-Logo, f$ é $diferenciável\ em$ $(0, \pi/2)$
$-Então, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ existe\ algum\ c \in (0, \pi/2)\ tal\ que$
$$f'(c) = \frac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2 - 0} = \frac{0 - 1}{\pi/2} = -\frac{2}{\pi}$$
$$f'(x) = -\frac{\cos x}{2\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} = -\frac{2}{\pi}$$
$$\frac{\cos x}{2\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \frac{\cos^2 x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{16}{\pi^2}$$
$$\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{16}{\pi^2} \Rightarrow 1 + \operatorname{sen} x = \frac{16}{\pi^2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{16}{\pi^2} - 1 \ \therefore x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{16}{\pi^2} - 1\right)$$

$b)\ Seja\ f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 3x - 2\ ; provar\ que\ f\ possui\ exatamente\ 1\ raíz$ $real\ no\ intervalo\ (0, 1)$;
$f(0) = -2\ \ e\ \ f(1) = 8$
$*\ Como\ f$ é $uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ [0, 1]\ e\ ainda,$ $f(0) < 0 < f(1), pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ existe\ algum$ número $c \in (0,1)\ tal\ que\ f(c) = 0. Logo, f\ possui\ uma\ raíz\ no\ intervalo\ (0, 1).$
$-Sendo\ f\ contínua\ em\ [0, 1]\ e\ diferenciável\ (0, 1)\ e\ supondo\ que\ f\ possui\ duas$ $raízes\ reais\ a\ e\ b\ nesse\ intervalo, tal\ que, f(a) = f(b) = 0, pelo\ Teorema\ de$ $Rolle\ existe\ algum\ x \in (a, b)\ tal\ que\ f'(x) = 0.$
$$f'(x) = 20x^4 + 9x^2 + 3\ ;\ \ f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$-Logo, f\ possui\ exatamente\ uma\ raíz\ real\ no\ intervalo\ (0, 1).$

7.7 4ª Avaliação-02 de Dezembro de 2011

1. *Ilustração do problema*:



$*$ *Do enunciado da questão e analisando a figura acima, temos*:

$$3l + 2h = 30m$$

$$h = \frac{30 - 3l}{2}$$

$*$ *A área total do polígono* é:

$$A = l.h + \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$-$*Logo, a expressão da área em função do lado l do triângulo* é:

$$A = l.\frac{30 - 3l}{2} + \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A(l) = \frac{60l - 6l^2 + l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A(l) = \frac{l^2(-6 + \sqrt{3}) + 60l}{4}$$

$-$*Calculando* $A'(l)$:

$$A'(l) = \frac{l(-6 + \sqrt{3}) + 30}{2}$$

$-$*Analisando o sinal de* $A'(l)$*, obtemos*:

$$+ + + + + + + + + + + \left(\frac{10(6+\sqrt{3})}{11}\right) - - - - - - - - - \quad A'(l)$$

$*$ *Para* $l = \dfrac{10(6 + \sqrt{3})}{11} m$ *teremos a área máxima do pentágono. Calculando o valor de h, temos*:

$$h = \frac{30 - 3l}{2} = \frac{3}{2}(10 - l) = \frac{3}{2}\left(10 - \frac{10(6 + \sqrt{3})}{11}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{10(5 - \sqrt{3})}{11}\right)$$

$$h = \frac{15(3 + \sqrt{3})}{11} m$$

$* \textit{ Logo, devemos ter um triângulo equilátero de lado } l = \dfrac{10(6+\sqrt{3})}{11} m \textit{ e um retângulo de lados medindo } \dfrac{10(6+\sqrt{3})}{11} m \textit{ e } \dfrac{15(5-\sqrt{3})}{11} m \textit{ ;}$

2.

$a)\ \lim_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{\ln(x-1)} - \dfrac{2}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\dfrac{2x-4-2\ln(x-1)}{(x-2)\ln(x-1)} = \lim_{x\to 2}\dfrac{2-\dfrac{2}{x-1}}{\ln(x-1)+\dfrac{x-2}{x-1}} =$

$\lim_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{2x-4}{x-1}}{\dfrac{(x-1)\ln(x-1)+x-2}{x-1}} = \lim_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{(x-1)\ln(x-1)+x-2} =$

$\lim_{x\to 2}\dfrac{2}{\ln(x-1)+1+1} = \lim_{x\to 2}\dfrac{2}{\ln(x-1)+2} = \dfrac{2}{\ln(1)+2} = \dfrac{2}{0+2} = \dfrac{2}{2} = 1.$

$b)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}};$

$-\textit{Calculando o limite do expoente, temos:}$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1+0} = \dfrac{1}{1} = 1.$

$* \textit{ Portanto, obtemos:}$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e$$

3.

$a)\ f(x) = x^3 + 3kx + 5\ \textit{; determinar os valores de } k \textit{ para os quais } f \textit{ possui um máximo e um mínimo local.}$

$* \textit{ Sendo } f \textit{ uma função polinomial e, portanto, contínua e } f(c) \textit{ é um valor de máximo ou mínimo local em } x = c, \textit{ então } f'(c) = 0.$

$$f'(x) = 3x^2 + 3k\ ;\ f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = -3k \Rightarrow x^2 = -k \therefore x = \sqrt{-k}$$

$-\textit{Portanto, para que } f \textit{ assuma um máximo e mínimo local, ou seja, para que } f'(x) \textit{ possua duas raízes reais distintas devemos ter } k < 0.$

$b)\ f(x) = \sqrt{x}.(\ln x)^2, \textit{com } x > 0\ ;$

$i)\ \textit{Crescimento e Decrescimento:}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.(\ln x)^2 + 2\sqrt{x}.\ln x.\dfrac{1}{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.(\ln x)^2 + \dfrac{2.\ln x}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{(\ln x)^2 + 4.\ln x}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{\ln x\,(4+\ln x)}{2\sqrt{x}};$

$-\textit{Analisando o sinal de } f'(x), \textit{temos:}$

$+ + + + + + + + \left(\frac{1}{e^4}\right) - - - - - - - - (\ 1\ ) + + + + + + + \qquad \ln x\,(4+\ln x)$

$+ + (\ 0\ ) + \qquad 2\sqrt{x}$

$+ + (\ 0\ ) + + + \left(\frac{1}{e^4}\right) - - - - - - - - (\ 1\ ) + + + + + + \qquad f'(x) = \frac{\ln x(4+\ln x)}{2\sqrt{x}}$

$-Da\ análise\ acima, concluímos\ que$

$f\ é\ crescente\ em\ (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{e^4}\right) \cup (1, +\infty)\ e$

$f\ é\ decrescente\ em\ \left(\frac{1}{e^4}, 1\right);$

$ii)$ *Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

−Pela análise feita no item anterior temos, portanto, que $\frac{1}{e^4}$ e 1 são os números críticos de f. Calculando o valor de f nos números críticos, obtemos:

$f(e^{-4}) = \sqrt{e^{-4}}.(\ln e^{-4})^2 = e^{-2}.(-4)^2 = 16.e^{-2}. \quad ponto\ (e^{-4}, 16.e^{-2})$

$f(1) = \sqrt{1}.(\ln 1)^2 = 1.(0)^2 = 1.(0) = 0. \quad ponto\ (1, 0)$

4.

$a)\ f(x) = e^x - x^2\ ;\ f'(x) = e^x - 2x$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^x - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} - 4x^2}{e^x + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x} - 8x}{e^x + 2} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{2x} - 8}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 8e^x = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^x - 2x) = \lim_{x\to-\infty} e^x + \lim_{x\to-\infty} -2x = 0 + (+\infty) = +\infty$$

−Portanto, f não possui assíntota oblíqua!

$*\ Obs$: *f possui uma assíntota curvilínea cuja equação é $g(x) = -x^2$.*

$b)\ g(x) = \frac{f(x)}{x}\ ; x \neq 0\ ; g'(p) = 0$ *. Mostrar que a reta tangente à f no ponto em que $x = p$, passa pela origem.*

$f(x) = x.g(x) \Rightarrow f(p) = p.g(p)\ ; \quad ponto\ \big(p, p.g(p)\big)$

$f'(x) = g(x) + x.g'(x)$

$f'(p) = g(p) + p.g'(p)$

$f'(p) = g(p)$

−Equação da reta tangente no ponto $\big(p, p.g(p)\big)$:

$$y - p.g(p) = g(p).(x - p)$$
$$y - p.g(p) = g(p).x - p.g(p)$$
$$y = g(p).x$$

−Quando $x = 0$, temos:

$$y = g(p).0$$
$$y = 0$$

−Portanto, a reta tangente a f no ponto $\big(p, p.g(p)\big)$ passa pela origem!

$5.\ f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x + \cos 2x\ ;$

$a)$ *Assíntotas*:
$-$*Não há assíntotas verticais em* f, *pois* f é *contínua em* $\mathbb{R}$. *Logo, não há pontos de descontinuidade, onde provavelmente há assíntotas verticais*.

$-$*Não há assíntotas horizontais em* f *pois* f é *uma função periódica limitada e, portanto,* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \nexists$.

$b)$ *Crescimento e Decrescimento*:
$f'(x) = 2\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,2x$
$f'(x) = 2\cos x - 4\,\mathrm{sen}\,x \,.\cos x$
$f'(x) = 2\cos x\,(1 - 2\,\mathrm{sen}\,x)$
$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\cos x = 0 \\ 1 - 2\,\mathrm{sen}\,x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \mathrm{sen}\,x = 1/2 \end{cases};$
$*$ *Portanto, para primeira sentença temos como solução* $x = \dfrac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ *e*
$x = \dfrac{3\pi}{2} \pm 2k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.
$*$ *Para a segunda sentença temos como solução* $x = \dfrac{\pi}{6} \pm 2k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$ *e*,
$x = \dfrac{5\pi}{6} \pm 2k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$;

$*$ *Como* f é *uma função periódica vamos analisar um intervalo, seja este intervalo* $[0,2\pi]$. *E analisando o comportamento(sinal) de* $f'(x)$ *para cada quadrante, temos*:

1º *quadrante* $[0, \pi/2]$:
$* \cos x \geq 0;$
$* \; 1 - 2\,\mathrm{sen}\,x > 0$ *em* $(0, \pi/6)$ *e* $1 - 2\,\mathrm{sen}\,x < 0$ *em* $(\pi/6\,, \pi/2)$
$-$*Logo*, $f'(x) > 0$ *em* $(0, \pi/6)$ *e* $f'(x) < 0$ *em* $(\pi/6\,, \pi/2)$

2º *quadrante* $[\pi/2\,, \pi]$:
$* \cos x \leq 0;$
$* \; 1 - 2\,\mathrm{sen}\,x < 0$ *em* $(\pi/2\,, 5\,\pi/6)$ *e* $1 - 2\,\mathrm{sen}\,x > 0$ *em* $(5\pi/6\,, \pi)$
$-$*Logo*, $f'(x) > 0$ *em* $(\pi/2\,, 5\,\pi/6)$ *e* $f'(x) < 0$ *em* $(5\pi/6\,, \pi)$

3º *quadrante* $[\pi, 3\pi/2]$:
$* \cos x \leq 0;$
$* \; 1 - 2\,\mathrm{sen}\,x > 0$ *em* $(\pi, 3\pi/2)$;
$-$*Logo*, $f'(x) < 0$ *em* $(\pi, 3\pi/2)$

4º *quadrante* $[3\pi/2\,, 2\pi]$:
$* \cos x \geq 0;$
$* \; 1 - 2\,\mathrm{sen}\,x > 0$ *em* $(3\pi/2\,, 2\pi)$;
$-$*Logo*, $f'(x) > 0$ *em* $(3\pi/2\,, 2\pi)$

$-$*Com essa análise temos que*
f é *crescente em* $(0, \pi/6) \cup (\pi/2\,, 5\,\pi/6) \cup (3\pi/2\,, 2\pi)$ *e*
f é *decrescente em* $(\pi/6\,, \pi/2) \cup (5\pi/6\,, \pi) \cup (\pi, 3\pi/2)$

$* \, Obs$: *como a função f é periódica os intervalos de crescimento e decrescimento se repetem. O período da função é 2π.*

$c)$ *Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*
$*$ *Note que no item anterior já fora feito o cálculo onde $f'(x) = 0$. Portanto, temos pontos críticos em:*

$$x = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \, ; \; x = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \, ; \;\; x = \frac{\pi}{6} \pm 2k\pi \; e \; x = \frac{5\pi}{6} \pm 2k\pi, com \; k \in \mathbb{Z}.$$

$*$ *Tomemos os números críticos* $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$ *e* $\frac{5\pi}{6}$ *como exemplo:*

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \cos \pi = 2 - 1 = 1 \;\; .ponto \;\; \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + \cos 3\pi = -2 - 1 = -3 \;\; .ponto \;\; \left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \;\; .ponto \;\; \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{5\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \;\; .ponto \;\; \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$

$d)$ *Concavidades:*

$f''(x) = -2 \operatorname{sen} x \, (1 - 2 \operatorname{sen} x) + 2 \cos x \, (-2 \cos x)$

$f''(x) = -2 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen}^2 x - 4 \cos^2 x$

$f''(x) = -2 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen}^2 x - 4(1 - \operatorname{sen}^2 x)$

$f''(x) = 8 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x - 4$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 8 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x - 4 = 0$

$*$ *Façamos a substituição $y = \operatorname{sen} x$, então:*

$$8y^2 - 2y - 4 = 0$$
$$4y^2 - y - 2 = 0$$
$$\Delta = 1 + 32 = 33$$
$$y = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \; \therefore \; y = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \; ou \; y = \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$$
$$x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right) \; e \; x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 - \sqrt{33}}{8}\right)$$

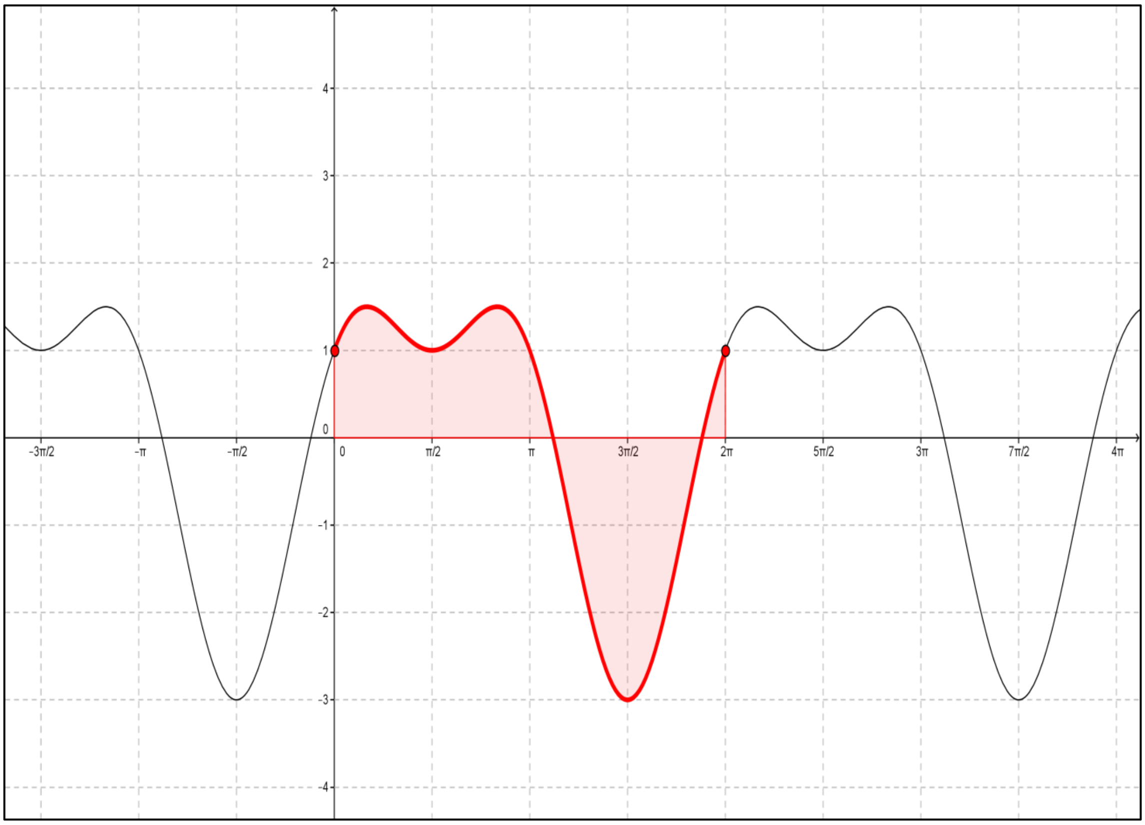
$$+ + + + + \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\right] - - - - - \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\right] + + + + \quad f''(x)$$

$*$ *Como f é uma função periódica vale ressaltar que esses arcos, assim como seus ângulos congruentes seguem essa representação acima;*

$*$ *Onde $f''(x) > 0$ temos concavidade voltada para cima e, quando $f''(x) < 0$ f possui concavidade voltada para baixo.*

$*$ Obs: *determinar os intervalos torna − se inviável pela repetição das raízes de $f''(x)$.*

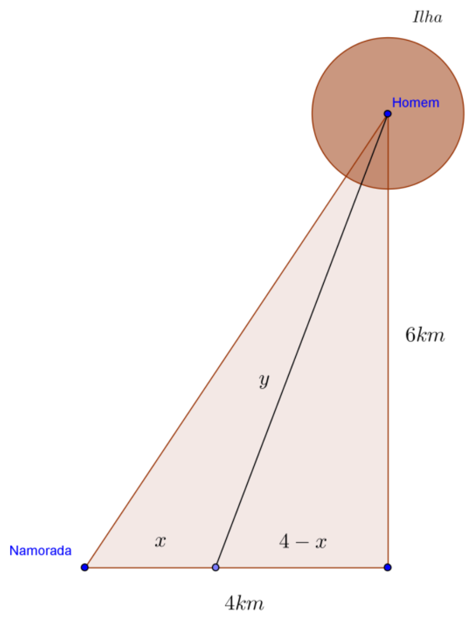
$e)$ *Seus pontos de inflexão ocorrem em* $x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) + k\pi$ *e em* $x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) + k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.



$*$ *Obs: a parte destacada do gráfico é referente ao intervalo usado como base para o esboço. Note que o aspecto em destaque se repete a cada* 2π, *período da função.*

7.8 4ª Avaliação-03 de Dezembro de 2011

1. *Ilustração do problema*:



$* \ A \ distância \ y \ é \ percorrida \ com \ a \ velocidade \ de \ 3km/h \ e \ a \ distância \ x \ é \ percorrida \ com \ a \ velocidade \ de \ 5km/h;$

$-Da \ ilustração \ acima, tiramos \ as \ seguintes \ expressões:$

$$y = \sqrt{(4-x)^2 + 6^2}$$
$$y = \sqrt{x^2 - 8x + 52}$$

$-O \ tempo \ gasto \ em \ cada \ trecho \ x \ e \ y \ são, respectivamente,$

$$t_x = \frac{x}{5} \quad e \quad t_y = \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 52}}{3}$$

$-Logo, o \ tempo \ gasto \ em \ todo \ o \ percurso, em \ função \ de \ x, é:$

$$t(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 52}}{3}$$

$* \ Fazendo \ t'(x), obtemos:$

$$t'(x) = \frac{1}{5} + \frac{x-4}{3\sqrt{x^2 - 8x + 52}}$$
$$t'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{x-4}{3\sqrt{x^2 - 8x + 52}} = 0$$
$$\frac{x-4}{3\sqrt{x^2 - 8x + 52}} = -\frac{1}{5}$$
$$-5x + 20 = 3\sqrt{x^2 - 8x + 52}$$
$$(-5x + 20)^2 = \left(3\sqrt{x^2 - 8x + 52}\right)^2$$
$$25x^2 - 200x + 400 = 9x^2 - 72x + 468$$
$$16x^2 - 128x - 68 = 0$$
$$4x^2 - 32x - 17 = 0$$
$$\Delta = 1024 + 272 = 1296$$
$$x = \frac{32 \pm 36}{8} \ \therefore$$

$$x = \frac{68}{8} \;\; ou \;\; x = -\frac{1}{2}$$

$*\,Note\ que\ nenhum\ dos\ valores\ obtidos\ para\ x\ pode\ ser\ considerado, o\ primeiro\ valor, além\ de\ não\ satisfazer\ t'(x) = 0\ (substitua\ o\ valor\ para\ comprovar),\ esse\ valor\ é\ maior\ do\ que\ o\ permitido\ para\ x, lembre\ que\ 0 \leq x \leq 4, com\ x\ em\ metros.\ O\ segundo\ valor\ é\ negativo\ e\ também\ não\ atende\ aos\ requisitos.$

$-Logo, o\ tempo\ mínimo\ gasto\ pelo\ homempara\ alcançar\ sua\ namorada, está\ em\ algum\ dos\ extremos\ do\ intervalo.\ Calculando\ t(0)\ e\ t(4), obtemos:$

$$t(0) = \frac{0}{5} + \frac{\sqrt{0^2 - 8.(0) + 52}}{3} = \frac{\sqrt{52}}{3} = \frac{2\sqrt{13}}{3}h$$

$$t(4) = \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{4^2 - 8.(4) + 52}}{3} = \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{36}}{3} = \frac{4}{5} + \frac{6}{3} = \frac{4}{5} + 2 = \frac{14}{5}h$$

$-Logo, t(0) = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}h\ é\ o\ tempo\ mínimo\ gasto\ pelo\ homem\ para\ alcançar\ a\ casa\ da\ namorada.$

2.

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 5}{(x-1)^2}$$

$*\,Domínio\ da\ função:$

$D(f) = \mathbb{R} - \{1\};$

$a)\ Assíntotas:$

$-Verticais: Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*\,Verificando\ no\ ponto\ de\ descontinuidade\ da\ função, ou\ seja, em\ x = 1.$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 - x^2 - x + 5}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{x^3 - x^2 - x + 5}^{\substack{4 \\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - x^2 - x + 5}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\overbrace{x^3 - x^2 - x + 5}^{\substack{4 \\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}}} = +\infty$$

$-Logo, a\ reta\ x = 1\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$-Horizontais: Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a\ é\ uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 5}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x - 2}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 5}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x - 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x - 2}{2} = -\infty$$

$-Logo, não\ há\ assíntotas\ horizontais\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$-Oblíqua: Dizemos\ que\ a\ reta\ y = ax + b$ é $uma\ assíntota\ oblíqua\ se, somente\ se,$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 5}{x^2 - 2x + 1} = (x + 1) + \frac{4}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{4}{x^2 - 2x + 1}\right] = 0\ ;$$

$-Logo, a\ reta\ y = x + 1$ é $uma\ assíntota\ oblíqua\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$b)\ Crescimento\ e\ Decrescimento:$

$$f'(x) = \frac{(x - 3)(x^2 + 3)}{(x - 1)^3}$$

$-Analisando\ o\ sinal\ de\ f'(x), temos:$

− − − − − − − − − − − − − − − − (3) + + + + + + + $(x - 3)$

+ $(x^2 + 3)$

− − − − − − − (1) + + + + + + + + + + + + + + + + + $(x - 1)^3$

+ + + + + + + (1) − − − − − − − − (3) + + + + + + + $f'(x) = \frac{(x-3)(x^2+3)}{(x-1)^3}$

$-Da\ análise\ acima, concluímos\ que$

f é $crescente\ em\ (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)\ e$
f é $decrescente\ em\ (1, 3)$

$c)\ Pontos\ Críticos!$

$*\ Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f$ é $um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde\ ou\ f'(c) = 0\ ou\ f'(c)\ não\ existe.$
$-Da\ análise\ feita\ no\ item\ anterior, concluímos\ que\ 3$ é $um\ número\ criítico\ de\ f. Logo,$

$$f(3) = \frac{3^3 - 3^2 - 3 + 5}{(3 - 1)^2} = \frac{27 - 9 - 3 + 5}{4} = \frac{20}{4} = 5. ponto\ crítico\ (3, 5)$$

$*\ Obs: esse\ ponto\ crítico$ é $um\ mínimo\ local.$

$d)\ Concavidades:$

$$f''(x) = \frac{24}{(x - 1)^4}$$

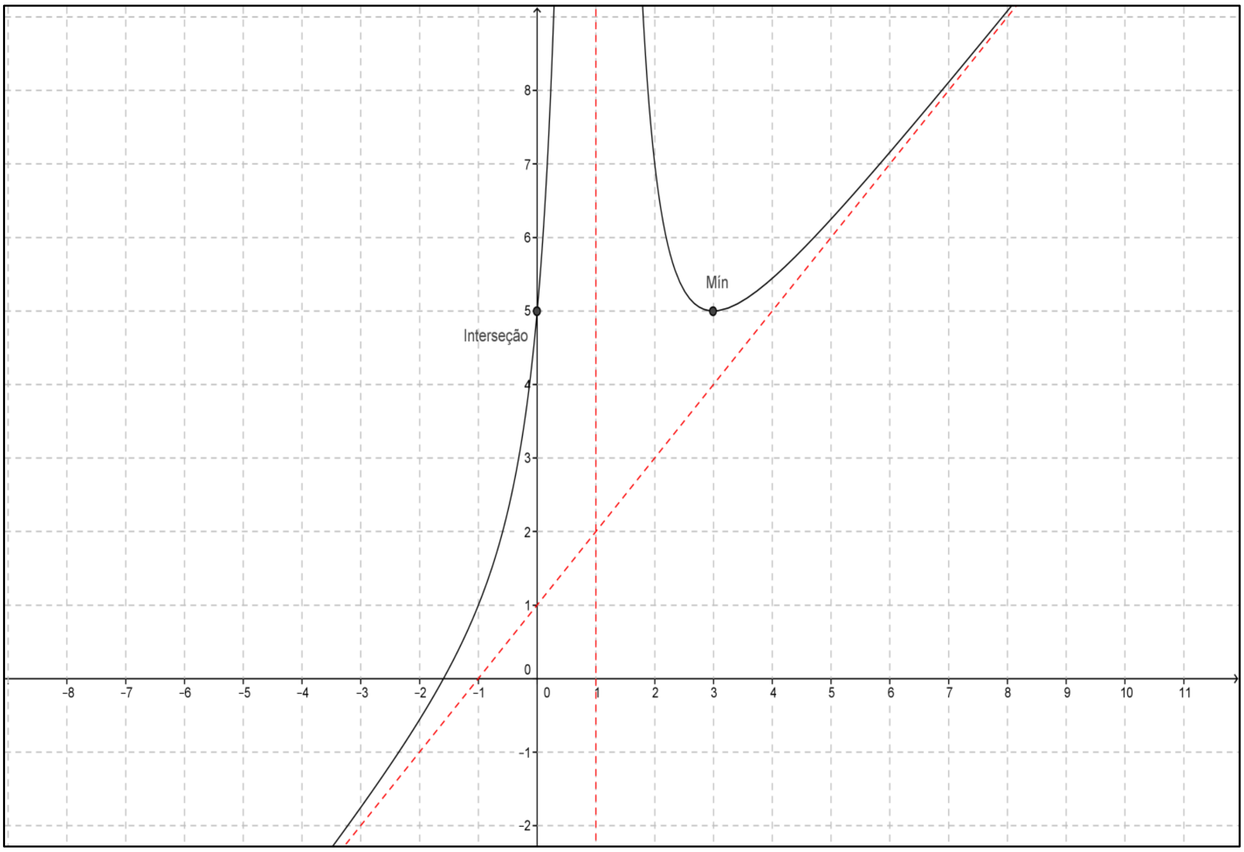
$-Analisando\ o\ sinal\ de\ f''(x), temos:$

+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + 24

+ + + + + + + + (1) + + + + + + + + + + $(x - 1)^4$

+ + + + + + + + (1) + + + + + + + + + + $f''(x) = 24/(x - 1)^4$

$-$ *Da análise acima, concluímos que f é sempre côncava para cima em* $\mathbb{R} - \{1\}$.
e) Pontos de Inflexão!
$*$ *Os pontos de inflexão ocorrem quando há mudança na direção da concavidade da função.*
$*$ *Como não há mudança de sinal em $f''(x)$, ou seja, não há mudança na direção da concavidade, f não possui pontos de inflexão.*



3. *Prove que* ***se*** *o polinômio cúbico $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tem um máximo local e um mínimo local, então o ponto de inflexão é o ponto médio do segmento de reta que liga os extremos locais.*
$*$ *Sendo f uma função polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$, e ainda, f possui um máximo ou mínimo local em c, então $f'(c)$ existe e $f'(c) = 0$.*

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$*$ *Se f possui um ponto de máximo local e um mínimo local, então $f'(x)$ possui duas raízes reais distintas, nesse caso.*

$$\Delta = 4a^2 - 12b$$

$$x = \frac{-2a \pm \sqrt{\Delta}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-2a + \sqrt{\Delta}}{6} \ \ e \ \ x_2 = \frac{-2a - \sqrt{\Delta}}{6}$$

$*$ *O ponto médio entre x_1 e x_2 é:*

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4a}{12} = -\frac{a}{3}$$

$*$ *Usando a segunda derivada para comprovar os resultados, temos:*

$$f''(x) = 6x + 2a$$
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 2a = 0$$
$$x = -\frac{2a}{6}$$
$$x = -\frac{a}{3}$$

$\rightarrow$ *Note que* $f''(x)$ é *uma função polinomial do primeiro grau, cuja análise do sinal* é *de uma função crescente, ou seja,*

$$- - - - - - - - - - - - \left(-\frac{a}{3}\right) + + + + + + + + + + + \quad f''(x) = 6x + 2a$$

$*$ *Como há mudança na direção da concavidade em* $x = -a/3$ *, então temos um ponto de inflexão, que* é *o ponto médio entre os extremos locais já encontrados acima.*

4.

$a)\ f(x) = \frac{1}{12}(x^4 + 6x^3 - 18x^2)$

$f'(x) = \frac{1}{12}(4x^3 + 18x^2 - 36x)$

$f'(x) = \frac{1}{3}x(x+6)(x - 3/2)$

$*$ *Raízes de* $f'(x)$: $0, -6$ *e* $3/2$. *Fazendo o teste da segunda derivada para esses valores, temos*:

$$f''(x) = \frac{1}{12}(12x^2 + 36x - 36)$$
$$f''(x) = x^2 + 3x - 3$$

$f''(0) = -3\ ; f''(0) < 0.$

$-$*Logo, temos concavidade voltada para baixo em* $x = 0$ *e, portanto, um ponto de máximo local nesse ponto.*

$f(0) = 0$

$f''(-6) = 15; f''(-6) > 0.$

$-$*Logo, temos concavidade voltada para cima em* $x = -6$ *e, portanto, um ponto de mínimo local nesse ponto.*

$f(-6) = -54;$

$f''(3/2) = 15/4\ ; f''(3/2) > 0.$

$-$*Logo, temos concavidade voltada para cima em* $x = 3/2$ *e, portanto, um ponto de mínimo local nesse ponto.*

$f(3/2) = -81/64\ ;$

$b)\ f(x) = x^x$; *Encontrar os máximos e mínimos locais, caso existam.*

$*$ *Domínio da função*:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\ln f(x) = x . \ln x$

$-$*Por diferenciação logarítmica, temos*:

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1$

$f'(x) = f(x).[\ln x + 1]$

$f'(x) = x^x.[\ln x + 1]$

$-$*Analisando o sinal de* $f'(x)$:

$(\,0\,)\; +$ $\quad x^x$

$(\,0\,)\; - - - - - - -(\,e^{-1}\,)\; + + + + + + + + + + + + +$ $\quad (\ln x + 1)$

$(\,0\,)\; - - - - - - -(\,e^{-1}\,)\; + + + + + + + + + + + + +$ $\quad f'(x) = x^x.[\ln x + 1]$

$-$*Da análise acima, concluímos que* f *possui um ponto de mínimo local em* $x = e^{-1}$.

$*$ *Ponto de mínimo local*: $\left(e^{-1}, \dfrac{1}{\sqrt[e]{e}}\right)$;

5.

$(i) f(x) = e^{x^2}$; $\quad (ii) g(x) = \log_3 x$ $\quad$; $\quad (iii) h(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{\log_3 x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2xe^{x^2}}{\frac{1}{x.\ln(3)}} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 e^{x^2}.\ln(3) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2xe^{x^2}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} 6xe^{x^2}\sqrt[3]{x^2} = \infty$$

$-$*Logo,* f é *a função que cresce mais rápido em comparação com as demais.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log_3 x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x.\ln(3)}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x.\ln(3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt[3]{x}}}{\ln(3)} = 0$$

$-$*Logo,* g é *a função que cresce mais devagar em comparação com as demais.*

7.9 Reavaliação AB1-09 de Dezembro de 2011

1.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=\frac{\lim_{x\to 0}1}{\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}(1+x)^2}+\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}(1+x)}+\lim_{x\to 0}1}=$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1+0)^2}+\sqrt[3]{1+0}+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$

$$b)\ f(x)=\frac{\sqrt[3]{16-x^2}}{4-x};\ Determinar\ as\ assíntotas.$$

$*$ *Domínio da função*:

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 4\}$;

$*$ *Assíntotas*:

$-$*Verticais*: *Dizemos que a reta* $x=a$ *é uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos*,

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty\quad ou\quad \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$$

$*$ *Verificando no ponto de descontinuidade da função, em* $x=4$, *temos*:

$$\lim_{x\to 4^+}f(x)=\lim_{x\to 4^+}\frac{\sqrt[3]{16-x^2}}{4-x}=\lim_{x\to 4^+}\frac{16-x^2}{(4-x)\left(\sqrt[3]{(16-x^2)^2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{(4-x)(4+x)}{(4-x)\left(\sqrt[3]{(16-x^2)^2}\right)}=\lim_{x\to 4^+}\frac{\overbrace{4+x}^{\to 8}}{\underbrace{\sqrt[3]{(16-x^2)^2}}_{\to 0^+}}=+\infty$$

$-$*Logo, a reta* $x=4$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$-$*Horizontais*: *Dizemos que a reta* $y=a$ *é uma assíntota horizontal se ocorrer um dos seguintes casos*,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a\quad ou\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{16-x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}}{\frac{4-x}{\sqrt[3]{x^3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{16}{x^3}-\frac{1}{x}}}{\frac{4-x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{16}{x^3}-\frac{1}{x}}}{\frac{4}{x}-1}=\frac{\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{16}{x^3}-\frac{1}{x}}}{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}-1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\frac{16}{x^3}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}}{\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}-\lim_{x\to+\infty}1}=\frac{\sqrt{0-0}}{0-1}=\frac{\sqrt{0}}{1}=\frac{0}{1}=0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{16-x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}}{\frac{4-x}{\sqrt[3]{x^3}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{16}{x^3}-\frac{1}{x}}}{\frac{4-x}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{16}{x^3}-\frac{1}{x}}}{\frac{4}{x}-1} = \frac{\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{16}{x^3}-\frac{1}{x}}}{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{x}-1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{16}{x^3} - \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}}{\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x} - \lim_{x\to+\infty} 1} = \frac{\sqrt{0-0}}{0-1} = \frac{\sqrt{0}}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

$-Logo, a\ reta\ y = 0$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

2.

$a)\ f(x) = \log_3(\ln x^2)\ ;\ \ determinar\ \lim_{x\to1^-} f'(x).$

$*\ Sejam\ u = x^2, v = \ln u\ \ e\ y = f(v) = \log_3 v.$

$-Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{dy}{dv}$$

$$f'(x) = (2x)\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{v.\ln(3)}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x.\ln x^2.\ln(3)}$$

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{2}{\underbrace{x}_{\downarrow\, 1}.\underbrace{\ln x^2}_{\downarrow\, 0^-}.\ln(3)} = \lim_{x\to1^-} \frac{2}{\underbrace{x.\ln x^2.\ln(3)}_{\downarrow\, 0^-}} = -\infty$$

$*\ Por\ definição, dizemos\ que\ \ \lim_{x\to1^-} f'(x)\ \nexists.$

$b)\ f(x) = x^3 - 8x + 3\ \ ;\ \ \ 0 < \cos 2 < 1$

$f(0) = 3\ \ e\ \ f(1) = -4\,;$

$*\ Como\ f$ é $uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ [0,1]\ e\ ainda,$
$f(1) < \cos 2 < f(0), pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ existe\ algum$
$número\ c \in (0,1)\ tal\ que\ f(c) = \cos 2.$

$*\ Logo,$ há $pelo\ menos\ um\ número\ c\ para\ o\ qual\ a\ função\ f$ é $igual$ à $\cos 2.$

3.

$a)\ f(x) = \text{sen}\big(\arccos(\sqrt{x})\big)\ ; determinar\ o\ valor\ de\ x\ para\ o\ qual\ f'(x) = -1.$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{(-1)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\cos\big(\arccos(\sqrt{x})\big)$$

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}.\sqrt{1-x}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\ ; se\ x > 0.$$

$f'(x) = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} = -1 \Rightarrow 2\sqrt{1-x} = 1 \Rightarrow \left(2\sqrt{1-x}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow$
$4(1-x) = 1 \Rightarrow 1 - x = \frac{1}{4} \therefore x = \frac{3}{4}$

$b)\ y = (2+x).e^{-x}\ ; reta\ tangente\ no\ ponto\ (0,2)$
$y' = e^{-x} + (-1).(2+x).e^{-x}$
$y' = -(1+x).e^{-x}$

$-Calculando\ o\ valor\ de\ y'\ no\ ponto\ (0,2), temos:$
$y' = -(1+0).e^0 = -1.$

$-Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (0,2):$

$$y - 2 = -1(x-0)$$
$$y - 2 = -x$$
$$y = -x + 2$$

4. $curva\ x^4 = y^2\ ; reta\ normal\ no\ ponto\ (1,1).$
$-Por\ derivação\ implícita, temos:$

$$4x^3 = 2yy'$$
$$y' = \frac{2x^3}{y}$$

$-No\ ponto\ (1,1), temos\ y' = 2. Logo, o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal\ no\ ponto\ (1,1), m_n = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{2}.$
$-Equação\ da\ reta\ normal:$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$*\ Interseções\ com\ os\ eixos\ coordenados:$

$*\ Para\ x = 0, temos:$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(0-1)$$
$$y - 1 = \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{3}{2}$$

$*\ Para\ y = 0, temos:$

$$0 - 1 = -\frac{1}{2}(x-1)$$
$$2 = x - 1$$
$$x = 3$$

$-Pontos: (0, 3/2)\ e\ (3,0).$

$*\ Área\ do\ triângulo\ formado\ pelos\ pontos\ de\ interseção\ da\ reta\ normal\ com\ os\ eixos\ coordenados\ e\ o\ ponto\ (0,0):$

$$Área = \frac{1}{2}(3-0).\left(\frac{3}{2} - 0\right)$$

$$Área = \frac{1}{2}(3).\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$Área = \frac{9}{4}u.A$$

5.

$$f(x) = \begin{cases} a + bx, & se\ x > 2, \\ 3, & se\ x = 2, \\ b - ax^2, & se\ x < 2 \end{cases}$$

$*$ *Determinar os valores de a e b para os quais f é contínua em* $x = 2$.

$-$*Dizemos que uma função f é contínua no ponto* $x = a$ *se, somente se*
$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$
1) $f(2) = 3$. *Logo, devemos ter* $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$. *Para que essa igualdade seja satisfeita, implicitamente,* $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$ *e* $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$

$-$*Analisando os limites laterais em* $x = 2$, *temos*:

2) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+}(a + bx) = a + 2b$; $\quad a + 2b = 3 \ (I)$

3) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-}(b - ax^2) = b - 4a$; $\quad b - 4a = 3 \ (II)$

$*$ *Com isso, resolvemos o seguinte sistema*:

$$\begin{cases} a + 2b = 3 \\ -4a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a = -3 \\ -4a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/3 \\ -4a + b = 3 \end{cases} \therefore a = -\frac{1}{3}\ e\ b = \frac{5}{3}\ ;$$

$*$ *Portanto, para* $a = -\frac{1}{3}$ *e* $b = \frac{5}{3}$ *temos que f é contínua em* $x = 2$.

7.10 Reavaliação AB1-10 de Dezembro de 2011

1.

$a)\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{[\![x]\!]-1}{[\![x]\!]-x}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2-1}{2-x}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{\underbrace{2-x}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}}=-\infty.$

$*\ Obs: se\ x\to 2^+, então\ x>2. Logo, [\![x]\!]=2.$

$b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$

$*\ Obs: |2x-1|=\begin{cases}2x-1, & se\ x\geq 1/2\\ -(2x-1), & se\ x<1/2\end{cases}\ ;\ |2x+1|=\begin{cases}2x+1, & se\ x\geq -1/2\\ -(2x+1), & se\ x<-1/2\end{cases}$

$*\ Se\ x\to 0, |2x-1|=-(2x-1)\ e\ \ |2x+1|=2x+1.$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(2x-1)-(2x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x+1-2x-1}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4x}{x}\ ;\ \ se\ x\to 0\ ,x\neq 0. Logo, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4x}{x}=-4.$

$*\ Portanto, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}=-4\ .$

2.

$a)\ f(x)=\sqrt{x+1}\ \ e\ \ g(x)=\dfrac{1}{x-3}\ ; h(x)=f\big(g(x)\big)\ . Determinar\ onde\ h\ é$ $contínua.$

$$h(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$$

$*\ h\ é\ uma\ composição\ de\ funções, onde\ há\ presença\ da\ função\ raíz\ aderida\ à$ $uma\ função\ polinomial\ racional. Logo, h\ é\ contínua\ sempre\ que\ h\ estiver$ $definida, ou\ seja, no\ domínio\ da\ função.$

$- - - - - - - - (\ 2\ ) + + + + + + + + + + + + + + + + + +\qquad (x-2)$

$- (\ 3\ ) + + + + + +\qquad (x-3)$

$+ + + + + + + + (\ 2\ ) - - - - - - - - - (\ 3\ ) + + + + + +\qquad (x-2)/(x-3)$

$-Com\ essa\ análise\ concluímos\ que\ o\ domínio\ da\ função\ h\ é:$

$$D(h)=\{x\in\mathbb{R}\ |\ x\leq 2\ ou\ x>3\}$$

$-Logo, h\ é\ contínua\ em\ (-\infty,2)\cup(3,+\infty).$

$b)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}x-1)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)\ ;$

$$-1\leq\cos\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)\leq 1$$

$$-(\operatorname{sen}x-1)\leq(\operatorname{sen}x-1)\cdot\cos\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)\leq(\operatorname{sen}x-1)$$

$* \, Sejam \; f(x) = -(\operatorname{sen} x - 1)\,,\, g(x) = (\operatorname{sen} x - 1) \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x - \frac{\pi}{2}}\right) \; e \; h(x)$

$= (\operatorname{sen} x - 1).$

$Assim, temos \; f(x) \leq g(x) \leq h(x). E \; ainda, \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0 \; e \; \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} h(x) = 0, ou \; seja,$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} h(x)\,. Então, pelo \; Teorema \; do \; Confronto, temos \; \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = 0.$

$-Logo,$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x - 1) \cdot \cos\left(\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}\right) = 0$$

3.

$a) \; f(x) = \operatorname{arctg} x \;\; e \;\; g(x) = \ln(\sec x) \;\; ; Quando \; f'(x) = g'(\pi/4)\,?$

$g'(x) = \dfrac{\sec x\,.\operatorname{tg} x}{\sec x} \;\; ; \;\; g'(x) = \operatorname{tg} x \;\; ; \;\; g'(\pi/4) = \operatorname{tg}(\pi/4) \; \Rightarrow g'(\pi/4) = 1.$

$f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} \; ; \;\; f'(x) = g'(\pi/4) \Rightarrow f'(x) = 1$

$f'(x) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1 + x^2} = 1\,; \quad 1 + x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \therefore x = 0.$

$-Logo, o \; ponto \; da \; curva \; f(x) \; cuja \; reta \; tangente$ é $paralela$ à $reta \; tangente$ à $curva \; g(x) \; em \; x = \pi/4\,,$ é $o \; ponto \; (0, \operatorname{arctg} 0), ou \; seja, o \; ponto \; (0,0).$

$b) \; f(x) = ax^2 + bx + c \;\; ; f(1) = 4\,; f'(1) = 6 \;\; e \;\; f'(5) = -2\,;$

$-Das \; informações \; acima \; tiramos \; as \; seguintes \; expressões:$

$f(1) = a + b + c\,; \;\; f(1) = 4 \quad \therefore \quad a + b + c = 4 \; (I)$

$f'(x) = 2ax + b\,;$

$-Sobre \; a \; primeira \; derivada \; de \; f, temos:$

$f'(1) = 2a + b \;\; ; \quad f'(1) = 6 \; \therefore \; 2a + b = 6 \;\; (II)$

$f'(5) = 10a + b \;\; ; \;\; f'(5) = -2 \; \therefore 10a + b = -2 \; (III)$

$-Com \; isso, resolvemos \; o \; sistema \; a \; seguir:$

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 2a + b = 6 \\ 10a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 2a + b = 6 \\ 8a = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 2a + b = 6 \\ a = -1 \end{cases} ;$$

$\rightarrow Substituindo \; o \; valor \; de$ a $na \; equação \; (II), temos:$

$b = 6 - 2a \Rightarrow b = 6 - 2.(-1) \Rightarrow b = 6 + 2 \;\; \therefore b = 8.$

$\rightarrow Com \; isso, tiramos \; o \; valor \; de \; c \; na \; equação \; (I).$

$a + b + c = 4 \Rightarrow -1 + 8 + c = 4 \Rightarrow 7 + c = 4 \therefore c = -3.$

$-Logo, f(x) = -x^2 + 8x - 3$

4.

$a) \; y$

$= x^{\ln x} \;\; ; \;\; equação \; da \; reta \; tangente \; e \; da \; reta \; normal \; no \; ponto \; de \; abscissa \; 1.$

$-Para \; x = 1, temos \; y = 1^{\ln 1} = 1^0 = 1. ponto \; (1,1);$

$\ln y = \ln x\,.\ln x$

$\ln y = (\ln x)^2$

$-Por\ diferenciação\ logarítmica, temos:$

$\frac{y'}{y} = 2.\ln x.\frac{1}{x}$

$y' = x^{\ln x}.\left[2.\ln x.\frac{1}{x}\right]$

$-Calculando\ o\ valor\ de\ y'\ no\ ponto\ (1,1), temos:$

$$y' = 1^{\ln 1}.\left[2.\ln 1.\frac{1}{1}\right]$$
$$y' = 1.[2.(0).1]$$
$$y' = 0$$

$-Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (1,1):$

$$y - 1 = 0(x - 1)$$
$$y - 1 = 0$$
$$y = 1$$

$-Equação\ da\ reta\ normal\ no\ ponto\ (1,1)$

$*\ Como\ a\ reta\ tangente\ é\ horizontal, então\ a\ reta\ normal\ é\ vertical, que\ se\ apresenta\ na\ forma\ x = x_o. Logo,$

$$x = 1$$
$$(Reta\ normal)$$

$b)\ f(x) = |1 - x^2|\ ;analisar\ a\ diferenciabilidade\ de\ f\ em\ x = 1.$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & se -1 \leq x \leq 1 \\ -(1 - x^2), & se\ x < -1\ ou\ x > 1 \end{cases}$$

$-Analisando\ as\ derivadas\ laterais\ em\ x = 1, temos:$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-(1 - x^2) - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-(1 - x^2)}{x - 1} =$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-(1 - x)(1 + x)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x - 1)(1 + x)}{(x - 1)} = \lim_{x\to 1^+} (1 + x) = 1 + 1 = 2.$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1 - x^2) - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1 - x^2)}{x - 1} =$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x - 1)(1 + x)}{(x - 1)} = \lim_{x\to 1^-} -(1 + x) = -1 - 1 = -2.$$

$*\ Como\ f'_+(1) \neq f'_-(1), temos\ que\ f\ não\ é\ diferenciável\ em\ x = 1.$

5.

$a)\ Suponha\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ um\ intervalo\ fechado\ [a,b]\ e\ seja\ N\ um\ número\ qualquer\ entre\ f(a)\ e\ f(b), onde\ f(a) \neq f(b). Então\ existe\ um\ número\ c\ em\ (a,b)\ tal\ que\ f(c) = N.$

$b)\ f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x + \cos x}\ \ ;equação\ da\ reta\ tangente\ em\ x = \pi/4.$

$-Para\ x = \pi/4\ , temos:$

$f(\pi/4) = \sqrt{\operatorname{sen}(\pi/4) + \cos(\pi/4)}$

$$f(\pi/4) = \sqrt{2^{-\left(\frac{1}{2}\right)} + 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)}} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}\,; \;\; ponto\ \left(\pi/4\,,\sqrt[4]{2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x + \cos x}}$$

$$f'(\pi/4) = \frac{\cos(\pi/4) - \operatorname{sen}(\pi/4)}{2\sqrt{\operatorname{sen}(\pi/4) + \cos(\pi/4)}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{0}{2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}}} = 0$$

$-Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ \left(\pi/4\,,\sqrt[4]{2}\right)$:

$$y - \sqrt[4]{2} = 0(x - \pi/4)$$

$$y - \sqrt[4]{2} = 0$$

$$y = \sqrt[4]{2}$$

7.11 Reavaliação AB2-09 de Dezembro de 2011

1.

$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\ ; façamos\ a\ substituição\ n = x^2. Se\ n \to \infty, então\ x \to \infty;$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x =$$
$$\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x = e^x\ ;$$

$-Logo, \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x\ .$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{6x-2\,\mathrm{sen}\,3x}{9x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 3x}{27x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{18\sin 3x}{54x} = \lim_{x\to 0}\frac{54\cos 3x}{54} =$$
$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x) = \cos 0 = 1.$$

$2. y = s(t) = t^3 - 12t + 3\ \ , t \geq 0\ ;$

$a)\ Determinar\ v(t)\ e\ a(t);$

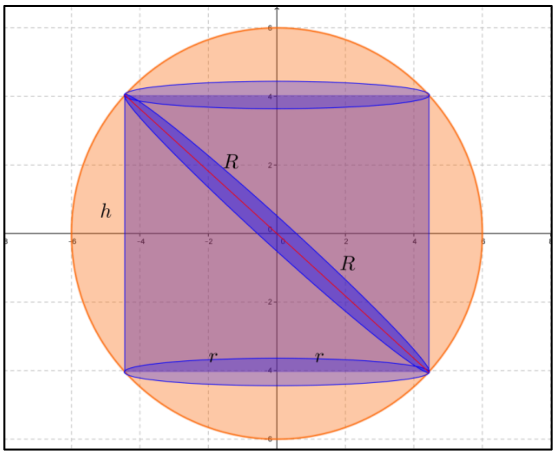
$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12$
$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t$

$b)\ Analisando\ o\ comportamento\ da\ função\ velocidade, temos:$

$+ + + + + + +(-2) - - - (\ 0\ ) - - - (\ 2\ ) + + + + + + + \quad v(t) = 3t^2 - 12$

$-Consideramos\ apenas\ t \geq 0, portanto, concluímos\ que\ a\ partícula\ está\ acelerando\ em\ (2, +\infty)\ e\ está\ freando\ em\ (0, 2).$

$3. Ilustração\ do\ problema:$



$*\ Raio\ da\ esfera: R = 6cm$

$-Observando\ a\ figura, tiramos\ a\ seguinte\ relação:$

$$(2R)^2 = h^2 + (2r)^2$$
$$4R^2 = h^2 + 4r^2$$
$$4.(6)^2 = h^2 + 4r^2$$
$$4.(36) = h^2 + 4r^2$$
$$144 = h^2 + 4r^2$$
$$r^2 = \frac{144 - h^2}{4}$$
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{144 - h^2}$$

$-Área\ lateral\ do\ cilindro:$

$$A_L = 2\pi r.h$$
$$A_L = 2\pi.\frac{1}{2}\sqrt{144 - h^2}.h$$
$$A_L(h) = \pi h\sqrt{144 - h^2}$$

$-Calculando\ a\ derivada\ da\ função\ da\ área\ lateral\ em\ função\ da\ altura, temos:$

$$A'(h) = \pi\sqrt{144 - h^2} + \pi h.\frac{(-2h)}{2\sqrt{144 - h^2}}$$
$$A'(h) = \pi\sqrt{144 - h^2} - \frac{\pi h^2}{\sqrt{144 - h^2}}$$
$$A'(h) = \frac{144\pi - 2\pi h^2}{\sqrt{144 - h^2}}$$

$-Analisando\ o\ comportamento(sinal)\ de\ A'(h), temos:$

$$A'(h) = \frac{2\pi(6\sqrt{2} - h)(6\sqrt{2} + h)}{\sqrt{(12 - h)(12 + h)}}$$

$$- - - - - - - - - -(-6\sqrt{2}) + + + + + + + (6\sqrt{2}) - - - - - - \quad (144\pi - 2\pi h^2)$$
$$(-12) +(12) \quad \sqrt{144 - h^2}$$
$$(-12) - - - - - - -(-6\sqrt{2}) + + + + + + + (6\sqrt{2}) - - - -(12) \quad A'(h)$$

$-Pela\ análise\ acima, temos\ um\ ponto\ de\ máximo\ local\ em\ h = 6\sqrt{2}cm, ou\ seja,$
$para\ este\ valor\ teremos\ o\ cilindro\ cuja\ área\ lateral\ é\ máxima.$
$-Com\ o\ valor\ da\ altura, calculemos\ o\ valor\ do\ raio\ do\ cilindro\ correspondente:$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{144 - h^2}$$
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{144 - 72}$$
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{72}$$
$$r = \frac{1}{2}6\sqrt{2}$$
$$r = 3\sqrt{2}cm$$

4.
$a)\ y = 5\cosh x + 4\,\mathrm{senh}\, x \quad ; determinar\ os\ números\ críticos;$
$-Como\ y\ corresponde\ à\ uma\ função\ contínua\ e\ diferenciável\ em\ \mathbb{R}, os\ números$

$críticos\ de\ f(x) = y\ ocorrem\ quando\ f'(x) = 0.$

$f'(x) = 5\,\text{senh}\,x + 4\cosh x$
$f'(x) = 0 \Rightarrow 5\,\text{senh}\,x = -4\cosh x$

$$\frac{5e^x - 5e^{-x}}{2} = \frac{-4e^x - 4e^{-x}}{2}$$
$$5e^x - 5e^{-x} = -4e^x - 4e^{-x}$$
$$9e^x = e^{-x}$$
$$9e^x = \frac{1}{e^x}$$
$$e^{2x} = \frac{1}{9}$$
$$2x = \ln\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$x = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$x = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$-Logo, \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ é $o\ número\ crítico\ de\ f(x).$

$b)$

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}1\,m/s \quad e \quad \frac{dr}{dt} = 0{,}3\,m/s$$

$*\ O\ volume\ do\ cone:$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h$$

$*\ Como\ a\ altura\ h\ e\ o\ raio\ r\ estão\ variando\ com\ o\ tempo, então, podemos\ escrever\ a\ expressão\ do\ volume\ da\ seguinte\ forma:$

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi\big(r(t)\big)^2.\big(h(t)\big)$$
$$V'(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi.\left[2r.\frac{dr}{dt}.h + r^2.\frac{dh}{dt}\right]$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi.[0{,}6.r.h + 0{,}1r^2]$$

$*\ Quando\ h = 0{,}5m\ e\ r = 0{,}2m, obtemos:$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi.[0{,}6.(0{,}2)(0{,}5) + 0{,}1(0{,}2)^2]$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi.[0{,}06 + 0{,}004]$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi.(0{,}064)$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{0{,}064}{3}\pi\ m^3/s$$

5 $f'(x) = x^2 + \big(f(x)\big)^2, \forall x \in (-1,1), e\ f(0) = 0.$

$a)\ Mostrar\ que\ existe\ uma\ reta\ tangente\ horizontal\ em\ x = 0,$ é $mostrar\ que\ f'(0) = 0, pois, sendo\ o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente\ igual$ à $zero,$

$temos\ uma\ reta\ tangente\ horizontal. Logo,$

$$f'(0) = 0^2 + \big(f(0)\big)^2$$
$$f'(0) = 0 + (0)^2$$
$$f'(0) = 0$$

$*\ Provar\ que\ em\ x = 0\ não\ temos\ um\ ponto\ de\ máximo\ ou\ um\ mínimo\ local,$ é $mostrar\ que\ não\ há\ mudança\ de\ comportamento\ (sinal)\ de\ f'(x)\ em\ x = 0, ou\ seja, ou\ f$ é $sempre\ crescente\ ou\ decrescente\ nas\ proximidades\ de\ x = 0.$

$*\ Note\ que\ \forall x \in (-1,1), f'(x) = x^2 + \big(f(x)\big)^2, a\ soma\ de\ ambos\ os\ termos$ é $sempre\ um\ número\ positivo\ e, portanto, f'(x) \geq 0\ , \forall x \in (-1,1). Logo, não\ há\ mudança\ de\ sinal\ em\ f'(x)\ em\ x = 0\ e, consequentemente, em\ x = 0\ não\ temos\ um\ ponto\ nem\ de\ máximo\ ou\ de\ mínimo\ local.$

$b)\ f''(x) = 2x + 2f(x).f'(x)$

$f''(x) = 2\big(x + f(x).f'(x)\big)$

$f''(0) = 2\big(0 + f(0).f'(0)\big)$

$f''(0) = 2.(0 + 0) = 0.$

$*\ Obs: O\ fato\ de\ que\ \ f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1,1), ou\ seja, f$ é $sempre\ crescente\ em\ (-1,1), então\ f(x) < 0\ em\ (-1,0)\ e\ f(x) > 0\ em\ (0,1).$

$*\ Com\ essas\ informações, note\ que\ se\ x \in (-1,0)\ e, portanto, f(x) < 0, então, f''(x) < 0, ou\ seja, f\ possui\ concavidade\ volta\ para\ baixo\ em\ (-1,0). Por\ outro\ lado, se\ x \in (0,1)\ e, portanto, f(x) > 0, então\ f''(x) > 0, ou\ seja, f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ em\ (0,1). Devido\ há\ mudança\ de\ direção\ da\ concavidade, temos\ um\ ponto\ de\ inflexão\ em\ x = 0.$

7.12 Reavaliação AB2-10 de Dezembro de 2011

1.
$a)\ s(t) = -16t^2 + 64$

$i)\ Quando\ s(t) = 0. (t > 0)$

$$-16t^2 + 64 = 0$$
$$-16(t^2 - 4) = 0$$
$$-16(t - 4)(t + 4) = 0$$
$$t = 4s$$

$ii)\ v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$

$v(t) = -32t$
$v(4) = -32(4)$
$v(4) = -128\, m/s$

$b)\ Seja\ f(x) = x^5 + c^2x - c\ ; provar\ que\ f\ tem\ no\ máximo\ uma\ raíz\ real.$
$*\ Suponhamos\ que\ f\ possui\ duas\ raízes\ reais\ distintas\ (a)\ e\ (b), tais\ que$
$f(a) = f(b) = 0, com\ a \neq b.$
$-Como\ f$ é $uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ [a, b]\ e\ derivável$
$em\ (a, b), e\ ainda, f(a) = f(b), pelo\ Teorema\ de\ Rolle\ existe\ algum\ x \in (a, b)$
$tal\ que\ f'(x) = 0. Logo,$
$f'(x) = 5x^4 + c^2$
$f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^4 = -c^2$ $(não\ possui\ solução\ em\ \mathbb{R})$
$*\ Note\ que\ f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\ e, portanto, f\ não\ pode\ possuir\ duas\ raízes\ reais$
$distintas\ e, consequentemente, f\ possui\ no\ máximo\ uma\ raíz\ real\ para\ qualquer$
$que\ seja\ a\ constante\ c.$

2.
$a) f(x) =\ y = 3\cos 2x\ ;\ Encontrar\ os\ pontos\ de\ máximo\ e\ mínimo\ absoluto\ no$
$intervalo\ fechado\ [\pi/6\,, 3\pi/4];$
$-Pelo\ Método\ do\ Intervalo\ Fechado, temos:$
$1)\ Os\ valores\ de\ f\ nos\ extremos\ do\ intervalo:$
$f(\pi/6) = 3\cos(\pi/3) = 3.(1/2) = 3/2\,;$
$f(3\pi/4) = 3\cos(3\pi/2) = 3.(0) = 0;$
$2)\ Os\ valores\ de\ f\ nos\ números\ críticos\ do\ intervalo:$
$*\ Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f$ é $um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde\ ou$
$f'(c) = 0\ ou\ f'(c)\ não\ existe.$

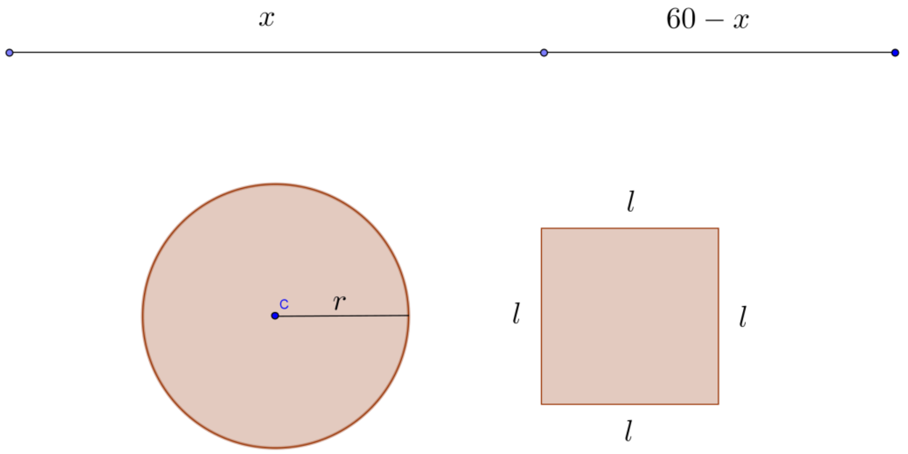
$f'(x) = -6\,\text{sen}\,2x\ ;$
$f'(x) = 0 \Rightarrow \text{sen}\,2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi\ \therefore x = \pi/2\ ;$
$*\ Lembre\ que\ estamos\ considerando\ apenas\ o\ intervalo\ [\pi/6\,, 3\pi/4]$
$f(\pi/2) = 3\cos\pi = 3.(-1) = -3;$

$3)\ Comparando\ todos\ os\ valores\ encontrados, temos:$
$f(\pi/2) = -3$ é $o\ valor\ mínimo\ absoluto\ no\ intervalo\ e$
$f(\pi/6) = 3/2$ é $o\ valor\ máximo\ absoluto.$

$b)\ y = e^x.\text{senh}\,x\ ; Determinar\ y'.$

$y' = e^x.\operatorname{senh} x + e^x.\cosh x$
$y' = e^x(\operatorname{senh} x + \cosh x)$

3. *Ilustração do problema*:



$*$ *Vamos considerar que uma parte x do fio será usada para fazer o círculo, enquanto que a parte $y = 60 - x$ será usada na confecção do quadrado. Logo,*

$$C = 2\pi r = x \quad e \quad P = 4l = 60 - x$$

$-$*Dessas expressões, tiramos os valores de r e l em função do pedaço do fio*:

$$r = \frac{x}{2\pi} \;\; e \;\; l = 15 - \frac{x}{4}$$

$*$ *A área total obtida pelo círculo mais o quadrado é*:

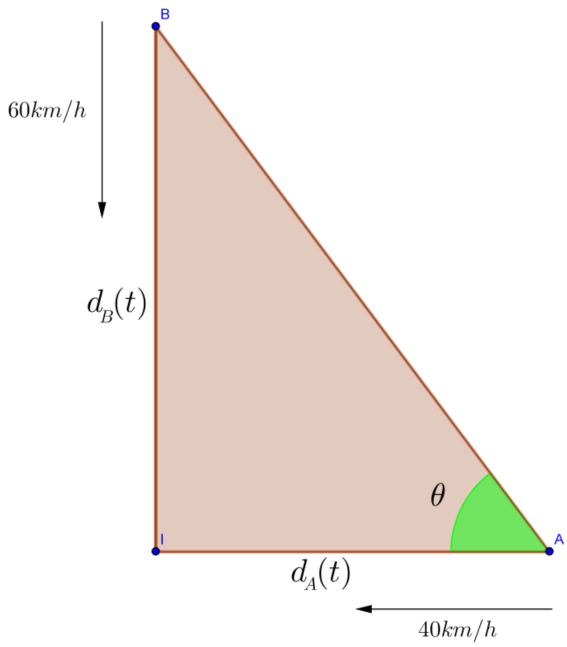
$$A = A_{Círculo} + A_{Quadrado}$$
$$A = \pi r^2 + l^2$$
$$A = \pi \cdot \frac{x^2}{4\pi^2} + \left(15 - \frac{x}{4}\right)^2$$
$$A = \frac{x^2}{4\pi} + 225 - \frac{15x}{2} + \frac{x^2}{16}$$
$$A(x) = x^2\left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right) - \frac{15}{2}x + 225$$
$$A'(x) = 2x\left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right) - \frac{15}{2}$$
$$A'(x) = x\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}\right) - \frac{15}{2}$$
$$A'(x) = x\left(\frac{4+\pi}{8\pi}\right) - \frac{15}{2}$$

$-$*Analisando o comportamento (sinal) de $A'(x)$, temos*:

$$- - - - - - - - - - - - - \left(\frac{60\pi}{4+\pi}\right) + + + + + + + + + \qquad A'(x) = x\left(\frac{4+\pi}{8\pi}\right) - \frac{15}{2}$$

$-$*Da análise acima, concluímos que em $x = 60\pi/(4+\pi)$ temos a área total sendo mínima. Logo, o arame deve ser cortado em dois pedaços, um medindo $60\pi/(4+\pi)$ cm e o outro medindo $240/(4+\pi)$ cm.*

4. *Ilustração do problema*:



$*$ *Da ilustração acima temos a seguinte expressão para o ângulo $B\hat{A}I$:*

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d_B(t)}{d_A(t)}$$

$*$ *No enunciado da questão, temos as seguinte informações:*

$$d_B'(t) = 60\ km/h \quad e \quad d_A'(t) = 40\ km/h$$

$*$ *Obs: note que ao usarmos os valores acima positivos, estamos considerando o decrescimento da distância de A e B em relação ao ponto de encontro como positivo. Logo, a taxa de variação do ângulo segue a mesma interpretação quanto ao sinal.*

$$\theta(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{d_B(t)}{d_A(t)}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d_B'(t)\cdot d_A(t) - d_B(t)\cdot d_A'(t)}{[d_A(t)]^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{d_B(t)}{d_A(t)}\right)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{60\cdot d_A(t) - 40\cdot d_B(t)}{[d_A(t)]^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{d_B(t)}{d_A(t)}\right)^2}$$

$-$*Quando $d_B(t) = 400km$ e $d_A(t) = 300km$, obtemos:*

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{60\cdot 300 - 40\cdot 400}{[300]^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{400}{300}\right)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{18000 - 16000}{90.000}\cdot\frac{1}{1+\frac{16}{9}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2.000}{90.000}\cdot\frac{9}{25}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{125}\,rad/h$$

$* \, Com \; isso, concluímos \; que \; o \; ângulo \; \theta \; está \; decrescendo \; à \; taxa \; de \; \dfrac{1}{125} rad/h.$

5.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \;\; ; \;\; f'(x) = \frac{-x(x-2)}{e^x} \;\; ; \;\; f''(x) = \frac{x^2-4x+2}{e^x}$$

$a) \; Crescimento \; e \; Decrescimento:$

$$f'(x) = \frac{-x(x-2)}{e^x}$$

$-Analisando \; o \; sinal \; de \; f'(x), temos:$

$+ + + + + + + + + + + + + (0) - - - - - - - - - - - -$ $\quad -x$

$- (2) + + + + +$ $\quad (x-2)$

$+ +$ $\quad e^x$

$- - - - - - - - - - - - - (0) + + + + (2) - - - - -$ $\quad f'(x) = -x(x-2)/e^x$

$-Com \; a \; análise \; acima, concluímos \; que \; f \; é \; crescente \; em \; (0,2) \; e \; f \; é \; decrescente \; em \; (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$b) \; Concavidade:$

$$f''(x) = \frac{x^2-4x+2}{e^x}$$

$-Analisando \; o \; sinal \; de \; f''(x), temos:$

$+ + + + + (2-\sqrt{2}) - - - - - - (2+\sqrt{2}) + + + + +$ $\quad x^2 - 4x + 2$

$+ +$ $\quad e^x$

$+ + + + + (2-\sqrt{2}) - - - - - - (2+\sqrt{2}) + + + + +$ $\quad f''(x) = (x^2-4x+2)/e^x$

$-Com \; a \; análise \; acima, concluímos \; que \; f \; possui \; concavidade \; voltada \; para \; cima \; em \; (-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, +\infty) \; e \; f \; possui \; concavidade \; voltada \; para \; baixo \; em \; (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}).$

$c) \; Assíntotas:$

$* \, Obs: como \; f \; é \; contínua \; em \; \mathbb{R} \; e, portanto, não \; há \; pontos \; de \; descontinuidade \; na \; função, então \; f \; não \; possui \; assíntotas \; verticais! \; Note \; que \; a \; função \; está \; definida \; para \; todos \; os \; reais.$

$-Horizontais: Dizemos \; que \; a \; reta \; y = a \; é \; uma \; assíntota \; horizontal \; se \; ocorrer \; um \; dos \; seguintes \; casos,$

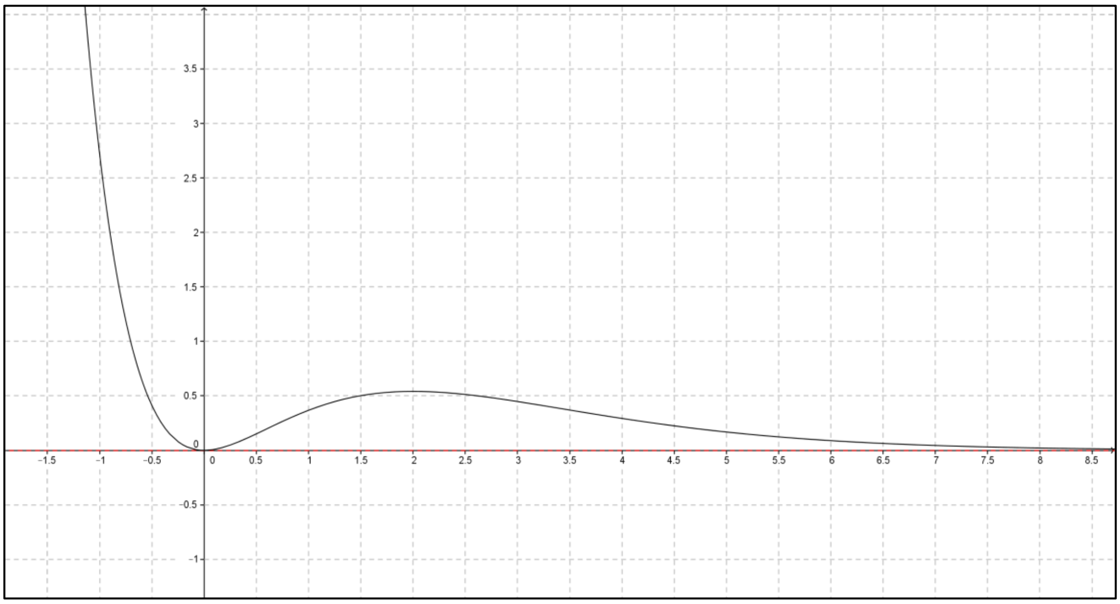
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

$-Logo, a \; reta \; y = 0 \; é \; uma \; assíntota \; horizontal \; ao \; gráfico \; de \; f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}.x^2 = +\infty.$$

$d)$ $Esboçar\ o\ gráfico!$



7.13 Avaliação Final-16 de Dezembro de 2011

1.

$a)\ Determinar\ onde\ a\ função\ f\ é\ contínua.$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & se\ x \leq 1, \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}, & se\ x > 1 \end{cases}$$

$*\ Obs: a\ segunda\ sentença\ da\ função\ f\ pode\ ser\ reescrita\ da\ seguinte\ forma:$

$$\frac{x^2+2x-3}{x-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)}$$

$*\ Como\ essa\ sentença\ é\ válida\ para\ x > 1, ou\ seja, x \neq 1, então,$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & se\ x \leq 1, \\ x+3, & se\ x > 1 \end{cases}$$

$-Como\ f\ é\ uma\ função\ sentencial\ cujas\ sentenças\ são\ funções\ polinomiais\ e, portanto, contínuas\ em\ seus\ domínios, f\ é\ sempre\ contínua\ onde\ suas\ sentenças\ são\ contínuas, ou\ seja, onde\ f\ está\ definida.$

$*\ Portanto, temos\ que\ f\ é\ contínua\ em\ (-\infty, 1) \cup (1, +\infty). Falta\ vertificar\ se\ f\ é\ contínua\ em\ x = 1, onde\ há\ mudança\ de\ comportamento\ da\ função.$

$-Dizemos\ que\ uma\ função\ f\ é\ contínua\ no\ ponto\ x = a\ se, somente\ se,$

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

$-Para\ x = 1, temos:$

$f(1) = 3.(1) + 1 = 3 + 1 = 4;$

$\lim_{x\to 1} f(x)\ ;\ \ Analisando\ os\ limites\ laterais, temos:$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+3) = \lim_{x\to 1^+} x + \lim_{x\to 1^+} 3 = 1 + 3 = 4;$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(3x+1) = \lim_{x\to 1^-} 3x + \lim_{x\to 1^-} 1 = 3 + 1 = 4;$

$-Logo, \lim_{x\to 1} f(x) = 4.$

$-Como\ f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)\ , então\ f\ é\ contínua\ em\ x = 1\ e, portanto, f\ é\ contínua\ em\ \mathbb{R}.$

$b)\ No\ intervalo\ (-1, 2)\ existe\ c\ tal\ que\ f(c) = 3?$

$f(-1) = 3.(-1) + 1 = -3 + 1 = -2;$

$f(2) = 2 + 3 = 5;$

$-Como\ f\ é\ uma\ função\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [-1, 2]\ e\ ainda\ , temos\ f(-1) < 3 < f(2), pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário, existe\ algum\ número\ c \in (-1, 2)\ tal\ que\ f(c) = 3.$

2.

$a)\ f(x) = |x^2 - 4| + 1\ ; analisar\ a\ diferenciabilidade\ de\ f\ em\ x = 2.$

$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, & se\ x \leq -2\ ou\ x \geq 2 \\ -(x^2-4), & se -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-4)+1, & se\ x \leq -2\ ou\ x \geq 2 \\ -(x^2-4)+1, & se -2 < x < 2 \end{cases}$$

$*\ f(2) = 1;$

$-Calculando\ as\ derivadas\ laterais\ em\ x = 2, temos:$

$$f'_{-}(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-4)+1-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-4)}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} -(x+2) = -(2+2) = -4;$$

$$f'_{+}(2) = \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x^2-4)+1-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x^2-4)}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2^+}(x+2) = (2+2) = 4;$$

$-Como\ as\ derivadas\ laterais\ existem, mas\ são\ diferentes, f'_{-}(2) \neq f'_{+}(2),$
$então\ f\ não\ é\ derivável\ em\ x = 2.$

$b)\ f(x) = x.g(x^2)\ ;\ \ g(1) = 4\ e\ g'(1) = 2\ ; reta\ normal\ à\ f\ no\ ponto\ x = 1.$
$f(1) = 1.g(1^2)$
$f(1) = g(1) = 4\ ;\ \ ponto\ (1,4)$

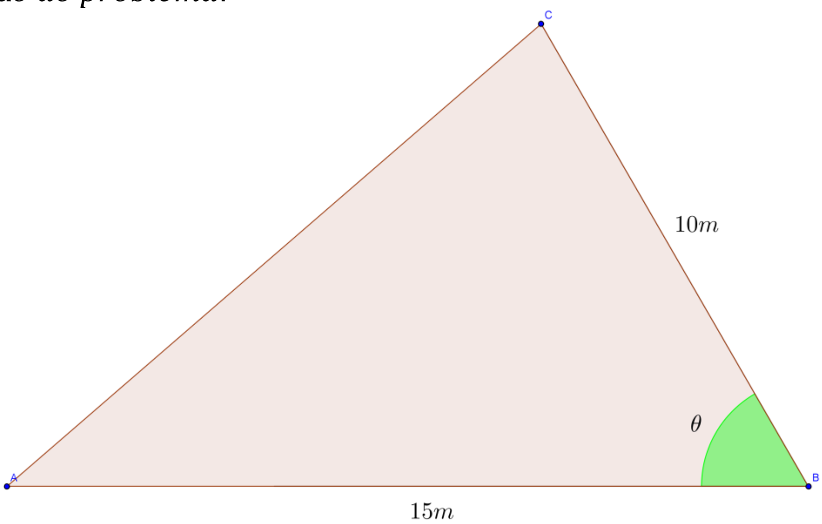
$f'(x) = g(x^2) + x.(2x).g'(x^2)$
$f'(1) = g(1^2) + 1.(2).g'(1^2)$
$f'(1) = g(1) + 2.g'(1)$
$f'(1) = 4 + 2.(2)$
$f'(1) = 4 + 4 = 8$

$-Logo, o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal\ m_n = -\dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{1}{8}$

$-Equação\ da\ reta\ normal\ no\ ponto\ (1,4):$

$$y - 4 = -\frac{1}{8}(x-1)$$
$$y - 4 = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$$
$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{33}{8}$$

3.
$a)\ Ilustração\ do\ problema:$



$*\ A\ área\ de\ um\ triângulo\ em\ função\ do\ ângulo\ \theta, ilutrado\ acima, é:$

$$A = \frac{1}{2} a.b.\operatorname{sen}\theta$$

$* \, Onde\ a\ e\ b\ são\ as\ dimensões\ dos\ lados\ adjacentes\ ao\ ângulo. Logo,$

$$A = \frac{1}{2}(10).(15).\operatorname{sen}\theta$$

$$A = 75 \operatorname{sen}\theta$$

$-Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = (75\cos\theta) \cdot \frac{1}{15}$$

$$\frac{dA}{dt} = 5\cos\theta$$

$-Quando\ \theta = \pi/3\ \ radianos, temos:$

$$\frac{dA}{dt} = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{dA}{dt} = 5.\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{dA}{dt} = 2{,}5\, cm^2/min$$

$b)\ f(x) = \arccos x \ \ ; \ \ onde\ |f'(x)| = \sqrt{2}\ ?$

$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ; \quad |f'(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{2} \ \Rightarrow \sqrt{2(1-x^2)} = 1 \Rightarrow 2(1-x^2) = 1 \Rightarrow 1 - x^2 = \dfrac{1}{2}\ ;$

$x^2 = 1 - \dfrac{1}{2} \ \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \ \therefore \boldsymbol{x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ e\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}}\ ;$

4.

$a)\ f(x) = x^{\operatorname{arctg}(x^2)}\ ; reta\ tangente\ no\ ponto\ de\ abscissa\ x = 1.$

$f(1) = 1\ ; \quad ponto\ (1,1)$

$\ln f(x) = \operatorname{arctg}(x^2).\ln x$

$-Por\ diferenciação\ logarítmica, temos:$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (2x).\dfrac{1}{1+(x^2)^2}.\ln x + \operatorname{arctg}(x^2).\dfrac{1}{x}$

$f'(x) = f(x)\left[\dfrac{2x}{1+(x^2)^2} \cdot \ln x + \operatorname{arctg}(x^2) \cdot \dfrac{1}{x}\right]$

$f'(1) = f(1)\left[\dfrac{2}{1+1} \cdot \ln 1 + \operatorname{arctg}(1) \cdot \dfrac{1}{1}\right]$

$f'(1) = 1\left[\dfrac{2}{2} \cdot 0 + \dfrac{\pi}{4}\right]$

$f'(1) = \dfrac{\pi}{4}$

$-Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (1,1):$

$$y - 1 = \frac{\pi}{4}(x-1)$$

$$y-1=\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}$$
$$y=\frac{\pi}{4}x+\frac{4-\pi}{4}$$

$b)\ \ y^3+(\cos x)y-8=0\,;\,determinar\ y'\ no\ ponto\ em\ que\ x=\pi/2\,;$

$y^3+(\cos\pi/2)y-8=0$

$y^3-8=0\Rightarrow y^3=8\therefore y=2;\quad ponto\ (\pi/2\,,2)$

$-Por\ derivação\ implícita, temos:$

$$3y^2y'-(\operatorname{sen}x)y+(\cos x)y'=0$$
$$y'.[3y^2+\cos x]=(\operatorname{sen}x)y$$
$$y'=\frac{(\operatorname{sen}x)y}{3y^2+\cos x}$$
$$y'=\frac{(\operatorname{sen}\pi/2).2}{3.(2)^2+\cos\pi/2}$$
$$y'=\frac{1.(2)}{3.(4)+0}$$
$$y'=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

5.

$Por\ semelhança\ de\ triângulos\ temos:$

$\frac{H}{R}=\frac{H-h}{r}\Rightarrow RH-Rh=rH\Rightarrow h=\frac{H(R-r)}{R}.$

$V=\pi r^2h\Rightarrow V=\pi r^2.\frac{H}{R}(R-r)\Rightarrow V(r)=\frac{\pi H}{R}(Rr^2-r^3).$

$V'(r)=\frac{\pi H}{R}(2Rr-3r^2);$

$-Analisando\ o\ sinal\ de\ V'(r), temos:$

$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-(\ 0\ )+++++++++(2R/3)-----\quad V'(r)$

$Obs: Note\ que\ r=0\ não\ pode\ ser\ solução\ do\ problema!$

$*\ Em\ r=2R/3\ \ temos\ um\ ponto\ de\ máximo\ local, onde\ teremos\ o\ volume\ sendo\ máximo.$

$Sendo\ r=\frac{2R}{3}, encontramos\ h=\frac{H\left(R-\frac{2R}{3}\right)}{R}\rightarrow h=\frac{H\left(\frac{R}{3}\right)}{R}\rightarrow h=\frac{H}{3}$

$b)\ f(x)=\cos sen\sqrt{x^2+1}\ \ ;reta\ normal\ no\ ponto\ em\ que\ x=0.$

$$f'(x)=-\frac{cos\sqrt{x^2+1}.sen\left(sen\sqrt{x^2+1}\right).x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f'(0)=-\frac{\cos 1\,.sen(sen1).0}{1}=0$$

$*\ Logo, temos\ uma\ reta\ tangente\ horizontal\ em\ x=0.$

$-A\ equação\ da\ reta\ normal\ em\ x=0:$

$$y-y_o=-\frac{1}{m}(x-x_o)$$
$$m(y-y_o)=-1(x-x_o)$$
$$0.(y-\cos(sen1))=\ -1(x-0)$$
$$0=-x$$

$$x = 0$$

$A\ reta\ x = 0$ é $a\ normal\ ao\ gráfico\ de\ f(x)\ em\ x = 0.$

6.

$a)\ f(x) = \begin{cases} x^3, & se\ x \leq 0, \\ x^4, & se\ x > 0 \end{cases}$; $mostrar\ que\ f'(0)\ e\ f''(0)\ existem, mas\ que\ f'''(0)$ $não\ existe.$

$*\ Vamos\ determinar\ as\ expressões\ para\ f'(x), f''(x)\ e\ f'''(x):$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & se\ x < 0, \\ 4x^3, & se\ x > 0 \end{cases}$$

$-Para\ a\ derivada\ de\ 1ª\ ordem, em\ x = 0, temos:$

$f'_-(0) = 3.(0)^2 = 3.(0) = 0$

$f'_+(0) = 4.(0)^3 = 4.(0) = 0;$

$-Como\ f'_-(0) = f'_+(0), então\ f$ é $diferenciável\ em\ x = 0;$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & se\ x < 0 \\ 12x^2, & se\ x > 0 \end{cases}$$

$-Para\ a\ derivada\ de\ 2ª\ ordem, em\ x = 0, temos:$

$f''_-(0) = 6.(0) = 0$

$f''_+(0) = 12.(0)^2 = 12.(0) = 0;$

$-Como\ f''_-(0) = f''_+(0), então\ f'$ é $diferenciável\ em\ x = 0;$

$$f'''(x) = \begin{cases} 6, & se\ x < 0 \\ 24x, & se\ x > 0 \end{cases}$$

$-Para\ a\ derivada\ de\ 3ª\ ordem, em\ x = 0, temos:$

$f'''_-(0) = 6$

$f'''_+(0) = 24.(0) = 0;$

$-Como\ f'''_-(0) \neq f'''_+(0), então\ f''\ não$ é $diferenciável\ em\ x = 0;$

$*\ Portanto, não\ existe\ f'''(0).$

$b)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}}$;

$$-\frac{x}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}} \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}}$$

$*\ Sejam\ f(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}}, g(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}}\ e\ h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}},$ $então, f(x) \leq g(x) \leq h(x). E\ ainda, \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 0. Assim, pelo\ Teorema$ $do\ Confronto, temos\ que\ \lim_{x \to 0} g(x) = 0. Portanto,$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}} = 0$$

7.

$a)\ f(x) = 1 + x + x^{11} + x^{21} + x^{31} + x^{41}$;

$f(-1) = -4$; $f(0) = 1$;

$*\ f$ é $uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ \mathbb{R}. Logo, f$ é $contínua\ no$ $intervalo\ fechado\ [-1, 0], e\ ainda, f(-1) < 0 < f(0). Assim, pelo\ Teorema\ do$ $Valor\ Intermediário, existe\ algum\ número\ c \in (-1, 0)\ tal\ que\ f(c) = 0. Ou\ seja,$ $f\ possui\ uma\ raíz\ real\ em\ (-1, 0).$

$*$ *Suponhamos que f possui duas raízes reais distintas b e c, tais que, $f(b) = f(c) = 0$, com $b \neq c$. Sabemos que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e, portanto, f é diferenciável em (b, c). Assim, pelo Teorema de Rolle, existe algum $x \in (b, c)$ tal que $f'(x) = 0$.*

$$f'(x) = 1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + x^{40}$$

$*$ *Notamos claramente que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $\nexists x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0$.*

$*$ *Portanto, f possui exatamente uma raíz real.*

$b)$ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; *Linearização de f em $x = 0$.*

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$-$*A linearização L de uma função no ponto $x = a$ é dada pela expressão:*

$$L(x) - f(a) = f'(a).(x - a)$$
$$L(x) - f(0) = f'(0).(x - 0)$$
$$L(x) - \sqrt{0 + 1} = \frac{0}{\sqrt{0 + 1}}.x$$
$$L(x) - 1 = 0$$
$$L(x) = 1$$

8.

$a)$ *Seja* $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$, *com* $0 \leq x \leq 1$. *Determinar o valor de x onde f está crescendo mais rapidamente.*

$*$ *A questão quer que encontremos o maior valor de $f'(x)$ no intervalo $[0,1]$ de modo que:* $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

$-$*Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:*

1) *Os valores de f' nos extremos do intervalo:*

$f'(0) = 0$ *e* $f'(1) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

2) *Os valores de f' nos números críticos:*

$*$ *Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

$*$ *Nesse caso, devemos analisar em $f''(x)$.*

$$f''(x) = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2 + 1)^3}$$

$-$*Analisando o sinal de $f''(x)$, temos:*

$- - - - - - - -$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$+ + + + + + + +$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$- - - - - - - -$	$(-6x^2 + 2)$
$+ + + + + + + +$		$+ + + + + + + +$		$+ + + + + + + +$	$(x^2 + 1)^3$
$- - - - - - - -$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$+ + + + + + + +$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$- - - - - - - -$	$f''(x)$

$*$ *Note que em $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ temos um ponto de máximo local.*

Obs: *lembre que o intervalo é* $[0,1]$, *então* $x = 1/\sqrt{3}$. *Este valor representa o* x *em que* $f'(x)$ *obtém seu maior valor, que é justamente o ponto onde* f *está crescendo mais rapidamente.*

$*$ *Justificativa: Para todo* $x \in [0,1]$, $f'(x) \leq f'(1/\sqrt{3})$

$b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$;

$*$ *façamos a substituição* $t = x+1$; *se* $x \to \infty$, *então* $t \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-2}{t}\right)^{t-1} = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{2}{t}\right)^{t-1} \ ;$$

$*$ *façamos a substituição* $t = -2n$; *se* $t \to \infty$, *então* $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{-2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \times \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^2 \times \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} =$$

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^2 \times \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = e^{-2}\times 1 = e^{-2};$$

$-Logo$, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = e^{-2}$;

9.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)\left(\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}}} = 0$$

$b)\ \lim_{x\to0}\frac{x^2+3x}{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to0}\frac{x(x+3)}{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}\cdot(x+3) = \lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}\times\lim_{x\to0}(x+3) =$
$1\times(0+3) = 3.$

10.

$$f(x) = x^2+\frac{2}{x}\ \ ;\ \ f'(x) = 2x-\frac{2}{x^2}\ \ ;\ \ f''(x) = 2+\frac{4}{x^3}$$

$a)$ *Crescimento e Decrescimento*:

$$f'(x) = 2x-\frac{2}{x^2}\ ,ou\ ainda, f'(x) = \frac{2(x^3-1)}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

$-$*Analisando o sinal de* $f'(x)$, *temos*:

$- - - - - - - - - - - - - - (1) + + + + + + + + + + +$	$2(x-1)$
$+ +$	(x^2+x+1)
$+ + + + + + + + (0) + + + + + + + + + + + + + + + +$	x^2
$- - - - - - - - (0) - - - (1) + + + + + + + + + + +$	$f'(x) = 2(x^3-1)/x^2$

$-$*Da análise acima, concluímos que* f *é crescente em* $(1,+\infty)$ *e* f *é decrescente em* $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

$b)$ *Concavidade*:

$$f''(x) = 2 + \frac{4}{x^3}, ou\ ainda, f''(x) = \frac{2(x^3+2)}{x^3}$$

$-Analisando\ o\ sinal\ de\ f''(x), temos$:

$$\begin{array}{ll}
- - - - - - - - - - - \left(-\sqrt[3]{2}\right) + + + + + + + + + + + & 2(x^3+2) \\
\hline
- (\ 0\ ) + + + + + & x^3 \\
\hline
+ + + + + + + + + + + \left(-\sqrt[3]{2}\right) - - - - (\ 0\ ) + + + + + & f''(x) = 2(x^3+2)/x^3 \\
\hline
\end{array}$$

$-Da\ análise\ acima, concluímos\ que\ f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ em\ \left(-\infty, -\sqrt[3]{2}\right) \cup (0, +\infty)\ e\ f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ baixo\ em\ \left(-\sqrt[3]{2}, 0\right).$

$c)$ *Assíntotas*:

$-Verticais$: $Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a$ é $uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*\ Verificando\ se\ no\ ponto\ de\ descontinuidade\ da\ função, ou\ seja, em\ x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{x^3+2}^{\uparrow\, 2}}{\underbrace{x}_{\downarrow\, 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\overbrace{x^3+2}^{\uparrow\, 2}}{\underbrace{x}_{\downarrow\, 0^-}} = -\infty$$

$-Logo, a\ reta\ x = 0$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$-Horizontais$: $Dizemos\ que\ a\ reta\ y = a$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3+2}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{1} = \lim_{x\to +\infty} 3x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3+2}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{3x^2}{1} = \lim_{x\to -\infty} 3x^2 = +\infty$$

$-Logo,$ não há $assíntotas\ horizontais\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

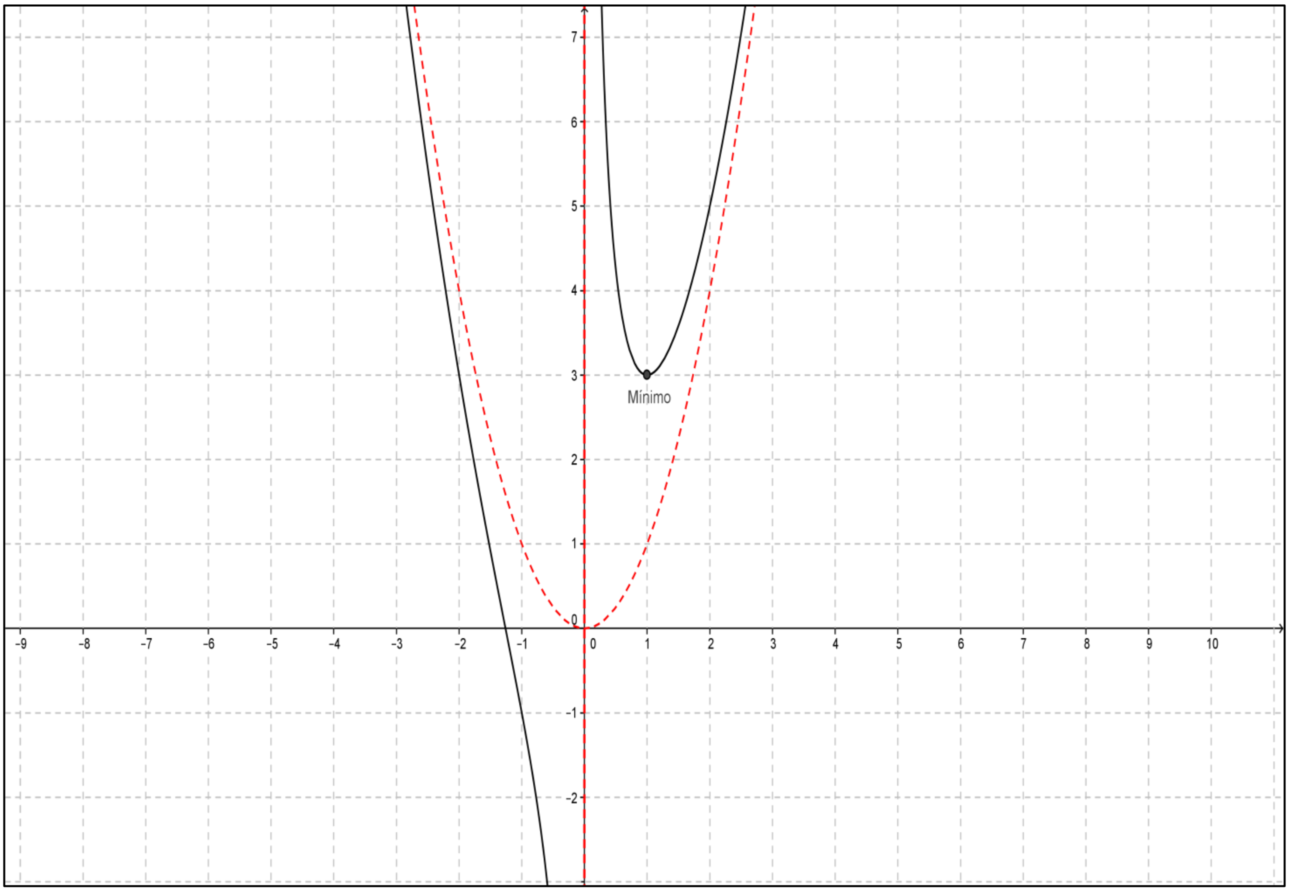
$*\ Obs$: $Não\ há\ assíntota\ oblíqua\ no\ gráfico\ de\ f(x), pois, o\ grau\ do\ numerador\ excede\ o\ grau\ do\ denominador\ em\ 2\ unidades. Ou\ seja, f\ possui\ uma\ assíntota\ curvilínea.$

$-Seja\ g(x) = x^2, vamos\ calcular\ \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - g(x)]\,;$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2+\frac{2}{x}-x^2\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x} = 0;$$

$* \; Portanto, a\ curva\ g(x) = x^2$ é $uma\ assíntota\ curvilínea\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$d)\ Esboço\ do\ gráfico:$



Capítulo 11 2015.1

11.1 1ª Prova – 11 de Abril de 2015

$\boldsymbol{Quest}$**ão 1**.

$a)$ $Calcule\ \lim_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$;

$b)$ $Ache\ a\ solução\ da\ equação\ f(x) = f'(x), onde\ f(x) = x^2 + 3x + 1.$

$\boldsymbol{Quest}$**ão 2**

$a)$ $Encontre\ as\ assíntotas, caso\ existam, de\ f(x) = \dfrac{|x|^2 - |x| + 6}{|x^2 - x + 6|}$;

$b)$ $Use\ o\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ para\ mostrar\ que\ existe\ algum$ $número\ real\ positivo\ que\ igual\ ao\ dobro\ do\ seu\ quadrado.$

$\boldsymbol{Quest}$**ão 3**. $Seja\ f(x) = x^3.\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), x \neq 0.$

$a)$ $Calcule\ \lim_{x\to 0} f(x)$;

$b)$ $Seja\ g(x) = 1 - f(x). Defina\ g(0)\ para\ que\ a\ função\ g\ seja\ contínua\ em$ $x = 0, onde\ f\ é\ a\ função\ do\ item\ (a).$

$\boldsymbol{Quest}$**ão 4**. $Dada\ a\ função$

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x)\,, & x < 1 \\ mx^2 + 3x + n, & 1 \leq x < 2 \\ mx + n, & x \geq 2 \end{cases}$$

$determine\ os\ valores\ de\ m\ e\ n\ para\ os\ quais\ a\ função\ f\ é\ contínua\ em\ \mathbb{R}.$

$\boldsymbol{Quest}$**ão 5**. $Se\ uma\ bola\ for\ empurrada\ ladeira\ abaixo, sobre\ um\ plano\ inclinado,$ $a\ uma\ velocidade\ inicial\ de\ 5\, m/s\ \ , a\ distância\ que\ ela\ terá\ rolado, após\ t\ segundos$ $será\ dada\ por\ s = 5t + 3t^2.$

$a)$ $Determine\ sua\ velocidade\ após\ 2s.$

$b)$ $Quão\ longe\ ela\ estará\ do\ ponto\ de\ partida\ quando\ sua\ velocidade\ atingir$ $35\, m/s\,?$

***Questão* 1.**

$a)$ *Calcule* $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$;

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}\right) = \lim_{x\to 2^-}\frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}} =$$

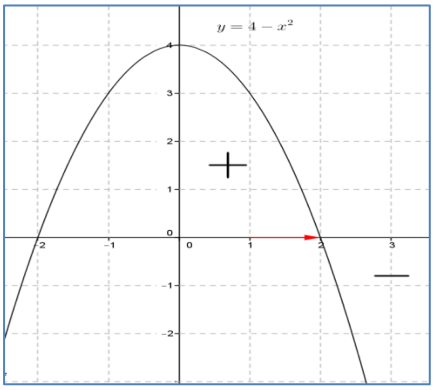
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+2)}{(x-2)\sqrt{4-x^2}};$$ *Se* $x\to 2^-$, *então* $x<2$. *Logo*, $(x-2)<0$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+2)}{\sqrt{4-x^2}};$$

$*$ *Analisando o denominador, temos*:

Se $x\to 2^-$, *então* $4-x^2\to 0^+$. *Portanto*,

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\overbrace{-(x+2)}^{-4}}{\underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{0^+}} = -\infty \text{ , por definição, } \lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}\ \nexists.$$



$b)$ *Ache a solução da equação* $f(x)=f'(x)$, *onde* $f(x)=x^2+3x+1$.

$*$ *Pela definição de derivada, temos*:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+1-(x^2+3x+1)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+3x+3\Delta x+1-x^2-3x-1}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2+3\Delta x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+3+\Delta x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}(2x+3+\Delta x)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}2x+\lim_{\Delta x\to 0}3+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\\
&= 2x+3.
\end{aligned}$$

$\therefore f'(x)=2x+3.$

Resolvendo a equação descrita inicialmente, temos:

$$f(x)=f'(x)$$

$$x^2 + 3x + 1 = 2x + 3$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$\Delta = 1 + 8 = 9$$
$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} \therefore x_1 = -2 \; e \; x_2 = 1$$

$* \, Logo, x = -2 \; e \; x = 1$ *são soluções da equação* $f(x) = f'(x)$. *Comprovando ...*

$f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$
$f'(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$

$f(1) = 1^2 + 3.1 + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$
$f'(1) = 2.1 + 3 = 2 + 3 = 5$

Questão 2

$a)$ *Encontre as assíntotas, caso existam, de* $f(x) = \dfrac{|x|^2 - |x| + 6}{|x^2 - x + 6|}$;

$* \, Obs: |x|^2 = |x^2| = x^2 \; ; \;\; |x| = \begin{cases} x, & se \; x \geq 0 \\ -x, & se \; x < 0 \end{cases}$.

$\rightarrow$ *Analisando o domínio da função* f, *obtemos*:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - x + 6 \neq 0\}$$

$x^2 - x + 6 = 0$
$\Delta = 1 - 24 = -23 \;\therefore \Delta < 0 \Rightarrow x^2 - x + 6 \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$
Consequentemente, a função $x^2 - x + 6$ *é estritamente positiva ou negativa.*
Usando o valor $x = 0$ *como referência, concluímos que* $x^2 - x + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ *Logo,* $|x^2 - x + 6| = x^2 - x + 6$, *e ainda,* $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{x^2 - |x| + 6}{x^2 - x + 6} \; ; f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 6}{x^2 - x + 6}, & se \; x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 + x + 6}{x^2 - x + 6}, & se \; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 + x + 6}{x^2 - x + 6}, & x < 0 \end{cases}$$

$1)$ *Assíntotas Horizontais:*

Dizemos que a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal se, somente se,*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$; *Portanto, a reta* $y = 1$ *é uma assíntota horizontal!*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + 6}{x^2 - x + 6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6}{x^2}} = \frac{1+0+0}{1-0+0} = \frac{1}{1} = 1\ ;$$

$* \ Logo, a\ reta\ y = 1$ é a única $assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$2)\ Assíntotas\ Verticais:$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a$ é $uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ casos\ abaixo:$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$* \ Pela\ definição\ de\ continuidade\ de\ uma\ função\ no\ número\ x = a, concluímos\ que\ as\ assíntotas\ verticais\ ocorrem\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ função,\ uma\ vez\ que, \lim\limits_{x\to a} f(x) \nexists.$

$\to A\ função\ f$ é $uma\ função\ sentencial\ composta\ por\ uma\ função\ constante\ e\ uma\ função\ racional. A\ primeira\ função$ é $contínua\ em\ \mathbb{R}\ e, portanto, contínua\ em\ (0, +\infty)\ onde\ está\ sentença$ é $válida. As\ funções\ racionais\ são\ contínuas\ onde\ estão\ definidas, ou\ seja, em\ seus\ domínios. Como\ já\ foi\ constatado\ que\ o\ termo\ x^2 - x + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}\ e\ o\ numerador$ é $uma\ função\ polinomial, então\ essa\ função\ racional$ é $contínua\ em\ \mathbb{R}\ e, portanto, contínua\ em\ (-\infty, 0).$

$* \ Dessa\ forma, só\ podemos\ analisar\ a\ existência\ de\ assíntota\ vertical\ em\ x = 0\ (único\ número\ onde\ não\ garantimos\ a\ continuidade)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1;$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x+6}{x^2-x+6} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+x+6)}{\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-x+6)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + \lim\limits_{x\to 0^-} x + \lim\limits_{x\to 0^-} 6}{\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 - \lim\limits_{x\to 0^-} x + \lim\limits_{x\to 0^-} 6} = \frac{6}{6} = 1$$

$* \ Obs: Como\ o\ limite\ do\ denominador$ é $diferente\ de\ zero, então\ podemos\ usar\ a\ propriedade\ do\ limite\ do\ quociente!$

$* \ Como\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ então\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)\ \exists\ e, portanto, f\ não\ possui\ assíntotas\ verticais.$

$b)\ Use\ o\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ para\ mostrar\ que\ existe\ algum\ número\ real\ positivo\ que\ igual\ ao\ dobro\ do\ seu\ quadrado.$

$* \ Devemos\ mostrar\ que\ existe\ algum\ x \in \mathbb{R}, com\ x > 0, tal\ que\ x = 2x^2.$
$* \ Seja\ f(x) = 2x^2 - x\ , e\ calculamos\ os\ seguintes\ valores\ de\ f:$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2.\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2.\frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\ ; \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$f(1) = 2.(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1\ ; \qquad\qquad f(1) = 1$$

$* \, f$ é uma função polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua no intervalo fechado $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ e $f\left(\frac{1}{4}\right) < 0 < f(1)$. Então, existe algum número $c \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ tal que $f(c) = 0$.

$f(c) = 0 \Rightarrow 2c^2 - c = 0 \rightarrow 2c^2 = c$; Logo, c é um número real positivo cujo valor é igual ao dobro do seu quadrado!

***Questão* 3.** Seja $f(x) = x^3 . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0$.

a) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;

$*\ \forall x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 0$, temos:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$
$$-x^3 \leq x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^3 \quad ; \quad para\ x > 0$$

Seja $g(x) = -x^3$ e $h(x) = x^3$. Logo, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ e ainda, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$, Então, pelo Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

$\rightarrow$ Analogamente ...

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$
$$-x^3 \geq x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \geq x^3 \quad ; \quad para\ x < 0$$

Seja $g(x) = -x^3$ e $h(x) = x^3$. Logo, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ e ainda, $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = 0$, Então, pelo Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

$*$ Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, então $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe e $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) Seja $g(x) = 1 - f(x)$. Defina $g(0)$ para que a função g seja contínua em $x = 0$, onde f é a função do item (a).

Definição: Dizemos que uma função f é contínua no número a se, somente se,

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

$*$ Aplicando a definição para a função g em $x = 0$, obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} g(0) &= \lim_{x \to 0} g(x) \\ &= \lim_{x \to 0} [1 - f(x)] \\ &= \lim_{x \to 0} 1 - \lim_{x \to 0} f(x) \end{aligned}$$

$* \, Obs$: *podemos reverter o limite da diferença na diferença dos limites porque esses limites existem!*

$$g(0) = 1 - 0 = 1.$$

Logo, a função g pode ser representada na forma $g(x) = \begin{cases} 1 - f(x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

***Questão* 4.** *Dada a função*

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & x < 1 \\ mx^2 + 3x + n, & 1 \leq x < 2 \\ mx + n, & x \geq 2 \end{cases}$$

determine os valores de m e n para os quais a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

$*$ *f é uma função sentencial e será contínua somente onde as suas sentenças forem contínuas considerando os intervalos onde predominam.*

A função trigonométrica $\cos(\pi x)$ *é uma função contínua em seu domínio. Portanto,* $\cos(\pi x)$ *é uma função contínua em* $\mathbb{R}$, *porém, ela predomina apenas para* $x < 1$. *Logo, f é contínua em* $(-\infty, 1)$.

A segunda e terceira sentenças são funções polinomiais e, portanto, contínuas em $\mathbb{R}$. *Analisando onde essas funções predominam, concluimos que f é contínua em* $(1,2) \cup (2, +\infty)$

Logo, f é contínua em $(-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (2, +\infty)$.
Para que f seja contínua em $\mathbb{R}$ *basta determinarmos para quais valores de m e n tornam a função f contínua em* $x = 1$ *e em* $x = 2$ *simultaneamente.*

$*$ *Pela definição de continuidade num ponto, temos* $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$;

$-$*Analisando a continuidade em* $x = 1$:

1) $f(1) = m + n + 3$
2) $\lim_{x \to 1} f(x)$;

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (mx^2 + 3x + n) = m + n + 3$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \cos(\pi x) = \cos \pi = -1$$

$*$ *Para que* $\lim_{x \to 1} f(x)$ *exista,* $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$, *logo* ...

$$m + n + 3 = -1$$
$$m + n = -4 \quad (I)$$

$-$*Analogamente, para* $x = 2$:

1) $f(2) = 2m + n$
2) $\lim_{x \to 2} f(x)$;

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (mx + n) = 2m + n$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (mx^2 + 3x + n) = 4m + n + 6$$

$* \, Para\ que\ \lim_{x\to 2} f(x)\ exista,\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)\,, logo\ ...$

$$2m + n = 4m + n + 6$$
$$2m = -6$$
$$m = -3$$

$* \, Portanto, para\ m = -3, \lim_{x\to 2} f(x)\ existe\ e\ \lim_{x\to 2} f(x) = -6 + n\ e\ f(2) = -6 + n$

$* \, Logo, f$ é $contínua\ em\ x = 2\ para\ m = -3;$

$\rightarrow Voltando$ à $equação\ (I), obtemos\ n = -4 - m \therefore n = -1. Para\ este\ valor\ de\ n$
$\lim_{x\to 1} f(x)\ existe\ e\ \lim_{x\to 1} f(x) = -1\ e\ f(1) = -1.$

$* \, Conclusão: para\ m = -3\ e\ n = -1\ a\ função\ f$ é $contínua\ em\ x = 1, x = 2\ e,$
$considerando\ a\ continuidade\ definida\ inicialmente, f$ é $contínua\ em\ (-\infty, +\infty),$
$ou\ seja, f$ é $contínua\ em\ \mathbb{R}.$

***Questão* 5.** *Se uma bola for empurrada ladeira abaixo, sobre um plano inclinado, a uma velocidade inicial de* $5\,m/s$ *, a distância que ela terá rolado, após t segundos será dada por* $s = 5t + 3t^2$.

a) Determine sua velocidade após $2s$.

Do Cálculo 1, a interpretação cinemática da derivada com relação ao movimento de corpos, nos mostra que a velocidade no instante t é dada pelo valor da derivada da função posição × tempo, ou seja,

$$\begin{aligned} v(t) = s'(t) &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{5(t+\Delta t) + 3(t+\Delta t)^2 - (5t + 3t^2)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{5t + 5\Delta t + 3t^2 + 6t\Delta t + 3\Delta t^2 - 5t - 3t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{5\Delta t + 6t\Delta t + 3\Delta t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta t(5 + 6t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} (5 + 6t + \Delta t) \\ v(t) &= 6t + 5 \end{aligned}$$

$* \, Em\ t = 2s, temos\ v(2) = 6(2) + 5 = 12 + 5 = 17\,m/s$

b) Quão longe ela estará do ponto de partida quando sua velocidade atingir $35\,m/s$?

$$v(t) = 35 \Rightarrow 6t + 5 = 35 \rightarrow 6t = 30 \therefore t = 5s$$
$$s(5) = 5(5) + 3(5)^2 = 25 + 75 = 100m.$$

$* \, A\ bola\ estará\ a\ 100m\ do\ ponto\ de\ partida\ quando\ sua\ velocidade\ atingir$
$35\,m/s.$

11.2 2ª Prova – 08 de Maio de 2015

Questão 1

$a)$ *As curvas* $y = x + ax + b$ *e* $y = cx - x^2$ *têm uma reta tangente em comum no ponto* $(1{,}0)$, *Determine* a, b *e* c.

$b)$ *Sabe − se que* $f(x-1) = g\big(h(x^2-1)\big)$, *que* $h(15) = 0$, $h'(15) = 1$ *e que* $g'(0) = 2$. *Encontre* $f'(3)$.

Questão 2.

$a)$ *Mostre que se a função* f *é a inversa da função* g, *então se tem* $g'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$
Seja $y = g(x)$, *e* $g^{-1}(x) = f(x)$, *então* $f\big(g(x)\big) = x$.

$b)$ *Suponha que* f *e* f^{-1} *sejam diferenciáveis, Mostre que a reta tangente à curva* $y = f(x)$ *no ponto* (a, b) *nunca é perpendicular à reta tangente à curva* $y = f^{-1}(x)$ *no ponto* (b, a).

Questão 3.

$a)$ *Determinem, caso existam, as equações das retas tangentes à curva* $x^2 + 4y^2 = 36$ *que passam pelo ponto* $(12{,}3)$.

$b)$ *Encontre* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^5)}{(1-e^x)x^4}$.

Questão 4.

$a)$ *Se* $f(x) = \dfrac{1}{\pi + (\operatorname{arctg} x)^2}$, *determine o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de* f *no ponto de abscissa igual a* 1.

$b)$ *Mostre que a curva* $y.\operatorname{tg}(x+y) = 4$ *não admite reta tangente horizontal.*
$*$ *Em outras palavras, mostre que* $y' \neq 0$ *para todo ponto pertencente à curva.*

Questão 5.

$a)$ *Mostre que* $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen}^4(x) + \cos^4 x] = \cos\left(4x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$b)$ *Mostre que se* $f(x) = \operatorname{arcsec} x$, *então* $f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

***Questão* 1**

(a) *As curvas* $y = x + ax + b$ *e* $y = cx - x^2$ *têm uma reta tangente em comum no ponto* $(1{,}0)$, *Determine* a, b *e* c.

$*$ *Se ambas as curvas possuem a mesma reta tangente no ponto* $(1{,}0)$ *implica dizer que esse ponto pertence às curvas e que a derivada nesse ponto é igual para ambas. Logo,*

1) *Condição para que o ponto* $P = (1{,}0)$ *pertença às curvas:*

$y_1 = x + ax + b$ $\qquad\qquad$ $y_2 = cx - x^2$
$0 = 1 + a + b$ $\qquad\qquad$ $0 = c - 1$
$a + b = -1$ $\qquad\qquad$ $c = 1 \quad \rightarrow \quad y_2 = x - x^2$

$*$ *Portanto, temos* $c = 1$ *e a condição* $a + b = -1$ $(eq.1)$

2) *Analisando o segundo critério: as derivadas nesse ponto são iguais para as curvas dadas.*

$y'_1 = 1 + a$ $\qquad\qquad$ $y'_2 = 1 - 2x$
$y'_1(1) = 1 + a$ $\qquad\qquad$ $y'_2(1) = 1 - 2 = -1$

Como $y'_1(1) = y'_2(1) \Rightarrow 1 + a = -1 \therefore a = -2$.
Voltando à $eq.1$, *obtemos* $a + b = -1 \rightarrow -2 + b = -1 \therefore b = 1$

$y_1 = x - 2x + 1$ $\qquad\qquad$ $y_2 = x - x^2$
$y_1 = -x + 1$

(b) *Sabe-se que* $f(x-1) = g\big(h(x^2-1)\big)$, *que* $h(15) = 0$, $h'(15) = 1$ *e que* $g'(0) = 2$. *Encontre* $f'(3)$.

$*$ *Derivando ambos os membros da igualdade pela Regra da Cadeia, obtemos:*

$$\frac{d}{dx}[f(x-1)] = \frac{d}{dx}\left[g\big(h(x^2-1)\big)\right]$$
$$[f'(x-1)].\frac{d}{dx}(x-1) = \left[g'\big(h(x^2-1)\big)\right].\frac{d}{dx}[h(x^2-1)]$$
$$f'(x-1) = g'\big(h(x^2-1)\big).h'(x^2-1).\frac{d}{dx}(x^2-1)$$
$$f'(x-1) = g'\big(h(x^2-1)\big).h'(x^2-1).[2x]$$

$f'(x-1) = f'(3) \Rightarrow x - 1 = 3 \therefore x = 4$. *Logo,*

$f'(3) = g'\big(h(4^2-1)\big).h'(4^2-1).[2.4]$
$f'(3) = g'\big(h(16-1)\big).h'(16-1).8$
$f'(3) = g'\big(h(15)\big).h'(15).8$
$f'(3) = g'(0).1.8$
$f'(3) = 2.8 = 16$

Questão 2.

(a) *Mostre que se a função* f *é a inversa da função* g*, então se tem* $g'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$

Seja $y = g(x)$, *e* $g^{-1}(x) = f(x)$ *, então* $f\big(g(x)\big) = x$.

$$f\big(g(x)\big) = x$$
$$\frac{d}{dx}\big[f\big(g(x)\big)\big] = \frac{d}{dx}[x]$$
$$f'\big(g(x)\big).g'(x) = 1$$
$$g'(x) = \frac{1}{f'\big(g(x)\big)}$$

$*$ *Como* $y = g(x)$, *então ...*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)}\ , com\ f'(y) \neq 0$$

(b)*Suponha que* f *e* f^{-1} *sejam diferenciáveis, Mostre que a reta tangente à curva* $y = f(x)$ *no ponto* (a, b) *nunca é perpendicular à reta tangente à curva* $y = f^{-1}(x)$ *no ponto* (b, a).

$*$ *A equação da reta tangente à curva* $y = f(x)$ *no ponto* (a, b) *e coeficiente angular* $m = f'(a)$ *e dada pela expressão*:

$$y - b = f'(a).(x - a)$$

$*$ *Com base no item anterior, se* $y = f(x)$ *e* $g(x) = f^{-1}(x)$*, então,*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

Logo,

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}\ , com\ f'(a) \neq 0$$

$*$ *A equação da reta tangente à curva* $y = f^{-1}(x)$ *no ponto* (b, a) *e coeficiente angular* $m = \dfrac{1}{f'(a)}$ *é dada pela expressão*:

$$y - a = \frac{1}{f'(a)}(x - b)$$

$*$ *Duas retas são ditas perpendiculares se* m_1 *e* m_2 *, coeficientes angulares das retas obedecem a relação* $m_1.m_2 = -1$.

Neste caso, $m_1 = f'(a)$ *e* $m_2 = \dfrac{1}{f'(a)}$ *. Logo,* $m_1.m_2 = 1$ *. Portanto, a reta tangente à curva* $y = f(x)$ *no ponto* (a, b) *nunca é perpendicular à reta tangente à curva* $y = f^{-1}(x)$ *no ponto* (b, a).

Questão 3.

(a) *Determinem, caso existam, as equações das retas tangentes à curva* $x^2 + 4y^2 = 36$ *que passam pelo ponto* $(12,3)$.

$* \, A \text{ equação de uma reta que passa pelo ponto } (12{,}3) \text{ e possue coeficiente angular } m$ $\text{é dada pela expressão}:$

$$y - 3 = m(x - 12)$$

$\text{Onde } m = y' \text{é a derivada da curva dada impllicitamente pela expressão}$ $x^2 + 4y^2 = 36.$

$* \, \text{Derivando implicitamente, temos}:$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4y^2) = \frac{d}{dx}(36)$$
$$2x + 8yy' = 0$$
$$y' = -\frac{x}{4y}$$

$\text{Substituindo na equação da reta}:$

$$y - 3 = -\frac{x}{4y}(x - 12)$$
$$4y^2 - 12y = -x^2 + 12x$$
$$x^2 + 4y^2 = 12x + 12y$$

$* \, \text{Se essa reta tangente é tangente à curva, então o termo em destaque representa}$ $\text{o ponto de tangencia. Logo,}$

$$36 = 12x + 12y$$
$$3 = x + y \quad (eq.1)$$

$* \, \text{Devemos verificar se existe algum ponto } P = (x, y) \text{ pertencente à curva tal que}$ $x + y = 3. \text{ Substituindo na expressão da curva}:$

$$x^2 + 4(3 - x)^2 = 36$$
$$x^2 + 4(9 - 6x + x^2) = 36$$
$$x^2 + 36 - 24x + 4x^2 = 36$$
$$5x^2 - 24x + 36 = 36$$
$$5x^2 - 24x = 0$$
$$x(5x - 24) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad e \quad x_2 = \frac{24}{5}$$

$* \, \text{Voltando à eq. 1, encontramos os ponto onde a reta tangente intersecta a curva}:$

$$y_1 = 3 \rightarrow A = (0{,}3) \qquad e \quad y_2 = -\frac{9}{5} \rightarrow B = \left(\frac{24}{5}, -\frac{9}{5}\right)$$

$* \, \text{Calculando os coeficiente angulars das retas tangete nos ponto } A \text{ e } B, \text{ obtemos}:$

$$m_1 = -\frac{x_1}{4y_1} = -\frac{0}{12} = 0 \quad (\text{Reta tangente horizontal!})$$

$$m_2 = -\frac{\frac{24}{5}}{4\left(-\frac{9}{5}\right)} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

$* \ Equações \ das \ retas \ tangentes$:

$t_1: \ y - 3 = 0(x - 12) \rightarrow \quad t_1: y = 3$
$t_2: y - 3 = \frac{2}{3}(x - 12) \rightarrow \ t_2: y = \frac{2}{3}x - 5$

$(b) Encontre \ \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x^5)}{(1 - e^x)x^4}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x^5)}{(1 - e^x)x^4} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\text{sen}(x^5)}{(1 - e^x)x^4} . \frac{x}{x}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{x . \text{sen}(x^5)}{(1 - e^x)x^5} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\text{sen}(x^5)}{x^5} . \frac{x}{(1 - e^x)}\right];$$

$* \ Suponhamos \ que \ esse \ limite \ de \ um \ produto \ seja \ o \ produto \ dos \ limites, desde \ que \ esses \ limites \ existam. Logo,$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\text{sen}(x^5)}{x^5} . \frac{x}{(1 - e^x)}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x^5)}{x^5} \times \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x}$$

$(1) \ \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x^5)}{x^5} \ ; \ \ seja \ \theta = x^5. Se \ x \to 0, então \ \theta \to 0. Logo,$
$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x^5)}{x^5} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = 1 \ (Limite \ fundamental \ trigonométrico)$

$$(2) \ \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x} = - \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = - \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^x - 1}{x}\right]^{-1} = - \left[\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}\right]^{-1} = -1$$

$* \ Portanto, como \ os \ limites \ existem, então \ o \ limite \ do \ produto \ pode \ ser \ escrito \ como \ o \ produto \ dos \ limites. Logo,$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x^5)}{(1 - e^x)x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x^5)}{x^5} \times \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x} = 1 \times (-1) = -1$$

Questão 4.

$(a) \ Se \ f(x) = \frac{1}{\pi + (\text{arctg} \, x)^2}, determine \ o \ coeficiente \ angular \ da \ reta \ normal \ ao \ gráfico \ de \ f \ no \ ponto \ de \ abscissa \ igual \ a \ 1.$

$* \ A \ questão \ pede, resumidamente, que \ determinemos \ m_N = -\frac{1}{f'(1)}.$

$f(x) = [\pi + (\text{arctg} \, x)^2]^{-1}$
$f'(x) = -1[\pi + (\text{arctg} \, x)^2]^{-2} . D_x[\pi + (\text{arctg} \, x)^2]$
$f'(x) = -\frac{1}{[\pi + (\text{arctg} \, x)^2]^2} . (2 \, \text{arctg} \, x) . \frac{1}{1 + x^2}$
$f'(1) = -\frac{1}{[\pi + (\text{arctg}(1))^2]^2} . (2 \, \text{arctg}(1)) . \frac{1}{1 + 1^2}$

$$f'(1) = -\frac{1}{\left[\pi + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right]^2} . 2\left(\frac{\pi}{4}\right) . \frac{1}{2}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{\left[\pi + \frac{\pi^2}{16}\right]^2} . \frac{\pi}{4}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{\left(\frac{16\pi + \pi^2}{16}\right)^2} . \frac{\pi}{4}$$

$$f'(1) = -\frac{\pi}{4.\left[\frac{(16\pi + \pi^2)^2}{256}\right]} = -\frac{\pi}{\left[\frac{(16\pi + \pi^2)^2}{64}\right]} = -\frac{64\pi}{(16\pi + \pi^2)^2}$$

$*$ *Logo, o coeficiente angular da reta normal no ponto de abscicssa* $x = 1$ é:

$$m_N = -\frac{1}{f'(1)} = \frac{(16\pi + \pi^2)^2}{64\pi}$$

(b) *Mostre que a curva* $y.\mathrm{tg}(x + y) = 4$ *não admite reta tangente horizontal.*
$*$ *Em outras palavras, mostre que* $y' \neq 0$ *para todo ponto pertencente à curva.*

Derivando implicitamente, temos:

$$\frac{d}{dx}[y.\mathrm{tg}(x + y)] = \frac{d}{dx}(4)$$
$$y'.\mathrm{tg}(x + y) + y.(1 + y')\sec^2(x + y) = 0$$
$$y' = -\frac{y.\sec^2(x + y)}{\mathrm{tg}(x + y) + y.\sec^2(x + y)}$$

Se um ponto pertence a curva então, $y.\mathrm{tg}(x + y) = 4 \rightarrow \mathrm{tg}(x + y) = \frac{4}{y}$;

$*$ *Da identidade trigonométrica:*

$$\mathrm{tg}^2(x + y) + 1 = \sec^2(x + y)$$
$$\frac{16}{y^2} + 1 = \sec^2(x + y)$$
$$\sec^2(x + y) = \frac{y^2 + 16}{y^2}$$

$*$ *Com esses resultados, temos:*

$$y' = -\frac{y.\frac{y^2 + 16}{y^2}}{\frac{4}{y} + y.\frac{y^2 + 16}{y^2}} = -\frac{\frac{y^2 + 16}{y}}{\frac{y^2 + 20}{y}} = -\frac{y^2 + 16}{y^2 + 20}$$

$* \; y' = 0 \Rightarrow y^2 + 16 = 0 \Rightarrow y^2 = -16 \;\; \therefore \nexists y \in \mathbb{R}; y^2 = -16.$

$*$ *Sendo assim, não existe nenhum ponto da curva tal que* $y' = 0$*, ou seja, não existe ponto onde a reta tangente é horizontal.*

Questão **5.**

(a) *Mostre que* $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen}^4(x)+\cos^4 x]=\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}^4(x)+\cos^4 x] &= \frac{d}{dx}[\operatorname{sen}^4 x]+\frac{d}{dx}[\cos^4 x]\\ &= 4\operatorname{sen}^3 x\,.\cos x-4\cos^3 x\,.\sin x\\ &= 4\operatorname{sen} x\,.\cos x\,[\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x]\\ &= 2\operatorname{sen}(2x)\,.[-\cos(2x)]\\ &= -2\operatorname{sen}(2x)\,.\cos(2x)\\ &= -\operatorname{sen}(4x)\end{aligned}$$

$*$ *Como* $\operatorname{sen}(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ *e* $\operatorname{sen}(x)=-\operatorname{sen}(-x)$, *temos*:

$-\operatorname{sen}(4x)=\operatorname{sen}(-4x)$; $\operatorname{sen}(-4x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-(-4x)\right)=\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Portanto,

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}^4(x)+\cos^4 x]=\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$$

(b) *Mostre que se* $f(x)=\operatorname{arcsec} x$, *então* $f'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

$*$ *Pela derivada da função inversa, temos*:

$g(x)=\sec x$ *e* $f(x)=g^{-1}(x)=\operatorname{arcsec} x$, *então*:

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$$
$$f'(x)=\frac{1}{\sec y\,.\operatorname{tg} y}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sec y\,.\sqrt{\sec^2 y-1}}$$

Se $y=f(x)=\operatorname{arcsec} x$, *então* $y=\operatorname{arcsec} x\Rightarrow x=\sec y$. *Portanto*,

$$f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$*$ ***Obs***: *essa expressão para* $f'(x)$ *é válida se, somente se*, $\operatorname{tg} y>0$, *ou seja*, *com* $0\leq y<\dfrac{\pi}{2}$ *ou* $\pi\leq y<\dfrac{3\pi}{2}$, *temos* $\operatorname{tg} y=+\sqrt{\sec^2 y-1}$.

11.3 2ª Prova – 09 de Maio de 2015

Questão 1.

$a)$ *Seja* f *uma função tal que* $f(3) = f'(3) = 1$ *e tal que* $g(x^9 - 1) = f\big(3.f(3x)\big)$. *Calcule* $g'(0)$.

$b)$ *Mostre que a soma das coordenadas das interseções com os eixos* X *e* Y *de qualquer reta tangente à curva* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ *é igual a* c.

Questão 2.

$a)$ *Seja* g *uma função duas vezes derivável e* f *uma função definida por* $f(x) = x.g(x^2)$. *Sabendo-se que* $g(2) = 2, g'(2) = \dfrac{1}{2}$ *e* $g''(2) = \dfrac{1}{4}$, *obtenha* $f'(\sqrt{2})$ *e* $f''(\sqrt{2})$.

$b)$ *Qual é a posição relativa da reta normal ao gráfico de* $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x}$, *no ponto em que* $x = 1$, *com relação ao gráfico da parábola* $y = x^2$.

Questão 3.

$a)$ *Mostre que a reta tangente à curva* $y = x^3$ *em qualquer ponto* (a, a^3) *intercepta a curva novamente em um ponto em que* $\dfrac{dy}{dx}$ *é o quádruplo do coeficiente angular da reta tangente em* (a, a^3).

$b)$ *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x[\cos(\operatorname{sen} x) - 1]}{\operatorname{sen}^2 x}$

Questão 4.

$a)$ *Encontre uma equação para a reta tangente à curva* $y = e^{\operatorname{sen} x}.\cos e^x + \cos 1$ *onde* $x = 0$.

$b)$ *Em que ponto a reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = 2^{\arccos\sqrt{x}}$, *no ponto de ordenada* $2^{\frac{\pi}{3}}$ *intercepta o eixo das abscissas.*

Questão 5.

$a)$ *Seja* $P: (a, b)$ *sobre a curva* $xy = 1$. *Determine as interseções da reta tangente à curva em* P *com os eixos coordenados e mostre que* P *é equidistante dessas interseções.*

$b)$ *Se* n *for um inteiro positivo, demonstre que*

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}^{n} x \,.\cos(nx)] = n\operatorname{sen}^{n-1}(x)\,.\cos[(n+1)x]$$

***Questão* 1.**

a) Seja f uma função tal que $f(3) = f'(3) = 1$ e tal que $g(x^9 - 1) = f(3.f(3x))$. Calcule $g'(0)$.

$$g(x^9 - 1) = f(3.f(3x))$$

$*$ *Derivando pela regra da cadeia ambos os membros da igualdade, temos:*

$$\frac{d}{dx}[g(x^9 - 1)] = \frac{d}{dx}[f(3.f(3x))]$$
$$g'(x^9 - 1).D_x[x^9 - 1] = [f'(3.f(3x))].D_x[3.f(3x)]$$
$$9x^8.g'(x^9 - 1) = 3.[f'(3.f(3x))].D_x[f(3x)]$$
$$9x^8.g'(x^9 - 1) = 3.[f'(3.f(3x))].f'(3x).3$$
$$9x^8.g'(x^9 - 1) = 9.[f'(3.f(3x))].f'(3x)$$
$$g'(x^9 - 1) = \frac{[f'(3.f(3x))].f'(3x)}{x^8}$$

$g'(x^9 - 1) = g'(0) \Rightarrow x^9 - 1 = 0 \Rightarrow x^9 = 1 \therefore x = 1.$

$$g'(0) = \frac{[f'(3.f(3))].f'(3)}{1^8} = \frac{[f'(3)].f'(3)}{1} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$$

b) Mostre que a soma das coordenadas das interseções com os eixos X e Y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

$*$ *Dado um ponto $P(a,b)$ pertencente à curva, então $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$*
O coeficiente angular m da reta tangente à essa curva é dado pela derivada da curva no ponto (a,b). Derivando implicitamente, temos:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(c^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}.y' = 0$$
$$y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$*$ *No ponto (a,b), $y' = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$.*

$\rightarrow$ *Equação da reta tangente no ponto (a,b) e coeficiente angular $m = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$:*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - b = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x - a)$$

$*$ *Interseções com os eixos X e Y:*

Para $x = 0$, obtemos:

$$y - b = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(0 - a) \rightarrow y - b = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \rightarrow y - b = \sqrt{ab} \;\therefore y = \sqrt{ab} + b$$

$Para\ y = 0, obtemos:$

$$0 - b = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x - a) \rightarrow \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = x - a \rightarrow \sqrt{ab} = x - a \therefore x = a + \sqrt{ab}$$

$* \ Logo, a\ soma\ (S)\ das\ coordenadas\ das\ interseções\ é\ dada\ pela\ expressão:$

$$S = \sqrt{ab} + b + a + \sqrt{ab} = a + 2\sqrt{ab} + b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$$

$* \ Como\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}, a\ soma\ das\ coordenadas\ é\ S = \left(\sqrt{c}\right)^2 = c.$

Questão 2.

$a)\ Seja\ g\ uma\ função\ duas\ vezes\ derivável\ e\ f\ uma\ função\ definida\ por$ $f(x) = x.g(x^2). Sabendo - se\ que\ g(2) = 2, g'(2) = \frac{1}{2}\ e\ g''(2) = \frac{1}{4}, obtenha$ $f'\left(\sqrt{2}\right)\ e\ f''\left(\sqrt{2}\right).$

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[x.g(x^2)]$$

$$f'(x) = g(x^2) + x.g'(x^2).2x$$
$$f'(x) = g(x^2) + 2x^2.g'(x^2)$$

$$\frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx}[g(x^2) + 2x^2.g'(x^2)]$$

$$f''(x) = 2x.g'(x^2) + 4x.g'(x^2) + 2x^2.g''(x^2).2x$$
$$f''(x) = 6x.g'(x^2) + 4x^3.g''(x^2)$$

$$f'\left(\sqrt{2}\right) = g\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right) + 2.\left(\sqrt{2}\right)^2.g'\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$$
$$f'\left(\sqrt{2}\right) = g(2) + 4.g'(2)$$
$$f'\left(\sqrt{2}\right) = 2 + 4.\frac{1}{2}$$
$$f'\left(\sqrt{2}\right) = 2 + 2$$
$$f'\left(\sqrt{2}\right) = 4$$

$$f''\left(\sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2}.g'\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right) + 4\left(\sqrt{2}\right)^3.g''\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$$
$$f''\left(\sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2}.g'(2) + 8\sqrt{2}.g''(2)$$
$$f''\left(\sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2}.\frac{1}{2} + 8\sqrt{2}.\frac{1}{4}$$
$$f''\left(\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$
$$f''\left(\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2}$$

$b)$ *Qual é a posição relativa da reta normal ao gráfico de* $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x}$, *no ponto em que* $x = 1$, *com relação ao gráfico da parábola* $y = x^2$.

$*$ *Primeiramente determinamos o ponto referente à abscissa* $x = 1$.

$$f(1) = \frac{\operatorname{arctg}(1)}{\operatorname{arccotg}(1)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = 1 \ ; \ \textit{ponto } (1,1)$$

$*$ *Esse ponto também pertence à parábola* $y = x^2$, *pois*, $1 = 1^2$.

A inclinação da reta normal ao gráfico de f *no ponto* $(1,1)$ *é dada pela expressão*:

$$m_N = -\frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}.\operatorname{arccotg} x - \left(-\frac{1}{1+x^2}\right).\operatorname{arctg} x}{(\operatorname{arccotg} x)^2} = \frac{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x}{(1+x^2).(\operatorname{arccotg} x)^2}$$

$$f'(1) = \frac{\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arccotg} 1}{(1+1^2).(\operatorname{arccotg} 1)^2} = \frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{2.\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

Logo, o coeficiente da reta normal é $m_N = -\dfrac{\pi}{4}$

Equação da reta normal ao gráfico de f *no ponto* $(1,1)$ *e coeficiente angular* $-\dfrac{\pi}{4}$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = -\frac{\pi}{4}(x-1)$$

Vamos verificar se essa reta normal possui algum ponto de interseção com a curva $y = x^2$, *além do ponto* $(1,1)$.

$$x^2 - 1 = -\frac{\pi}{4}(x-1)$$

$$x^2 + \frac{\pi}{4}x - \left(\frac{\pi}{4}+1\right) = 0$$

$$\Delta = \frac{\pi^2}{16} + \pi + 4$$

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{4}+2\right)^2$$

$$x = \frac{-\frac{\pi}{4} \pm \left(\frac{\pi}{4}+2\right)}{2}$$

$$x_1 = 1 \ \ e \ \ x_2 = -\frac{\pi}{4} - 1$$

$$P(1,1) \ \ e\ Q = \left(-\frac{\pi}{4} - 1, \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} + 1\right)$$

$*$ *Logo, a reta normal intercepta a parábola* $y = x^2$ *em dois pontos e, portanto, essa reta normal ao gráfico de* f *no ponto* $(1,1)$ *é secante em relação à parábola* $y = x^2$.

***Questão* 3.**

a) Mostre que a reta tangente à curva $y = x^3$ *em qualquer ponto* (a, a^3) *intercepta a curva novamente em um ponto em que* $\frac{dy}{dx}$ *é o quádruplo do coeficiente angular da reta tangente em* (a, a^3).

1º passo: determinar a equação da reta tangente no ponto (a, a^3).

Coeficiente angular da reta tangente $m = y' = 3x^2$; *no ponto* $(a, a^3), y' = 3a^2$.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - a^3 = 3a^2(x - a)$$
$$y = 3a^2x - 3a^3 + a^3$$
$$y = 3a^2x - 2a^3$$

2º passo: encontrar o segundo ponto onde essa reta intercepta a curva.

$$x^3 = 3a^2x - 2a^3$$
$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$$

∗ *Como* $x = a$ *é uma solução da equação, usando o dispositivo de Briot − Ruffini para abaixar o grau do polinômio, obtemos:*

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = (x - a)(x^2 + ax - 2a^2)$$
$$\Delta = a^2 + 8a^2 = 9a^2$$
$$x = \frac{-a \pm 3a}{2}$$
$$x_1 = a \quad x_2 = -2a$$

∗ *Portanto, o segundo ponto onde a reta intercepta a curva é o ponto* $(-2a, -8a^3)$.

3º passo: comparar o valor das derivadas nesses pontos.

$$m_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2a} = 3.(-2a)^2 = 3.(4a^2) = 4.(3a^2)$$

Como $m_1 = 3a^2$ *e* $m_2 = 4.(3a^2)$, *temos:*

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{4(3a^2)}{3a^2} = 4$$

Portanto, o coeficiente angular no ponto onde a reta tangente em (a, a^3) *intercepta novamente a curva é o quádruplo do coeficiente angular da reta tangente em* (a, a^3).

b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x[\cos(\operatorname{sen} x) - 1]}{\operatorname{sen}^2 x}$;

$$\lim_{x\to 0} \frac{x[\cos(\operatorname{sen} x) - 1]}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{x[\cos(\operatorname{sen} x) - 1]}{\operatorname{sen}^2 x} . \frac{\cos(\operatorname{sen} x) + 1}{\cos(\operatorname{sen} x) + 1}\right] =$$
$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{x[\cos^2(\operatorname{sen} x) - 1]}{(\operatorname{sen}^2 x)[\cos(\operatorname{sen} x) + 1]}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-x.\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen}^2 x)[\cos(\operatorname{sen} x) + 1]};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x.\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)}{(\operatorname{sen}^2 x)[\cos(\operatorname{sen}x)+1]}=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{x}{\cos(\operatorname{sen}x)+1}.\frac{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}^2 x}\right];$$

$*\ Suponhamos\ que\ esse\ limite\ de\ um\ produto\ seja\ o\ produto\ dos\ limites, desde\ que\ esses\ limites\ existam. Logo,$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x.\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)}{(\operatorname{sen}^2 x)[\cos(\operatorname{sen}x)+1]}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos(\operatorname{sen}x)+1}\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}^2 x};$$

$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos(\operatorname{sen}x)+1};\ \lim_{x\to 0}[\cos(\operatorname{sen}x)+1]=\cos 0+1=1+1=2.$

$*\ Como\ o\ limite\ do\ denominador\ é\ diferente\ de\ zero, então\ \ldots$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos(\operatorname{sen}x)+1}=\frac{\lim_{x\to 0}(-x)}{\lim_{x\to 0}[\cos(\operatorname{sen}x)+1]}=\frac{0}{2}=0.$$

$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\right]^2=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\right]^2;$

$*\ Seja\ \theta=\operatorname{sen}x\ ; Se\ x\to 0, então\ \theta\to 0. Logo,$

$$\left[\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\right]^2=\left[\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}\right]^2=1^2=1;\quad Limite\ fundamental\ trigonométrico!$$

$*\ Portanto, como\ os\ limites\ existem, então\ o\ limite\ do\ produto\ pode\ ser\ escrito\ como\ o\ produto\ dos\ limites. Logo,$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x[\cos(\operatorname{sen}x)-1]}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos(\operatorname{sen}x)+1}\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}^2 x}=0\times 1=0.$$

Questão 4.

$a)\ Encontre\ uma\ equação\ para\ a\ reta\ tangente\ à\ curva\ y=e^{\operatorname{sen}x}.\cos e^x+\cos 1\ onde\ x=0.$

$1^{\underline{o}}\ passo: determinar\ o\ ponto\ em\ questão:$

$y=e^{\operatorname{sen}0}.\cos e^0+\cos 1=e^0.\cos 1+\cos 1=\cos 1+\cos 1=2\cos 1$
$P(0{,}2\cos 1)$

$2^{\underline{o}}\ passo: Coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ P.$

$y'=(\cos x).e^{\operatorname{sen}x}.\cos e^x+e^{\operatorname{sen}x}.e^x.(-\operatorname{sen}e^x)$
$y'(0)=(\cos 0).e^{\operatorname{sen}0}.\cos e^0+e^{\operatorname{sen}0}.e^0.(-\operatorname{sen}e^0)$
$y'(0)=1.e^0.\cos 1-e^0.1.\operatorname{sen}1$
$y'(0)=\cos 1-\sin 1$

$3^{\underline{o}}\ passo: Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ P\ e\ coeficiente\ angular\ y'(0).$

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y - 2\cos 1 = (\cos 1 - \sin 1).(x - 0)$$
$$y = (\cos 1 - \sin 1)x + 2\cos 1$$

b) Em que ponto a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 2^{\arccos\sqrt{x}}$, *no ponto de ordenada* $2^{\frac{\pi}{3}}$ *intercepta o eixo das abscissas.*

1º *passo: encontrar o ponto da função* f, *tal que* $f(x) = 2^{\frac{\pi}{3}}$;

$2^{\arccos\sqrt{x}} = 2^{\frac{\pi}{3}}$; $\frac{\pi}{3} = \arccos\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \therefore x = \frac{1}{4}$;

2º *passo: encontrar a reta tangente à função* f *nesse ponto.*

Seja $u = \sqrt{x}$; $v = \arccos u$, *então* $y = f(v) = 2^v$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{df}{dx} = \frac{du}{dx}.\frac{dv}{du}.\frac{df}{dv}$$
$$f'(x) = u'(x).v'(u).f'(v)$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}.2^v.\ln 2$$
$$f'(x) = -\frac{2^{\arccos\sqrt{x}}.\ln 2}{(2\sqrt{x}).\sqrt{1-x}}$$
$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2^{\arccos\left(\frac{1}{2}\right)}.\ln 2}{\left(2.\frac{1}{2}\right).\sqrt{1-\frac{1}{4}}}$$
$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 2}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$$
$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2.2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 2}{\sqrt{3}} = -\frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 4}{\sqrt{3}}$$

$*$ *Equação da reta tangente no ponto* $\left(\frac{1}{4}, 2^{\frac{\pi}{3}}\right)$;

$$y - 2^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 4}{\sqrt{3}}.\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$*$ *A interseção com o eixo das abscissas ocorre quando* $y = 0$. *Logo,*

$$0 - 2^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 4}{\sqrt{3}}.\left(x - \frac{1}{4}\right)$$
$$-2^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 4}{\sqrt{3}}.\left(x - \frac{1}{4}\right)$$
$$\sqrt{3} = \ln 16.\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$x-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{\ln 4}$$
$$x=\frac{\sqrt{3}}{\ln 4}+\frac{1}{4}$$

O ponto onde a reta tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{1}{4},2^{\frac{\pi}{3}}\right)$ *intercepta o eixo das abscissas é o ponto* $P\left(\frac{\sqrt{3}}{\ln 4}+\frac{1}{4},0\right)$.

Questão 5.

a) Seja $P:(a,b)$ *sobre a curva* $xy=1$. *Determine as interseções da reta tangente à curva em P com os eixos coordenados e mostre que P é equidistante dessas interseções.*

$$y=\frac{1}{x}=x^{-1}$$
$$y'=-1.x^{-2}$$
$$y'=-\frac{1}{x^2}$$

$*$ *No ponto* $P(a,b), y'=-\frac{1}{a^2}$;

$*$ *Como o ponto P pertence à curva, então* $a.b=1\,;b=\frac{1}{a}$

Equação da reta tangente no ponto $P(a,b)$ *e coeficiente angular* $y'=-\frac{1}{a^2}$;

$$y-y_0=m(x-x_0)$$
$$y-b=-\frac{1}{a^2}(x-a)$$

$*$ *Interseções com os eixos coordenados:*

Para $x=0$, *obtemos:*

$$y-b=-\frac{1}{a^2}(-a)\to y-b=\frac{1}{a}\therefore y=\frac{1}{a}+b\Rightarrow y=b+b=2b$$

Para $y=0$, *obtemos:*

$$0-b=-\frac{1}{a^2}(x-a)\to x-a=a^2b\therefore x=a^2b+a\Rightarrow x=a(ab+1)=2a$$

Interseções $A(0,2b)$ *e* $B(2a,0)$;

Devemos provar que P é o ponto médio entre A e B. Portanto,

$$P=\left(\frac{0+2a}{2},\frac{2b+0}{2}\right)=\left(\frac{2a}{2},\frac{2b}{2}\right)=(a,b)$$

$*$ *Logo, P é equidistante das interseções*

$b)$ *Se n for um inteiro positivo, demonstre que*

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{sen}^{\mathrm{n}}\,x\,.\cos(nx)] = n\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}(x)\,.\cos[(n+1)x]$$

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{sen}^{\mathrm{n}}\,x\,.\cos(nx)] = n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}\,x\,.\cos x\,.\cos(nx) + \mathrm{sen}^{\mathrm{n}}\,x\,.\,n.\,[-\,\mathrm{sen}(nx)]$$

$$= n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}\,x\,.\cos x\,.\cos(nx) - n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n}}(x)\,.\,\mathrm{sen}(nx)$$

$$= n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}\,x\,.\cos x\,.\cos(nx) - n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}(x)\,.\,\mathrm{sen}(x)\,.\,\mathrm{sen}(nx)$$

$$= n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}\,x\,[\cos x\,.\cos(nx) - \mathrm{sen}(x)\,.\,\mathrm{sen}(nx)]$$

$$= n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}\,x\,.\cos(nx + x)$$

$$= n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}\,x\,.\cos[(n+1)x]$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{sen}^{\mathrm{n}}\,x\,.\cos(nx)] = n\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}(x)\,.\cos[(n+1)x]$$

11.4 3ª Prova – 16 de Outubro de 2015

Questão 1

$a)$ *Use diferenciação logarítmica para achar* y', *onde* $y = \sqrt[3]{(3x-1)\sqrt{2x+5}}$.

$b)$ *Encontre* $k \in \mathbb{R}$, *de modo que a equação* $\operatorname{arctg}(\operatorname{senh} x) + \arccos(\operatorname{tgh} x) = k$, *seja verdadeira para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Questão 2

$a)$ *Ache o coeficiente angular da reta que passa pelos dois pontos críticos da função* $y = \operatorname{sen}(4x) + \cos(4x)$, *com* $x \in (0,2\pi)$.

$b)$ *Um ponto de abscissa* P *se move ao longo da parábola* $y^2 = x, y \geq 0$, *de modo que sua abscissa aumenta* $4cm$ *por segundo. A projeção de* P *sobre o eixo* Ox *é o ponto* M. *Com que rapidez aumenta a área do triângulo* OPM *quando* P *está no ponto de abscissa* 9?

Questão 3

$a)$ *Determine a interseção da reta que tangencia o gráfico de* $y = \operatorname{tgh}(e^{\operatorname{sen} x})$ *no ponto em que* $x = 0$ *com o eixo* $- x$.

$b)$ *Um helicóptero da polícia está voando a* $150\ km/h$ *a uma altitude constante de* $0{,}5km$, *acima de uma rodovia reta. O piloto usa um radar para determinar que um carro em movimento está a uma distância de* $1{,}5km$ *do helicóptero, e que essa distância está diminuindo a* $250\ km/h$. *Determine a velocidade do carro.*

Questão 4

$a)$ *A resistência elétrica de um fio é proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional ao quadrado de seu diâmetro. Suponha que a resistência de um fio, de comprimento dado, é calculada a partir da medida do diâmetro, com uma possibilidade de erro relativo de* $0{,}01$. *Encontre o possível erro relativo no cálculo da resistência.*

$b)$ *Um foguete é lançado verticalmente para cima e, após t segundos ele está a s metros do solo, onde* $s(t) = 560t - 16t^2$ *e o sentido positivo é o de baixo para cima. Quanto tempo levará o foguete para atingir sua altura máxima?*

Questão 5

$a)$ *Mostre que a função* $f(x) = x + \ln(\cosh x) + \operatorname{senh} \pi$, *possui no máximo, uma raíz real.*

$b)$ *Mostre que, no intervalo* $(0,\pi)$, *o gráfico da função* $f(x) = \log_3[\log_5|\operatorname{sen} x|]$ *não possui reta tangente horizontal.*

***Questão* 1**

a) Use diferenciação logarítmica para achar y', onde $y = \sqrt[3]{(3x-1)\sqrt{2x+5}}$

$$\ln y = \ln\left[(3x-1)\sqrt{2x+5}\right]^{1/3}$$
$$\ln y = \frac{1}{3}\left[\ln(3x-1) + \ln(2x+5)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\ln y = \frac{1}{3}\left[\ln(3x-1) + \frac{1}{2}\ln(2x+5)\right]$$
$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(3x-1) + \frac{1}{6}\ln(2x+5)$$

Derivando ambos os membros, obtemos:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}.\frac{1}{(3x-1)}.3 + \frac{1}{6}.\frac{1}{(2x+5)}.2$$

$$y' = y\left[\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{3(2x+5)}\right]$$
$$y' = \sqrt[3]{(3x-1)\sqrt{2x+5}}\left[\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{3(2x+5)}\right]$$

b) Encontre $k \in \mathbb{R}$, de modo que a equação $\operatorname{arctg}(\operatorname{senh} x) + \arccos(\operatorname{tgh} x) = k$, *seja verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Seja $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{senh} x)$ *e* $g(x) = -\arccos(\operatorname{tgh} x)$, *então devemos encontrar k tal que,* $f(x) - g(x) = k$.

$*$ *Se $f - g$ é constante para todo $x \in (a,b)$ então $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo (a,b). Portanto, As funções f e g diferem por uma constante, ou seja* $f(x) - g(x) = k$.

$*$ *Analisando a função f, sabemos que* $D(\operatorname{arctg} x) = \mathbb{R}$, *porém o argumento em questão é o* $\operatorname{senh} x$ *cujo domínio* $D(\sinh x) = \mathbb{R}$ *e sua imagem* $Im(\operatorname{senh} x) = \mathbb{R}$, *portanto, f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.*

$*$ *Analisando a função g, sabemos que* $D(\arccos x) = [-1,1]$, *porém o argumento em questão é a* $\operatorname{tgh} x$ *cujo domínio é* $D(\operatorname{tgh} x) = \mathbb{R}$ *com imagem* $Im(\operatorname{tgh} x) = [-1,1]$ *Logo, g está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.*

$$f'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2 x}.\cosh x = \frac{1}{\cosh^2 x}.\cosh x = \frac{1}{\cosh x} = \operatorname{sech} x\ ;$$

$$g'(x) = -\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2 x}}\right).\operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sech}^2 x}}.\operatorname{sech}^2 x = \operatorname{sech} x\ ;$$

$*$ *Como $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, então para determinar a constante k basta aplicar qualquer valor de x. Usando $x = 0$, obtemos:*

$$f(0) - g(0) = k$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{senh} 0) + \arccos(\operatorname{tgh} 0) = k$$
$$\operatorname{arctg}(0) + \arccos(0) = k$$
$$0 + \frac{\pi}{2} = k$$
$$k = \frac{\pi}{2}$$

$*$ *Obs: as análises das funções f e g foram feitas para verificar se realmente o critério de verificação($x \in \mathbb{R}$) condiz com o domínio de ambas as funções, caso contrário não poderíamos afirmar esse valor de k para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Questão 2

a)Ache o coeficiente angular da reta que passa pelos dois pontos críticos da função $y = \operatorname{sen}(4x) + \cos(4x)$, com $x \in (0,2\pi)$.

$*$ *Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que, $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Como $y = f(x)$ é uma soma de funções contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}$, então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, $f'(x)\ \exists\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4\cos(4x) - 4\operatorname{sen}(4x)$$
$$f'(x) = 4[\cos(4x) - \operatorname{sen}(4x)]$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos(4x) = \operatorname{sen}(4x)$$

$*$ *Obs: há uma inconsistência no enunciado que explicarei no final da questão!*

$*$ *Lembrando que no intervalo $(0,2\pi)$ os arcos cujo seno é igual ao cosseno são $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$, portanto, temos:*

$$4x = \frac{\pi}{4} \quad e \ 4x = \frac{5\pi}{4}$$
$$x = \frac{\pi}{16} \quad e \ x = \frac{5\pi}{16}$$

$$y_1 = f\left(\frac{\pi}{16}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad P_1\left(\frac{\pi}{16}, \sqrt{2}\right)$$
$$y_2 = f\left(\frac{5\pi}{16}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \quad P_2\left(\frac{5\pi}{16}, -\sqrt{2}\right)$$

O coeficiente angular da reta que passa pelos dois pontos críticos é dado por,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}}{\frac{5\pi}{16} - \frac{\pi}{16}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{8\sqrt{2}}{\pi}$$

$*$ *Obs: os pontos encontrados não são os únicos pontos críticos de f no intervalo*

$(0,2\pi)$, *o argumento* $4x$ *pode assumir outros valores de arcos côngruos a* $\frac{\pi}{4}$ *ou* $\frac{5\pi}{4}$. *Ou seja,*

$$4x = \frac{\pi}{4} + k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}_+; k = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

$*$ *Por que isso? note que para* $k = 0$ *temos o primeiro número crítico* $x = \frac{\pi}{16}$, *para* $k = 7$ *temos* $x = \frac{29\pi}{16}$ *que também pertence ao intervalo* $(0,2\pi)$. *Portanto, temos* 8 *pontos críticos no intervalo dado.*

$*$ *A questão poderia ter sido mais objetiva ao solicitar um intervalo que contivesse apenas* 2 *pontos críticos consecutivos, ex:* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$*$ *Caso escolhêssemos os pontos com* $k = 1$ *e* $k = 2$, *nosso coficiente angular* m *seria igual a,*

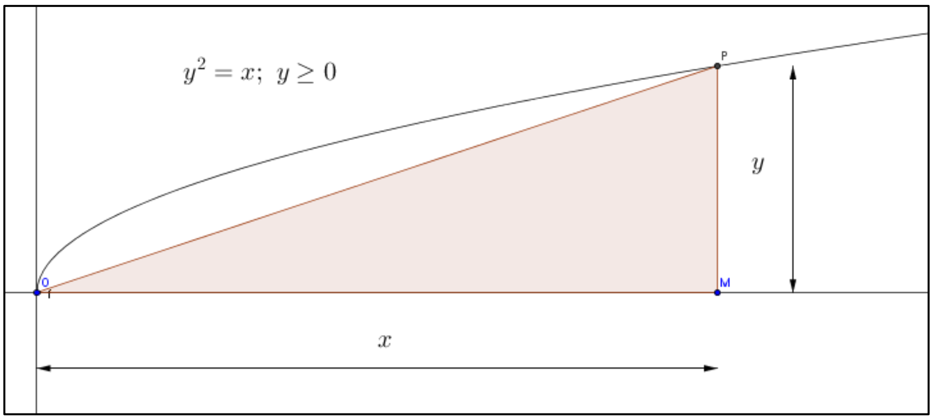
$$m = \frac{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})}{\frac{9\pi}{16} - \frac{5\pi}{16}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi}$$

$\rightarrow$ *Esses são os valores que o coeficiente angular pode assumir para dois pontos críticos consecutivos.*

---

b) Um ponto de abscissa P se move ao longo da parábola $y^2 = x, y \geq 0$, *de modo que sua abscissa aumenta* 4*cm por segundo. A projeção de P sobre o eixo Ox é o ponto M. Com que rapidez aumenta a área do triângulo OPM quando P está no ponto de abscissa* 9?

Ilustração do problema!



A *área do triângulo é dada por* $A = \dfrac{b.h}{2}$ *, onde b é o comprimento da base e h é a altura do triângulo, expressando em termos de x e y, obtemos:*

$$A = \frac{x.y}{2}\ ; mas\ y^2 = x \therefore y = \sqrt{x}$$
$$A = \frac{x\sqrt{x}}{2} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}$$

$*$ *Do enunciado temos que a taxa com a qual a abscissa aumenta é* $4cm$ *por segundo, ou seja,*

$$\frac{dx}{dt} = 4\, cm/s$$

$*$ *Queremos determinar a taxa de variação da área do triângulo OPM quando P estiver na abscissa* $x = 9$. *Pela Regra da Cadeia,*

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx} . \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{4} . 4$$
$$\frac{dA}{dt} = 3\sqrt{x}$$
$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=9} = 3\sqrt{9} = 3.3 = 9\, cm^2/s$$

Logo, a área do triângulo OPM está aumentando à taxa de $9\, cm^2/s$ *quando o P está no ponto de abscissa* 9.

Questão 3

a) *Determine a interseção da reta que tangencia o gráfico de* $y = \operatorname{tgh}(e^{\operatorname{sen} x})$ *no ponto em que* $x = 0$ *com o eixo* $- x$.

$*$ *Primeiramente determinamos o ponto do gráfico associado à abscissa* $x = 0$.

$$y = \operatorname{tgh}(e^{\operatorname{sen} 0}) = \operatorname{tgh}(e^0) = \operatorname{tgh}(1) = \frac{e - \frac{1}{e}}{e + \frac{1}{e}} = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}\ ; P\ (0, \operatorname{tgh} 1)\ ou\ \left(0, \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}\right);$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos x \,.\, e^{\operatorname{sen} x} . \operatorname{sech}^2(e^{\operatorname{sen} x})\ ;\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \operatorname{sech}^2(1) = \frac{4}{\left(e + \frac{1}{e}\right)^2} = \frac{4e^2}{(e^2 + 1)^2}$$

Equação da reta tangente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = \frac{4e^2}{(e^2 + 1)^2}(x - 0)$$

$* \; Como\ queremos\ determinar\ a\ interseção\ da\ reta\ com\ o\ eixo - x\ façamos\ y = 0.$

$$0 - \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = \frac{4e^2}{(e^2 + 1)^2}x$$

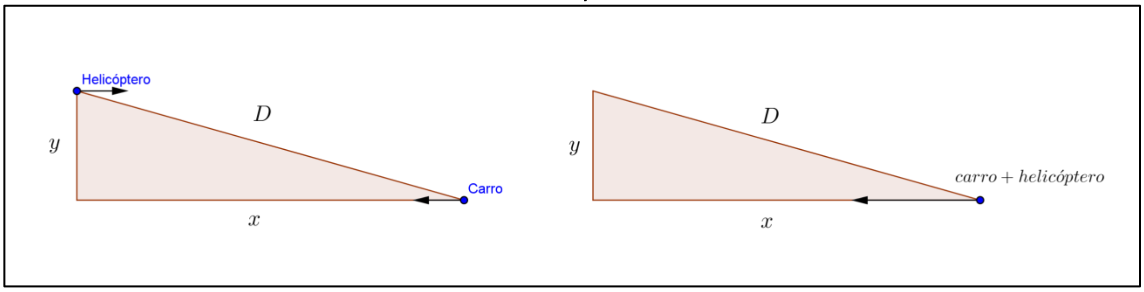
$$x = -\frac{(e^2 - 1)(e^2 + 1)^2}{4e^2(e^2 + 1)}$$

$$x = -\frac{(e^2 - 1)(e^2 + 1)}{4e^2}$$

$$x = -\frac{e^4 - 1}{4e^2}$$

$* \; Ponto\ de\ interseção\ com\ o\ eixo\ x\ é\ P = \left(-\frac{e^4 - 1}{4e^2}, 0\right).$

$b)$ *Um helicóptero da polícia está voando a* $150\ km/h$ *a uma altitude constante de* $0{,}5km$, *acima de uma rodovia reta. O piloto usa um radar para determinar que um carro em movimento está a uma distância de* $1{,}5km$ *do helicóptero, e que essa distância está diminuindo a* $250\ km/h$. *Determine a velocidade do carro.*



Do enunciado da questão, temos os seguintes dados:

$$\frac{dx_{hel}}{dt} = 150\ km/h \quad ; \left.\frac{dD}{dt}\right|_{D=1,5km} = 250\ km/h \quad ; altitude = y = 0{,}5km$$

A taxa de variação da distancia horizontal entre o helicóptero e o carro é dada pela expressão:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_{carro}}{dt} + \frac{dx_{hel}}{dt}$$

$*$ *Obs: por convenção, adotei a diminuição da distância entre o helicóptero e o carro sendo positiva. De tal modo, a distancia horizontal entre ambos possui uma velocidade relativa* $(v_{carro} + v_{helicóptero})$ *e como essa distância também está diminuindo* $\frac{dx}{dt}$ *(velocidade relativa) é positiva por essa convenção.*

Pela relação de triângulo temos,

$$D^2 = x^2 + y^2$$

Quando $D = 1{,}5km$ *e* $y = 0{,}5km$, *temos* $x = \sqrt{2}km$. *Por fim, derivando ambos os membros em relação ao tempo, obtemos:*

$$\frac{d}{dt}(D^2) = \frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(y^2)$$
$$2D.\frac{dD}{dt} = 2x.\frac{dx}{dt} + 2y.\frac{dy}{dt}$$

$* \; Como \; a \; altitude \; é \; constante \; \left(\frac{dy}{dt} = 0\right);$

$$D.\frac{dD}{dt} = x.\frac{dx}{dt}$$
$$1{,}5.(250) = \sqrt{2}.\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{750}{2\sqrt{2}} = \frac{750\sqrt{2}}{4} = \frac{375\sqrt{2}}{2} km/h$$

$$\frac{dx_{carro}}{dt} + \frac{dx_{hel}}{dt} = \frac{375\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{dx_{carro}}{dt} = \frac{375\sqrt{2}}{2} - 150$$
$$\frac{dx_{carro}}{dt} = v_{carro} = \frac{375\sqrt{2} - 300}{2} km/h \approx 115\, km/h$$

$*$ *Obs: a ilustração equivalente à direita foi feita em considerar que ambos, carro e helicóptero contribuem para a diminuição da distancia x. Logo, pode considerar uma variação única combinando suas velocidades.*

Questão 4

a) A resistência elétrica de um fio é proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional ao quadrado de seu diâmetro. Suponha que a resistência de um fio, de comprimento dado, é calculada a partir da medida do diâmetro, com uma possibilidade de erro relativo de 0,01. *Encontre o possível erro relativo no cálculo da resistência.*

$$R \propto l\,;\; R \propto \frac{1}{D^2}$$

Ou seja, podemos escrever uma expressão para R da forma:

$$R = \rho.\frac{L}{D^2}$$

Onde ρ é uma constante de proporcionalidade, L é o comprimento do fio e D é o diâmetro.

$*$ *Como ρ e L são constantes para esse caso, temos então $R(D)$.*
$*$ *O erro relativo no cálculo da resistência é dado por:*

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{dR}{R}$$

$$\frac{dR}{dD} = -2\rho.\frac{L}{D^3} \rightarrow dR = -2\rho.\frac{L}{D^3}dD \quad e \quad R = \rho.\frac{L}{D^2}$$

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{dR}{R} = \frac{-2\rho.\frac{L}{D^3}dD}{\rho.\frac{L}{D^2}} = -2.\frac{dD}{D}$$

$* \frac{dD}{D}$ *é o erro relativo da medida do diâmetro do fio, ou seja,* 0,01.

Logo, o erro relativo no cálculo da resistência $\frac{dR}{R} = -0{,}02$ *; considerando o valor absoluto temos um erro relativo de* 0,02 *no cálculo da resistência elétrica do fio.*

b) *Um foguete é lançado verticalmente para cima e , após t segundos ele está a s metros do solo, onde* $s(t) = 560t - 16t^2$ *e o sentido positivo é o de baixo para cima. Quanto tempo levará o foguete para atingir sua altura máxima?*

$*$ *Na altura máxima a velocidade do foguete é nula, ou seja,* $v(t) = 0$.
$*$ *Utilizando os conhecimentos do cálculo* 1, *sabemos que a derivada da posição em função do tempo é a função velocidade. Logo,*

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 560 - 32t$$
$$v(t) = 0 \Rightarrow 560 - 32t = 0 \therefore t = \frac{560}{32} = \frac{35}{2}s = 17{,}5s$$

$*$ *Portanto, o foguete atinge a altura máxima após* $17{,}5s$.

***Questão* 5**

a) *Mostre que a função* $f(x) = x + \ln(\cosh x) + \operatorname{senh}\pi$ *, possui no máximo, uma raíz real.*

$*$ *Obs: o argumento* $\cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, *logo o termo* $\ln(\cosh x)$ *está bem definido para* $x \in \mathbb{R}$.

$*$ Obs_2: *a função f é uma soma de funções contínuas e diferenciáveis em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, f é contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$ *Suponha que existem a e b* $\in \mathbb{R}$ *tais que* $f(a) = f(b) = 0$, *então pelo Teorema de Rolle, existe algum* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 1 + \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = 1 + \operatorname{tgh} x$$

Como a função $\operatorname{tgh} x$ *possui imagem no intervalo* $(-1{,}1)$ *então,* $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *Logo, f não admite duas raízes reais e por contradição, f possui, no máximo, uma raíz real.*

$b)$ *Mostre que, no intervalo* $(0,\pi)$, *o gráfico da função* $f(x) = \log_3[\log_5|\operatorname{sen} x|]$ *não possui reta tangente horizontal.*

$*$ *Em resumo devemos mostrar que não existe* $x \in D(f)$ *e* $x \in (0,\pi)$ *tal que* $f'(x) = 0$.

$*$ *Note que* $0 < |\operatorname{sen} x| \leq 1$ *no intervalo* $(0,\pi)$ *e, consequentemente,* $\log_5|\operatorname{sen} x| < 0$ *e, por fim,* $\log_3[\log_5|\operatorname{sen} x|]$ *não existe!*

$*$ *Se a própria função não está definida nesse intervalo que dirá dos pontos onde poderíamos ter ter alguma reta tangente horizontal.*

***Obs*: caso a escrita da função tenha sido equivocada, e $f(x)$ fosse, na verdade, $f(x) = \log_3|\log_5|\operatorname{sen} x||$, então podemos analisar melhor a situação!**

Fazendo as mesmas análises anteriores temos $f(x)$ *definida para todo* x *tal que* $|\operatorname{sen} x| \neq 0$ *e* $|\operatorname{sen} x| \neq 1$, *ou seja, para* $x \in (0,\pi)$, $x \neq \frac{\pi}{2}$.

$f(x) = \log_3|\log_5(\operatorname{sen} x)|$; $0 < \operatorname{sen} x \leq 1$ *em* $(0,\pi) \therefore |\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x$

$\log_5(\operatorname{sen} x) < 0 \therefore |\log_5(\operatorname{sen} x)| = -\log_5(\operatorname{sen} x)$

$$f(x) = \log_3(-\log_5(\operatorname{sen} x))$$

$$f'(x) = \frac{1}{-\log_5(\operatorname{sen} x)\,.\ln 3}\cdot\frac{d}{dx}[-\log_5(\operatorname{sen} x)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 3\,.\log_5(\operatorname{sen} x)}\cdot\frac{\cos x}{\ln 5\,.\operatorname{sen} x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\ln 3\,.\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln 5}\,.\ln 5\,.\operatorname{sen} x} \qquad ;\ *\ \log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}\ \textit{(mudança de base!)}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x\,.\ln(\operatorname{sen} x)\,.\ln 3}$$

Para o intervalo $(0,\pi)$ *com* $x \neq \frac{\pi}{2}$ *o denominador está definido e, portanto,* $\operatorname{sen} x\,.\ln(\operatorname{sen} x)\,.\ln 3 \neq 0$. *Nos resta então analisar a possibilidade de que o numerador venha a ser zero para contradizer o enunciado. Porém,* $\cos x = 0$ *implica em* $x = \frac{\pi}{2}$ *que não pertence ao domínio da função* f.

Conclusão, $f'(x) \neq 0\ \forall x \in (0,\pi)$ *e com isso,* f *não possui reta tangente horizontal nesse intervalo.*

11.5 3ª Prova – 17 de Outubro de 2015

Questão 1

a) Começando na origem, um ponto P se move ao longo da parábola $y = x^2$, de maneira que sua coordenada x aumenta $3\ cm/s$. Seja Q o ponto que determina sobre o eixo Ox a reta que passa por $(0,-4)$ e P. Descubra a velocidade de Q quando P está no ponto $(1,1)$.

b) Encontre os pontos de extremos absolutos e relativos da função $f(x) = 2 - \operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x$, no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Questão 2

a) Determine, caso existam, os pontos nos quais a curva $y = \dfrac{1 + \operatorname{senh} x}{1 + \cosh x}$ possui reta tangente horizontal.

b) Use o Teorema do Valor Médio para provar a desigualdade seguinte:

$$|\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)| < |a - b|\ ; \quad a \neq b$$

Questão 3

a) Use a diferenciação logarítmica para achar a derivada de $y = (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$

b) Dê um valor aproximado para $\cos 59°15'$.

Questão 4

a) Há uma reta que tangencia o gráfico da função $f(x) = x^{\log_3 x}$ no ponto em que $x = 1$. Verifique se essa reta toca em algum ponto do gráfico de $g(x) = 1 + \cosh x$.

b) Mostre que a função $f(x) = \dfrac{9}{4}x^2 - 4\cos x - \dfrac{1}{8}\cos(2x) + \cos 17$ possui no máximo um ponto crítico.

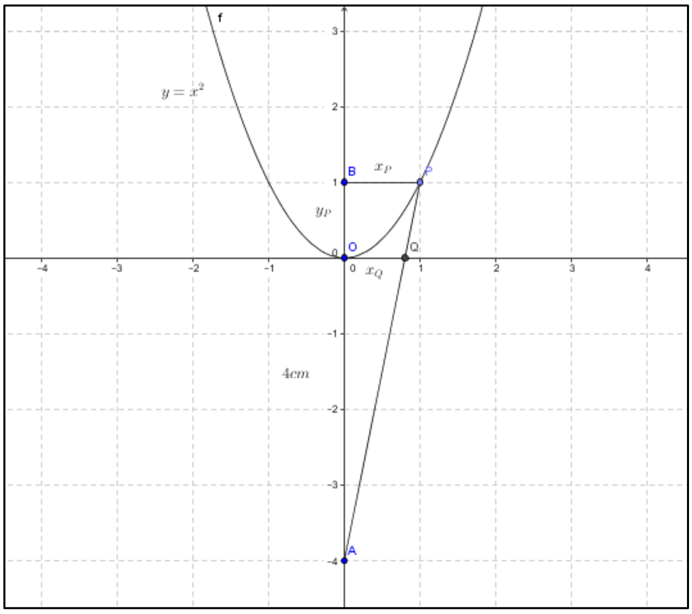
Questão 5

a) A distância de uma locomotiva à estação de partida é dada pela fórmula $s(t) = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2$. Determine o instante depois do qual, pela primeira vez, a locomotiva passa a se aproximar da origem.

b) Uma lâmpada está acesa no topo de um poste de 30m de altura. Um objeto é jogado da mesma altura de um ponto a 10m de distância da lâmpada, de modo que sua altura num instante t, em segundos, é dada por $h(t) = \mathbf{30} - \dfrac{9{,}8}{2}t^2$. Quão rápido a sombra do objeto se move no chão um segundo depois?

***Questão* 1**

(a) *Começando na origem, um ponto* P *se move ao longo da parábola* $y = x^2$, *de maneira que sua coordenada* x *aumenta* $3\ cm/s$. *Seja* Q *o ponto que determina sobre o eixo* Ox *a reta que passa por* $(0,-4)$ *e* P. *Descubra a velocidade de* Q *quando* P *está no ponto* $(1,1)$.



Pela ilustração do problema, temos por relação de triângulo:

$$\frac{x_Q}{4} = \frac{x_P}{4 + y_P}$$

Como P *é um ponto da parábola* $y = x^2$, *então* $y_P = x_P^2$. *Logo,*

$$x_Q = \frac{4x_P}{4 + x_P^2}$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{dx_Q}{dt} = \frac{dx_Q}{dx_P} \cdot \frac{dx_P}{dt}$$

$$\frac{dx_Q}{dx_P} = \frac{4(4 + x_P^2) - 4x_P(2x_P)}{(4 + x_P^2)^2}$$

$$\frac{dx_Q}{dt} = \frac{4(4 + x_P^2) - 4x_P(2x_P)}{(4 + x_P^2)^2}.(3)$$

Quando P *está no ponto* $(1,1)$ $x_P = 1$. *Logo,*

$$\frac{dx_Q}{dt} = \frac{4(4 + 1^2) - 4.1.(2.1)}{(4 + 1^2)^2}.(3)$$

$$\frac{dx_Q}{dt} = \frac{20 - 8}{25}.(3) = \frac{36}{25}cm/s$$

$*$ *Logo, o ponto* Q *se move à velocidade de* $\frac{36}{25}cm/s$ *quando* P *está no ponto* $(1,1)$.

(b) *Encontre os pontos de extremos absolutos e relativos da função* $f(x) = 2 - \operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x$, *no intervalo* $[-\pi, \pi]$.

$*$ *Como a função f é uma soma de funções contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}$, então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua em $[-\pi, \pi]$ e diferenciável em $(-\pi, \pi)$.*

Aplicando o Método do Intervalo Fechado na função f em $[-\pi, \pi]$, temos:

1) *Os valores de f nos extremos do intervalo;*
$f(-\pi) = 2 - \operatorname{sen}^2(-\pi) + 3\cos^2(-\pi) = 2 - 0^2 + 3.(-1)^2 = 5$
$f(\pi) = 2 - \operatorname{sen}^2 \pi + 3\cos^2 \pi = 2 - 0^2 + 3.(-1)^2 = 5$

2) *Os valores de f nos números críticos;*

$*$ *Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

$\rightarrow$ *Como f e diferenciável em $(-\pi, \pi)$, nos resta saber onde $f'(x) = 0$. Então,*

$f'(x) = -2\operatorname{sen} x . \cos x - 6\operatorname{sen} x . \cos x$
$f'(x) = -8\sin x . \cos x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x . \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \quad ou \\ \cos x = 0 \end{cases} \therefore x = \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \operatorname{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 - (-1)^2 + 3.(0) = 1$$
$$f(0) = 2 - \operatorname{sen}^2 0 + 3\cos^2 0 = 2 - 0^2 + 3.(1)^2 = 5$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - (1)^2 + 3.(0) = 1$$

3) *Comparando os valores obtidos, temos:*

$f(-\pi) = f(\pi) = 5$ é o valor máximo absoluto, enquanto que $f(0) = 5$ é um valor máximo local ou relativo, por ocorrer em um número crítico.

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ é o valor mínimo local e absoluto da função no intervalo.

Questão 2

(a) *Determine, caso existam, os pontos nos quais a curva* $y = \dfrac{1 + \operatorname{senh} x}{1 + \cosh x}$ *possui reta tangente horizontal.*

$*$ *Obs: analisando o denominador da função temos $\cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e, portanto, $1 + \cosh x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Como o numerador não apresenta restrição alguma, concluímos que o domínio da função $y = f(x)$ é $D(f) = \mathbb{R}$.*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\cosh x\,(1 + \cosh x) - \operatorname{senh} x\,(1 + \operatorname{senh} x)}{(1 + \cosh x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x + \cosh x - \operatorname{senh} x}{(1 + \cosh x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{1 + \cosh x - \operatorname{senh} x}{(1 + \cosh x)^2}$$

$*\ Como\ o\ denominador\ de\ f'\ está\ definido\ para\ x \in \mathbb{R}, então, se\ f\ possui\ reta\ tangente\ horizontal\ em\ x = a\ implica\ dizer\ que\ f'(a) = 0. Portanto, f'(x) = 0\ resulta\ em\ ...$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \cosh x - \operatorname{senh} x = 0$$

$$1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0$$
$$1 + e^{-x} = 0$$

$*\ Note\ que\ e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}, logo\ não\ há\ solução\ para\ equação\ acima.$
$Consequentemente\ \nexists x \in \mathbb{R}; f'(x) = 0, ou\ seja, f\ não\ possui\ reta\ tangente\ horizontal\ em\ nenhum\ ponto\ do\ seu\ domínio.$

$(b)\ Use\ o\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ para\ provar\ a\ desigualdade\ seguinte:$

$$|\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)| < |a - b|\ ;\ \ a \neq b$$

$Com\ a \neq b\ podemos\ dividir\ toda\ a\ desigualdade\ por\ |a - b| \neq 0. Logo,$

$$\left|\frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{a - b}\right| < 1$$
$$-1 < \frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{a - b} < 1$$

$*\ Seja\ f(x) = \ln(\cosh x)\,, então\ f'(x) = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \operatorname{tgh} x\,. Contudo, sabemos\ que\ a\ imagem\ da\ função\ \operatorname{tgh} x\ \text{é}\ Im(\operatorname{tgh} x) = (-1,1). Logo,$

$$-1 < f'(x) < 1$$
$*\ Como\ \cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(\cosh x)\ \ está\ definido\ para\ todos\ os\ reais.$
$Logo, f\ \text{é}\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [a, b]\ e\ diferenciável\ no\ intervalo\ (a, b).$
$Então, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio, existe\ algum\ x \in (a, b)\ tal\ que:$

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{b - a}$$
$$-1 < f'(x) < 1$$
$$-1 < \frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{b - a} < 1$$
$$-1 < \frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{-(a - b)} < 1$$

$$1 > \frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{a - b} > -1$$

$* \, E \, essa \, desigualdade \, remete \, à \, expressão,$

$$\left|\frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{a - b}\right| < 1$$
$$|\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)| < |a - b|$$

***Questão* 3**

(a) *Use a diferenciação logarítmica para achar a derivada de* $y = (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$

$* \, Aplicando \, o \, logarítmo \, natural \, em \, ambos \, os \, membros \, da \, igualdade, temos:$

$$\ln y = \ln(\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$$
$$\ln y = \frac{1}{\ln x} . \ln(\ln x)$$

$* \, Por \, diferenciação \, logarítmica, derivando \, em \, relação \, a \, x, obtemos:$

$$\frac{y'}{y} = \left[-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} . \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} . \frac{1}{\ln x} . \frac{1}{x}\right]$$
$$\frac{y'}{y} = \left[-\frac{1}{x(\ln x)^2} . \ln(\ln x) + \frac{1}{x . (\ln x)^2}\right]$$
$$y' = y . \frac{1}{x(\ln x)^2} [1 - \ln(\ln x)]$$
$$y' = (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}} . \frac{1}{x(\ln x)^2} [1 - \ln(\ln x)]$$

(b) *Dê um valor aproximado para* $\cos 59°15'$.

$Seja \, f(x) = \cos x \, , conhecemos \, o \, valor \, do \cos 60° \, \, e \, queremos \, estimar \, o \, valor$
$do \cos 59°15' \, . Então,$

$$1° = 60' = \frac{\pi}{180} rad \, ; logo, 45' = \frac{3}{4} . \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{720} rad \lll 1 rad$$

$Com \, relação \, a \, diferenciais, para \, pequenas \, variações \, de \, x, temos$

$$\Delta y \approx dy$$
$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) . dx$$

$* \, Nesse \, caso \, x = \frac{\pi}{3} rad, \Delta x = dx = -\frac{3\pi}{720} rad \, e \, f'(x) = -\operatorname{sen} x \, \, para \, x = \frac{\pi}{3} rad.$

$$f\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{720}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) . \left(-\frac{3\pi}{720}\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{720}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{3\pi}{720}\right)$$

$$\cos(59°15') - \frac{1}{2} \approx -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{3\pi}{720}\right)$$
$$\cos(59°15') \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\pi}{240} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{480}$$

Questão 4

(a) *Há uma reta que tangencia o gráfico da função* $f(x) = x^{\log_3 x}$ *no ponto em que* $x = 1$. *Verifique se essa reta toca em algum ponto do gráfico de* $g(x) = 1 + \cosh x$.

$f(1) = 1^{\log_3 1} = 1^0 = 1$; *ponto de tangencia* $(1,1)$.

$\ln f(x) = \ln x^{\log_3 x}$
$\ln f(x) = \log_3 x \,.\ln x$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x.\ln 3}.\ln x + \log_3 x \,.\dfrac{1}{x}$
$f'(x) = f(x)\left[\dfrac{1}{x.\ln 3}.\ln x + \dfrac{1}{x}.\log_3 x\right]$
$f'(1) = f(1)\left[\dfrac{1}{\ln 3}.\ln 1 + \dfrac{1}{1}.\log_3 1\right]$
$f'^{(1)} = 1[0 + 0] = 0.$

Equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ *no ponto* $(1,1)$;
$$y - 1 = 0(x - 1)$$
$$y = 1$$

Verificando se a reta $y = 1$ *intercepta o gráfico de* $g(x) = 1 + \cosh x$, *temos*:

$$g(x) = 1$$
$$1 + \cosh x = 1$$
$$\cosh x = 0$$
$*$ *Note que* $\cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, *logo não há solução para a equação acima e, consequentemente, a reta que tangencia* $f(x)$ *no ponto* $(1,1)$ *não toca o gráfico de* $g(x)$.

(b) *Mostre que a função* $f(x) = \dfrac{9}{4}x^2 - 4\cos x - \dfrac{1}{8}\cos(2x) + \cos 17$ *possui no máximo um ponto crítico.*

Obs: a função f *é uma soma de funções contínuas e diferenciáveis em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *também é contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$.

$*$ *Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *tal que* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe. Por essa definição, analisando a função* f *temos apenas a possibilidade de* $f'(x) = 0$.

$*$ *Suponha que* f *possui dois pontos críticos em* a *e* b *tal que* $f'(a) = f'(b) = 0$. *Então, pelo Teorema de Rolle existe algum* $x \in (a, b)$; $f''(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{9}{2}x + 4\operatorname{sen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$$
$$f''(x) = \frac{9}{2} + 4\cos x + \frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$f''(x) = \frac{9 + 8\cos x + \cos(2x)}{2}$$
$$f''(x) = \frac{2\cos^2 x + 8\cos x + 8}{2}$$
$$f''(x) = \cos^2 x + 4\cos x + 8$$

$*$ *Façamos* $f''(x) = 0$, *obtemos*:

$$\cos^2 x + 4\cos x + 8 = 0$$

$$\Delta = 16 - 32 = -16 \ \ (\Delta < 0)$$

Logo, não há solução para $f''(x) = 0$ *e, por contradição, como* f *não pode ter* 2 *números críticos,* f *possui no máximo* 1 *número crítico associado à um ponto crítico.*

Questão 5

(*a*) *A distância de uma locomotiva à estação de partida é dada pela fórmula* $s(t) = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2$. *Determine o instante depois do qual, pela primeira vez, a locomotiva passa a se aproximar da origem.*

$*$ *Depois de* $t = 0$, *queremos determinar quando* $s'(t) = 0$, *pois, isso implica dizer que a locomotiva estará voltando à estação.*

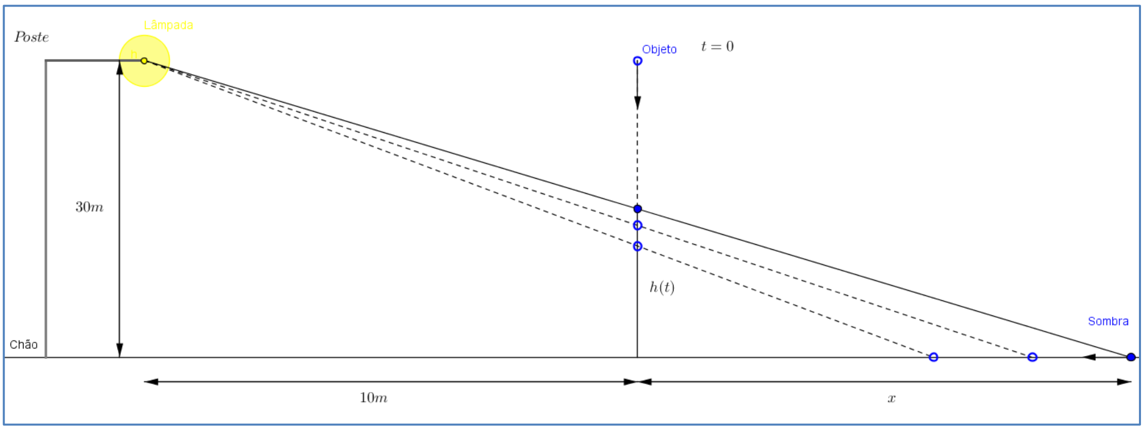
$$s'(t) = 0 \, , t \neq 0$$
$$12t^3 - 132t^2 + 288t = 0$$
$$12t(t^2 - 11t + 24) = 0$$
$$\Delta = (-11)^2 - 4(1)(24)$$
$$\Delta = 121 - 96$$
$$\Delta = 25$$

$$t = \frac{11 \pm 5}{2} \therefore t_1 = 8s \ \ e \ \ t_2 = 3s$$

$*$ *Logo, a locomotiva passa a se aproximar da origem em* $t = 3s$, *depois de passar pela primeira vez pela estação.*

(*b*) *Uma lâmpada está acesa no topo de um poste de* 30*m de altura. Um objeto é jogado da mesma altura de um ponto a* 10*m de distância da lâmpada, de modo que sua altura num instante t, em segundos, é dada por* $h(t) = \mathbf{30} - \frac{9{,}8}{2}t^2$. *Quão rápido a sombra do objeto se move no chão um segundo depois?*

Ilustração do problema:



$*$ *A velocidade com a qual a sombra se move no chão é numericamente igual a variação da distância x indicada na figura.*

Por semelhança de triângulo, temos:

$$\frac{30}{h} = \frac{10 + x}{x}$$
$$10h + xh = 30x$$
$$x(h - 30) = -10h$$
$$x = -\frac{10h}{h - 30}$$

Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dx}{dh} = -\left[\frac{10(h - 30) - 10h.(1)}{(h - 30)^2}\right] = \frac{300}{(h - 30)^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = -9{,}8t$$

Reunindo as expressões e substituindo na Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{300}{(h - 30)^2} . 9{,}8t$$

Quando $t = 1s$*, temos* $h = h(1) = 30 - 4{,}9$*. Logo,*

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{300}{(-4{,}9)^2} . 9{,}8$$
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{600}{4{,}9} m/s$$

11.6 4ª Prova – 13 de Novembro de 2015

Questão 1

$a)$ *Uma função* f é *tal que* $f'(x) = x^3 - 1$ *e a reta* $2x + y + 1 = 0$ é *tangente ao seu gráfico. Encontre* $f(2)$.

$b)$ *Determine as assíntotas do gráfico de* $f(x) = \begin{cases} e^x - 2, & x \leq 0 \\ \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}, & x > 0 \end{cases}.$

Questão 2

Dada a função $f(x)$, *determine*:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} \ ; \ f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \ ; \ f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$a)$ *As assíntotas horizontais, verticais e oblíquas, se existirem.*

$b)$ *Os intervalos onde* f é *crescente e onde* f é *decrescente, e os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*

$c)$ *Os intervalos onde o gráfico de* f é *côncavo para cima e onde* é *côncavo para baixo.*

Questão 3

$a)$ *Os vértices de um losango são os pontos* $A = (0,1)$, $B = (2x, 1)$, $C = (x, 0)$ *e* $D = (x, f(x))$, *onde* $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, *com* $x > 0$. *Determine os vértices do losango de forma que sua área seja mínima.*

$b)$ *Determine os pontos de inflexão da curva* $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$; $D(f) = \mathbb{R}_+^*$

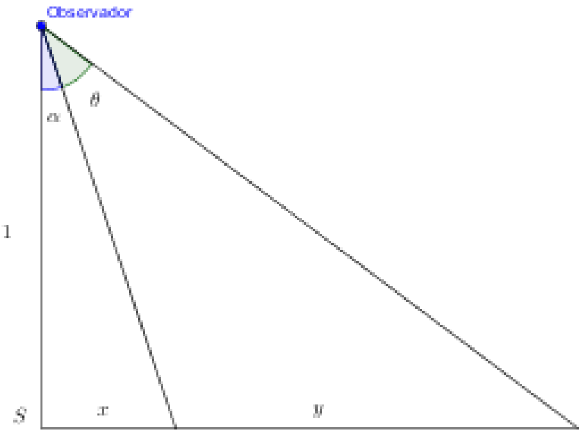
Questão 4. *Calcule os seguintes limites*:

$a)$ $\lim_{t \to \infty} \left[t . \ln\left(1 + \frac{3}{t}\right) \right]$

$b)$ $\lim_{y \to 0^+} [\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}}$

Questão 5

Um observador permanece em um ponto P, *distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto* S *da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo* θ *de visão do observador entre os corredores.* [*Dica*: *Maximize* $\operatorname{tg}\theta$] .



Questão 1

a) Uma função f é tal que $f'(x) = x^3 - 1$ e a reta $2x + y + 1 = 0$ é tangente ao seu gráfico. Encontre $f(2)$.

Se a reta $2x + y + 1 = 0$ é tangente ao gráfico de f, então existe algum x no domínio de f tal que $f'(x)$ é igual ao coeficiente angular da reta tangente.

$f'(x) = x^3 - 1\,;\quad y = -2x - 1$ (*coeficiente angular* $= -2$)

$f'(x) = 2 \Longrightarrow x^3 - 1 = -2 \;\; \Rightarrow x^3 = -1 \;\therefore\; x = -1$

Logo, a reta $2x + y + 1 = 0$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = -1$. Para $x = -1$, obtemos pela equação da reta $y = 1$. Portanto, o ponto $P = (-1,1)$ pertence ao gráfico da função f.

A antiderivada mais geral de $f'(x) = x^3 - 1$ é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x + C$$

Como $P = (-1,1)$ pertence a função, temos:

$$1 = \frac{1}{4} + 1 + C \therefore C = -\frac{1}{4}$$

Logo, $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x - \frac{1}{4}$.

$f(2) = \frac{1}{4}(2)^4 - 2 - \frac{1}{4} = \frac{16}{4} - 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \quad ; \quad f(2) = \frac{7}{4}.$

b) Determine as assíntotas do gráfico de $f(x) = \begin{cases} e^x - 2, & x \leq 0 \\ \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}, & x > 0 \end{cases}.$

Analisando as sentenças que formam a função f, temos $(e^x - 2)$, uma função contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, contínua em $(-\infty, 0)$.

Contudo, temos $\left(\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}\right)$, uma função racional contínua para $x \in \mathbb{R}; x^2 - 4 \neq 0$, ou seja, $x \neq 2$. Obs: $x = -2$ não pertence ao domínio dessa sentença!

$*$ *Obs*: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,;\;\; \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad e \;\; f(0) = -1$

$\rightarrow$ *Assíntotas Verticais*:

Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$Pela\ definição\ de\ assíntota\ vertical, devemos\ procurar\ onde\ a\ função\ f$ é $descontínua.$

$\rightarrow$ $Note\ que\ x = 0$ não é $uma\ assíntota\ vertical, embora\ f\ seja\ descontínua\ em$ $x = 0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\ \ e\ \ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\overbrace{x^3 - x}^{\substack{6\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-2)}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}\underbrace{(x+2)}_{\substack{\downarrow\\ 4}}} = -\infty$$

$*\ Obs: se\ x \to 2^-, então\ x < 2\ e, portanto, x - 2 < 0.$

$Logo, a\ reta\ x = 2$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f.$

$\rightarrow$ $Assíntotas\ Horizontais:$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ y = L$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f\ se$ $ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (e^x - 2) = \lim_{x\to -\infty} e^x - \lim_{x\to -\infty} 2 = 0 - 2 = -2$$

$Logo, a\ reta\ y = -2$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f.$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} \overset{L'H}{\longrightarrow}= \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - 1}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{6x}{2} = +\infty.$$

$\rightarrow$ $Assíntota\ Obliqua:$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ y = ax + b$ é $uma\ assíntota\ obliqua\ ao\ gráfico\ de\ f\ se,$ $somente\ se,$

$$\lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$A\ segunda\ sentença\ de\ f(x)\ pode\ ser\ reescrita\ como: \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4} = x + \dfrac{3x}{x^2 - 4}.$

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^3 - x}{x^2 - 4} - x\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{x^2 - 4} \overset{L'H}{\longrightarrow} \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{2x} = 0$$

$Portanto, a\ reta\ y = x$ é $uma\ assíntota\ oblíqua\ ao\ gráfico\ de\ f.$

$*\ Caso\ f\ admita\ uma\ assíntota\ oblíqua\ para\ a\ primera\ sentença\ devemos\ ter$ $a = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} \neq 0.\ Calculando, temos:$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - 2}{x} \overset{L'H}{\longrightarrow}= \lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$

$Logo, y = x$ é a única $assíntota\ oblíqua\ ao\ gráfico\ de\ f.$

Questão 2

Dada a função $f(x)$, determine:

$$f(x)=\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}\ ;\ f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}\ ;\ f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

Antes de responder os itens ... $D(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$;

Interseções com os eixos:

$$f(0)=1\ ;\quad f(x)=0\Rightarrow 2x^2+x-1=0\Rightarrow 2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0\ \therefore\ x=\frac{1}{2}$$

Pontos de interseção $A=(0,1)$ *e* $B=\left(\frac{1}{2},0\right)$; *Obs:* $x=-1\notin D(f)$.

a) As assíntotas horizontais, verticais e oblíquas, se existirem.

→ *Assíntotas Verticais:*

Dizemos que a reta $x=a$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* f *se ocorrer um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty\quad ou\quad \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$$

Pela definição de assíntota vertical, devemos procurar onde a função f *é descontínua.*

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{2x^2+x-1}^{\uparrow\ 2}}{\underbrace{(x-1)}_{\downarrow\ 0^+}\underbrace{(x+1)}_{\downarrow\ 2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\overbrace{2x^2+x-1}^{\uparrow\ 2}}{\underbrace{(x-1)}_{\downarrow\ 0^-}\underbrace{(x+1)}_{\downarrow\ 2}}=-\infty$$

Portanto, a reta $x=1$ *é uma assíntota vertical ao gráfico da função* f.

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{x-1}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}.$$

$*$ *Obs: se* $x\to -1$ *então* $x\neq -1$ *e, portanto,* $x+1\neq 0$.

$(*)$ *Logo, a reta* $x=-1$ *não é assíntota vertical ao gráfico de* f.

$\rightarrow$ *Assíntotas Horizontais*:

Dizemos que a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de* f *se ocorrer um dos seguintes casos*:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0-0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0-0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2.$$

Logo, a reta $y = 2$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de* f.

$\rightarrow$ *Assíntota Oblíqua*:

Dizemos que a reta $y = ax + b$ *é uma assíntota obliqua ao gráfico de* f *se, somente se*,

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

$*$ *Caso* f *admita uma assíntota oblíqua devemos ter* $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0.$

Calculando, temos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Portanto, f *não possui assíntota oblíqua.*

$b)$ *Os intervalos onde* f *é crescente e onde* f *é decrescente, e os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0\,, \forall x \in \mathbb{R}; x \neq 1.$$

$Portanto, f$ é $sempre\ decrescente\ em\ (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$
$*$ *Como não há mudança de comportamento da função (sempre decresce),*
não existem pontos de máximo e mínimo relativos.

c) Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

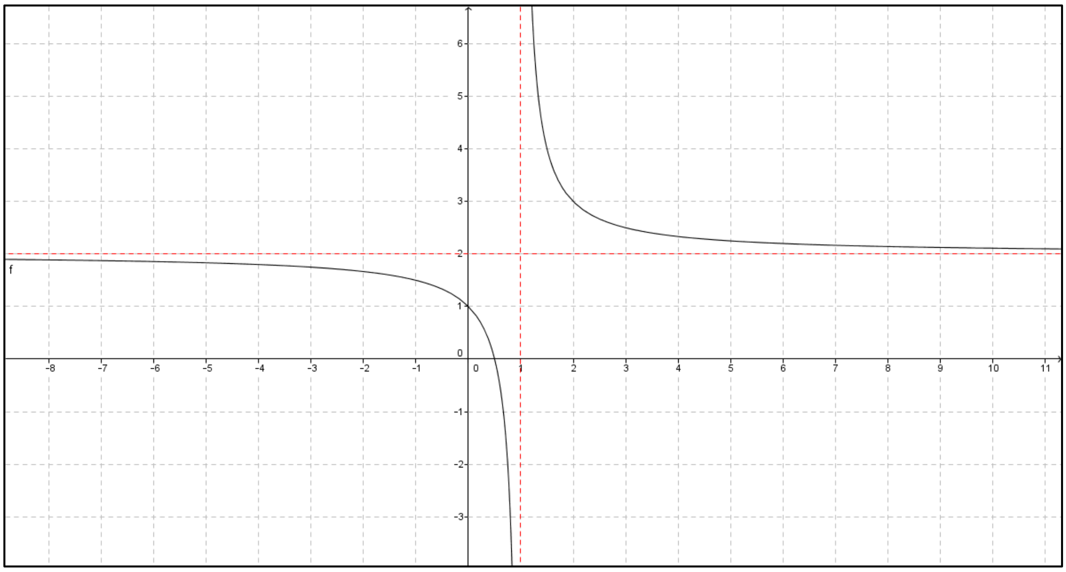
$- - - - - - - - - - (1) + + + + + + + + + +\qquad (x-1)^3$

$- - - - - - - - - - (1) + + + + + + + + + +\qquad f''(x) = \ 2/(x-1)^3$

Com a análise acima, concluimos que:

f possui C.V.C em $(1,+\infty)$ e $\qquad *$ *C.V.C (Concavidade Voltada para Cima)*
f possui C.V.B em $(-\infty,-1) \cup (-1,1)$; $*$ *C.V.B (Concavidade Voltada para Baixo)*

Embora haja mudança na direção da concavidade em $x = 1$, note que
$x = 1 \notin D(f)$ e, portanto, não existem pontos de inflexão no gráfico de f.



Questão 3

a) Os vértices de um losango são os pontos $A = (0,1)\,, B = (2x,1), C = (x,0)$ e $D = (x, f(x))$, onde $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, com $x > 0$. Determine os vértices do losango de forma que sua área seja mínima.

Sobre um losango sabemos que suas diagonais são perpendiculares.
Observando os vértices A, B, C e D, notamos que A e B estão sobre a mesma reta $y = 1$, e que C e D estão sobre um única reta vertical com equação $x = a$.

Logo, as diagonais do losango são os segmentos $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$.

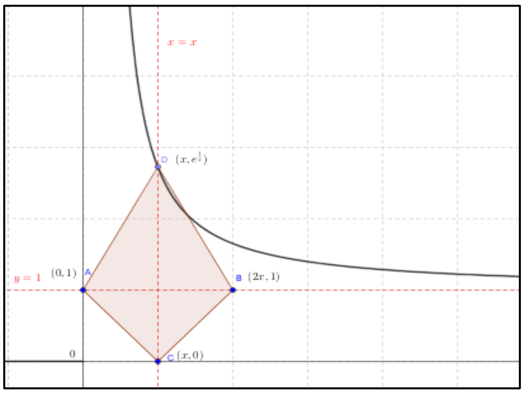
$*$ *Obs*: *B é o ponto simétrico de A em relação ao segmento* $\overline{CD}$.

$$\text{Área do Losango: } A = \frac{D \times d}{2}$$

Como desconhecemos a priori quem são as diagonais maior e menor, apenas considere a área como a metade do produto dos tamanhos das diagonais.

$$d_1 = d(A,B) = 2x$$
$$d_2 = d(C,D) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$A(x) = \frac{d_1 \times d_2}{2} = \frac{2x \times e^{\frac{1}{x}}}{2} = xe^{\frac{1}{x}}$$



Encontrar o valor que de x que minimiza a área do losango é encontra o número crítico associado ao ponto de mínimo relativo da função $A(x)$. *Logo,*

$$A'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x.\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$A'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$A'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \therefore x = 1.$$

Analisando o comportamento (sinal) de $A'(x)$, *temos*:

$+ + + + + + + + + + + + + + + + \quad e^{\frac{1}{x}}$
$(0) - - - - (1) + + + + + + + + + \quad x - 1$
$(0) + + + + + + + + + + + + + + \quad x$
$(0) - - - - (1) + + + + + + + + + \quad A'(x)$

Com a análise acima concluimos que $x = 1$ *é um número crítico associado ao ponto de mínimo local ou relativo da função* $A(x)$ *e, portanto, para* $x = 1$ *a área do losango determinado pelos vértices A, B, C e D é mínima.*

$$A = (0,1)\,; B = (2,1)\,; C = (1,0) \;\; e \; D = (1,e)\,; \quad A_{mín} = e$$

b) Determine os pontos de inflexão da curva $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$; $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-\frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x)=\frac{2x^{\frac{3}{2}}-(x-1)3x^{\frac{1}{2}}}{4x^3}=\frac{-x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}}{4x^3}=\frac{\sqrt{x}(3-x)}{4x^3}$$

Analisando a concavidade da função f, temos:

$(0)+++++++++++++$ $\quad\sqrt{x}$
$(0)++++++(3)------$ $\quad(3-x)$
$(0)+++++++++++++$ $\quad 4x^3$
$(0)++++++(3)------$ $\quad f''(x)$

Com a análise acima observamos a mudança na direção da concavidade em $x=3$ que pertence ao domínio da função f e, portanto, em $x=3$ temos um ponto de inflexão.

$$f(3)=\frac{3+1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\quad;\quad P.I=\left(3,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

***Questão* 4.** *Calcule os seguintes limites:*

$a)\ \lim_{t\to\infty}\left[t.\ln\left(1+\frac{3}{t}\right)\right]$; *indeterminação do tipo* "$\infty\times 0$"

$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{t}\right)}{\frac{1}{t}}$; *Com essa manipulação algébrica, temos a indeterminação* "$\frac{0}{0}$"

Aplicando a Regra de L'Hôspital, temos:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{t}\right)}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{3}{t}\right)}.\left(-\frac{3}{t^2}\right)}{-\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-\frac{3}{t^2+3t}}{-\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{t^2+3t}=\lim_{t\to\infty}\frac{6t}{2t+3}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6}{2}=3.$$

$b)\ \lim_{y\to0^+}[\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}}$; *indeterminação do tipo* "1^∞"

$$\lim_{y\to0^+}[\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}}=\lim_{y\to0^+}e^{\ln[\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}}}=e^{\lim_{y\to0^+}\ln[\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}}};$$

$\rightarrow$ *Calculando o limite do expoente, temos:*

$$\lim_{y\to 0^+} \ln[\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^2}\ln[\cos(2y)] = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln[\cos(2y)]}{y^2} \text{ ; } indeterminação \text{ "}\frac{0}{0}\text{"}$$

Aplicando a Regra de L'Hôspital, temos:

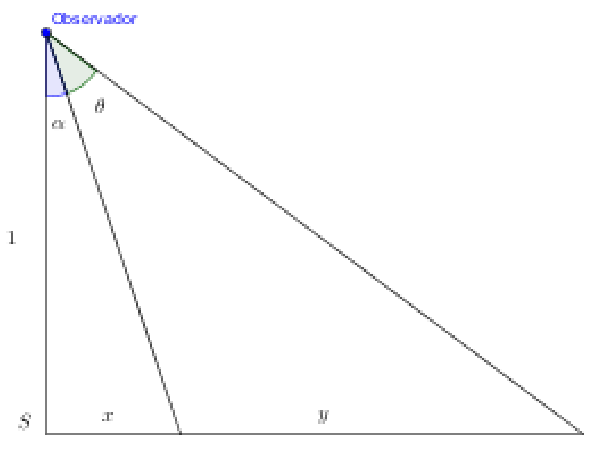
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln[\cos(2y)]}{y^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{-2\,\mathrm{sen}(2y)}{\cos(2y)}}{2y} = \lim_{y\to 0^+} -\frac{\mathrm{tg}(2y)}{y} = \lim_{y\to 0^+} -2\sec^2(2y) = -2.$$

Logo,

$$\lim_{y\to 0^+} [\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}} = e^{\lim_{y\to 0^+} \ln[\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Questão 5

Um observador permanece em um ponto P, distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto S da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo θ de visão do observador entre os corredores. [*Dica: Maximize* $\mathrm{tg}\,\theta$] .



O corredor mais rápido percorre o triplo da distância que o outro corredor, ou seja, se este último percorre x, o mais rápido percorre $3x$ no mesmo intervalo de tempo. Portanto, $y + x = 3x \Rightarrow y = 2x.$ *; obs:* $x > 0$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x}{1} = x \quad ; \quad \mathrm{tg}(\alpha+\theta) = \frac{x+y}{1} = x + y = 3x \text{ ; } \mathrm{tg}(\alpha+\theta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\theta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,.\,\mathrm{tg}\,\theta} \text{ ;}$$

$$\frac{x + \mathrm{tg}\,\theta}{1 - x.\mathrm{tg}\,\theta} = 3x \implies x + \mathrm{tg}\,\theta = 3x - 3x^2\,\mathrm{tg}\,\theta \implies \mathrm{tg}\,\theta\,(1 + 3x^2) = 2x.$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{2x}{1+3x^2} \text{ ; } Seja\ f(x) = \frac{2x}{1+3x^2}$$

Lembremos a função tangente é ímpar e que $f(x) = -f(-x)$, ou seja, f também

$é\ uma\ função\ ímpar.$

$$f'(x) = \frac{2(1+3x^2) - 2x(6x)}{(1+3x^2)^2} = \frac{2(1-3x^2)}{(1+3x^2)^2}$$

$$(0) + + + + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - - - - \quad f'(x)$$

$Logo, em\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}\ temos\ um\ ponto\ de\ máximo\ local\ ou\ relativo.$

$Contudo, observe\ que\ f(0) = 0\ e\ f\ é\ crescente\ em\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ e, portanto,$
$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > f(0)\ e, consequentemente, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \geq f(x), \forall x \geq 0. Logo, em\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$temos\ um\ valor\ máximo\ absoluto\ da\ função\ f.$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\left(1/\sqrt{3}\right)}{1 + 3\left(1/\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\left(1/\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

$\theta = \frac{\pi}{6}\ \ é\ o\ valor\ máximo\ do\ ângulo\ de\ visão\ do\ observador\ entre\ os\ corredores.$

11.7 4ª Prova – 14 de Novembro de 2015

Questão 1

a) Sabe-se que o gráfico de uma função f passa pelo ponto $(0,1)$ e que $f''(x) = 3x^2$ e $f'(-1) = 0$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto em que $x = 2$.

b) Determine as assíntotas do gráfico $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x-1}, & x < 1 \\ \operatorname{tgh} x, & x \geq 1 \end{cases}$.

Questão 2

Dada a função $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$. Determine:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)}{x^2 - 4x + 3} \; ; \; f''(x) = \frac{-2(x^2 - 4x + 5)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

a) As assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

b) Os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente e os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.

c) Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.

Questão 3

a) Considere as parábolas $y_1 = -x^2 + 4$ e $y_2 = x^2 - 4$. Determine o raio da circunferência centrada na origem e tangente às curvas dadas.

b) A função gaussiana tem a forma $f(x) = a.e^{-\frac{(x-b)^2}{8}}$, onde a e b são constantes positivas. Determine os valores de a e b, de modo que f tenha máximo local em $(2,3)$.

Questão 4

a) $\lim_{x \to 1^+} \left[(x-1) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$

b) $\lim_{x \to \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

Questão 5

A resistência de uma viga retangular é o produto da largura pelo quadrado da altura de sua seção transversal. Determine as dimensões da viga mais resistente que podemos cortar de um cilindro de madeira de raio r.

Questão 1

a) Sabe − se que o gráfico de uma função f passa pelo ponto $(0,1)$ e que $f''(x) = 3x^2$ e $f'(-1) = 0$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto em que $x = 2$.

A antiderivada mais geral de $f''(x)$ é dada por $f'(x) = x^3 + C$.
Sabemos que $f'(-1) = 0 \Longrightarrow (-1)^3 + C = 0 \Longrightarrow -1 + C = 0 \therefore C = 1$.

$f'(x) = x^3 + 1$; a antiderivada mais geral de $f'(x)$ é $f(x)$ dada por:

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x + K$; como o gráfico de f passa pelo ponto $(0,1) \Rightarrow f(0) = 1$.

$f(0) = K \therefore K = 1.$; $\quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x + 1$

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto em que $x = 2$.

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$f(2) = \frac{1}{4}(2)^4 + 2 + 1 = \frac{16}{4} + 3 = 4 + 3 = 7$
$f'(2) = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$

$$y - 7 = 9(x - 2)$$
$$y = 9x - 11$$

b) Determine as assíntotas do gráfico $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}, & x < 1 \\ \operatorname{tgh} x, & x \geq 1 \end{cases}$.

Analisando as sentenças que formam a função f, temos $\left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}\right)$, uma função racional e, portanto, contínua onde está definida, ou seja, $\forall x \in \mathbb{R}; x \neq 1$, e como esta sentença é válida para $x < 1$ então f é contínua em $(-\infty, 1)$.

A segunda sentença é a função hiperbólica $\operatorname{tgh} x$ contínua em $\mathbb{R}$ e, por ser válida em $x \geq 1$, temos que f é contínua em $(1, +\infty)$.

$*$ O único número x no domínio de f que não garantimos a continuidade é para $x = 1$.

$\rightarrow$ Assíntotas Verticais:

Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Pela definição de assíntota vertical, devemos procurar onde a função f é descontínua. Neste caso, vamos verificar se a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical, uma vez que, $x = 1$ é o único número do domínio de f em que nada temos a respeito da continuidade.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \operatorname{tgh} x = \operatorname{tgh} 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{x^2+x+1}^{\substack{3\\ \uparrow}}}{\underbrace{x-1}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = -\infty$$

Obs: se $x \to 1^-$, então $x < 1$ e, portanto, $x - 1 < 0$

Como a condição $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

→ Assíntotas Horizontais:

Dizemos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \overset{L'H}{\longrightarrow}= \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{2e^x} = 1.$$

Logo, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1}{x-1} \overset{L'H}{\longrightarrow}= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{1} = \lim_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty.$$

→ Assíntota Obliqua:

Dizemos que a reta $y = ax + b$ é uma assíntota obliqua ao gráfico de f se, somente se,

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

A primeira sentença de $f(x)$ pode ser reescrita como:

$$\frac{x^2+x+1}{x-1} = (x+2) + \frac{3}{x-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2+x+1}{x-1} - (x+2)\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x-1} = 0.$$

Logo, a reta $y = x + 2$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f.

Caso a função f admita uma assíntota oblíqua para $x > 1$, *devemos ter* $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$. *Calculando, temos*:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\operatorname{tgh} x}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{x}_{\substack{\downarrow\\ \infty}}} = 0$$

Portanto, a reta $y = x + 2$ *é a única assíntota oblíqua ao gráfico da função f.*

Questão 2

Dada a função $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$. *Determine*:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)}{x^2 - 4x + 3} \; ; \; f''(x) = \frac{-2(x^2 - 4x + 5)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$\rightarrow$ *Antes de responder os itens ...* $D(f) = x \in \mathbb{R}; x^2 - 4x + 3 > 0$;

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \implies x < 1 \text{ ou } x > 3.$$

Portanto, $D(f) = x \in \mathbb{R}; x < 1 \text{ ou } x > 3$.

Interseções com os eixos:

$f(0) = \ln 3$; $f(x) = 0 \implies \ln(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 1$

$x^2 - 4x + 2 = 0 \implies x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \therefore x_1 = 2 + \sqrt{2}$ *e* $x_2 = 2 - \sqrt{2}$;

Pontos de interseção com os eixos: $A = (0, \ln 3)$; $B = (2 + \sqrt{2}, 0)$ *e* $C = (2 - \sqrt{2}, 0)$.

a) As assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

$\rightarrow$ *Assíntotas Verticais*:

Dizemos que a reta $x = a$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de f se ocorrer um dos seguintes casos*:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Como f é contínua onde está definida, ou seja, em $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ *devemos verificar se as retas* $x = 1$ *e* $x = 3$ *são assíntotas ao gráfico de f. Uma vez que f não está definida em* $(1,3)$, *então só podemos calcular* $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 3^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln \underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}} = -\infty$$

$Portanto, a\ reta\ x = 1$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f.$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \ln \underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}} = -\infty$$

$Portanto, a\ reta\ x = 3$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f.$

$\rightarrow Assíntotas\ Horizontais:$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ y = L$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln \underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{\substack{\downarrow \\ \infty}} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln \underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{\substack{\downarrow \\ \infty}} = \infty$$

$Portanto,$ não há $assíntotas\ horizontais\ ao\ gráfico\ da\ função\ f.$

$b)Os\ intervalos\ onde\ f$ é $crescente\ e\ onde\ f$ é $decrescente\ e\ os\ pontos\ de\ máximo\ e\ mínimo\ relativos, caso\ existam.$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)}{x^2 - 4x + 3}$$

$Elaborando\ o\ estudo\ de\ sinal\ da\ primeira\ derivada, temos:$

$$\begin{array}{ll}
------\ ----(2)++++++++++ & 2(x-2) \\
+++++(1)-----\ ----(3)+++++ & x^2-4x+3 \\
-----(1)-----\ ----(3)+++++ & f'(x)
\end{array}$$

Obs: $o\ intervalo\ em\ destaque\ (1,3)$ não é $levado\ em\ consideração\ para\ o\ estudo\ da\ função\ f\ em\ razão\ do\ domínio\ de\ f.$

$Com\ a\ análise\ acima, temos:$

f é $crescente\ em\ (3, +\infty)\ e\ f$ é $decrescente\ em\ (-\infty, 1)$

$*\ Pela\ análise\ acima, concluímos\ que\ f$ não $possui\ números\ críticos\ associados\ a\ valores\ de\ máximo\ ou\ mínimo\ relativo, pois\ x = 1\ e\ x = 3\ embora\ f'(1)\ e\ f'(3)$ não $existam, eles$ não $pertencem\ ao\ domínio\ da\ função.$

$c)$ *Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.*

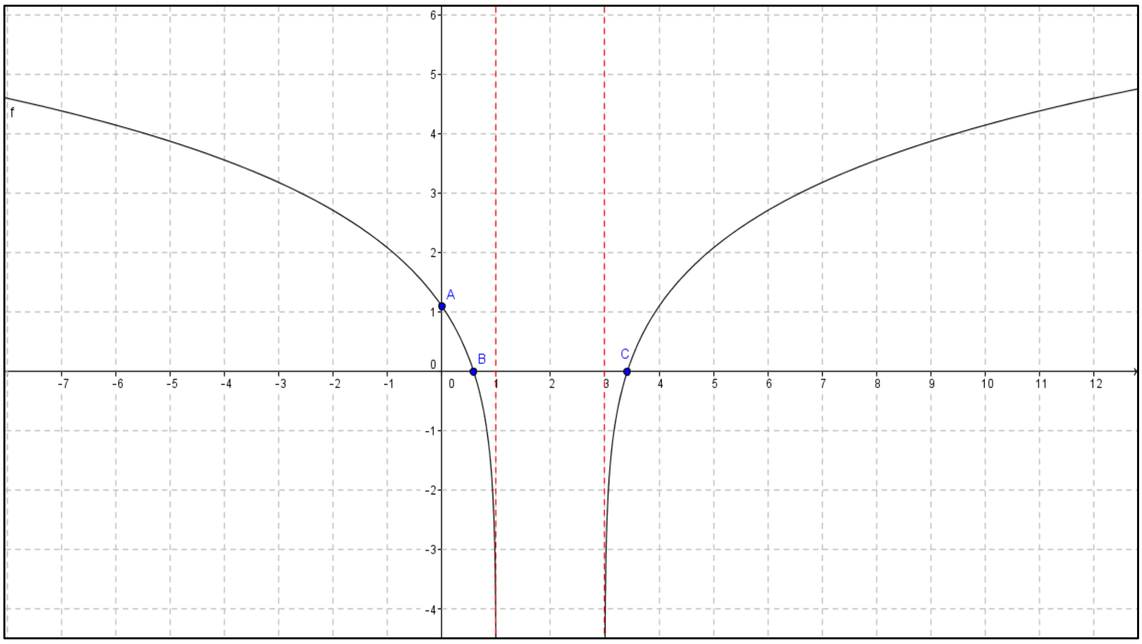
$$f''(x) = \frac{-2(x^2 - 4x + 5)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

Analisando o sinal de $f''(x)$, temos:

$- - - - - \ - - - - - - \ - - - - - - - - - \qquad -2(x^2 - 4x + 5)$
$+ + + + (1) + + + + + + (3) + + + + + \qquad (x^2 - 4x + 3)^2$
$- - - - (1) - - - - - - - (3) - - - - - - \qquad f''(x)$

Com a análise acima, concluimos que f é sempre côncava para baixo em $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

$*$ Como não há mudança na direção da concavidade da função f, então não há pontos de inflexão.



Questão 3

$a)$ *Considere as parábolas $y_1 = -x^2 + 4$ e $y_2 = x^2 - 4$. Determine o raio da circunferência centrada na origem e tangente às curvas dadas.*

Equação de uma circunferência centrada na origem: $x^2 + y^2 = r^2$

Usando o fato de que y_1 e y_2 são funções pares, ou seja, $y_1(x) = y_1(-x)$ e $y_2(x) = y_2(-x)$, basta idenficarmos qual o ponto onde a reta tangente a uma dessas parábolas é tangente em relação à circunferência.

Podemos fazer isso tranquilamente aproveitando o fato de que essas parábolas são simétricas em relação ao eixo x $(y_1 = -y_2)$

Equação da reta tangente a um ponto (x_0, y_0) *da parábola* $y = -x^2 + 4$:

$$y - y_0 = -2x_0(x - x_0)$$
$$y - (-x_0^2 + 4) = -2x_0 x + 2x_0^2$$
$$y = -2x_0 x + x_0^2$$

Mas o ponto (x_0, y_0) *pertence a circunferência e, portanto,* $x_0^2 + y_0^2 = r^2$
E a reta descrita por $y = -2x_0 x + x_0^2$ *é tangente à circunferência em* (x_0, y_0).

Derivando implicitamente a equação da circunferência, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(r^2)$$
$$2x + 2yy' = 0$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$

A reta tangente a parábola no ponto (x_0, y_0) *deve ser a mesma reta tangente a circunferência em* (x_0, y_0). *Portanto,* $y' = -2x_0$ *em* (x_0, y_0).

$$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x_0}{y_0} = -2x_0 \implies y_0 = \frac{1}{2}$$

Pela expressão da parábola, temos $x_0^2 = 4 - y_0$, *substituindo na expressão da circunferência, obtemos*:

$$4 - y_0 + y_0^2 = r^2$$
$$4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = r^2$$
$$r^2 = \frac{15}{4} \therefore r = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$b)$ *A função gaussiana tem a forma* $f(x) = a.e^{-\frac{(x-b)^2}{8}}$, *onde a e b são constantes positivas. Determine os valores de a e b, de modo que f tenha máximo local em* $(2,3)$.

$*$ *Pela informação do enunciado, temos* $f(2) = 3$ *e, como f é uma função contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$, *se f admite um valor máximo local em* $x = 2$ *e* $f'(2)$ *existe, então* $f'(2) = 0$ *(afirmação pelo Teorema de Fermat).*

$$f(2) = 3 \implies 3 = a.e^{-\frac{(2-b)^2}{8}} \quad (1)$$

$$f'(x) = -a.\frac{(x-b)}{4}.e^{-\frac{(x-b)^2}{8}};$$

$$f'(2) = 0 \Longrightarrow -\frac{a(2-b)}{4} . e^{-\frac{(2-b)^2}{8}} = 0 \therefore \; -\frac{a(2-b)}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ ou \\ b = 2 \end{cases}$$

$* \, Note\ que\ a = 0\ torna\ f(x) = 0. Logo, b = 2\ é\ a\ solução\ do\ sistema\ acima.$
$Voltando\ a\ expressão\ (1), temos:$

$$3 = a.e^{-\frac{(2-2)^2}{8}} \Rightarrow 3 = a.e^{0} \therefore a = 3.$$

$Logo, f(x) = 3.e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}\ satisfazendo\ as\ condições\ acima\ f(2) = 3\ e\ f'(2) = 0.$

$Para\ confirmar\ que\ em\ x = 2\ temos\ de\ fato\ um\ valor\ máximo\ local, observe$
$o\ estudo\ do\ sinal\ de\ f'(x)\ para\ os\ valores\ de\ a\ e\ b\ determinados.$

$$f'(x) = -\frac{3}{4}(x-2).e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$$

$+ + + + + + + + + + (2) - - - - - - - - - \qquad -\frac{3}{4}(x-2)$

$+ \qquad e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$

$+ + + + + + + + + + (2) - - - - - - - - - \qquad f'(x)$

$Com\ essa\ análise\ concluímos\ que\ f\ é\ crescente\ em\ (-\infty, 2)\ e\ f\ é\ decrescente$
$em\ (2, +\infty)\ e, portanto, x = 2\ é\ um\ número\ crítico\ associado\ ao\ ponto\ de$
$máximo\ local.$

***Questão* 4**

$a)\ \lim_{x\to 1^+}\left[(x-1)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]\ ; indeterminação\ do\ tipo\ \ "0\times\infty"$

$$\lim_{x\to 1^+}\left[(x-1)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\ ; indeterminação\ do\ tipo\ "\frac{0}{0}"$$

$Aplicando\ a\ Regra\ de\ L'Hôspital\ \ldots$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{cossec}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{2}{\pi.\operatorname{cossec}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = -\frac{2}{\pi}.$$

$b)\ \lim_{x\to\infty}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}\ ; indeterminação\ do\ tipo\ "\infty^0"$

$$\lim_{x\to\infty}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right]};$$

$Calculando\ o\ limite\ do\ expoente, temos:$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x} \; ; \; \textit{indeterminação do tipo } "\frac{\infty}{\infty}"$$

Aplicando a Regra de L'Hôspital, obtemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1.$$

Logo,

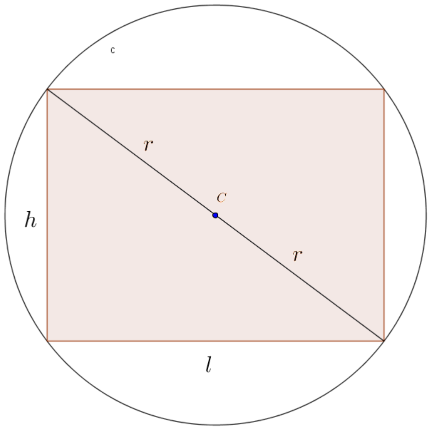
$$\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right]} = e^1 = e.$$

$$\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Questão 5

A resistência de uma viga retangular é o produto da largura pelo quadrado da altura de sua seção transversal. Determine as dimensões da viga mais resistente que podemos cortar de um cilindro de madeira de raio r.

A resistência da viga é $R = l \times h^2$



Da ilustração temos a seguinte relação,

$(2r)^2 = h^2 + l^2 \Longrightarrow h^2 = 4r^2 - l^2$

Voltando a expressão da resistência, temos:

$R = l(4r^2 - l^2) \Longrightarrow R(l) = 4lr^2 - l^3$

$R'(l) = 4r^2 - 3l^2$

Analisando o sinal da derivada da resistência em relação à largura da viga, temos:

$$(0) + + + + + + \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) - - - - - - \quad (4r^2 - 3l^2)$$

$$(0) + + + + + + \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) - - - - - - - \quad R'(l)$$

$*$ *Obs: para a análise da função $R(l)$ consideramos apenas $l \in (0{,}2r)$ por estarmos trabalhando com dimensões.*

Com a análise da derivada, concluímos que a resistência da viga cresce até $l = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$ *e decresce em seguida. Caracterizando, portanto, um número crítico da*

$função\ R(l)\ associado\ ao\ valor\ máximo\ da\ função. Logo, para\ l = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ $temos\ a$ $viga\ mais\ resistente\ que\ pode\ ser\ extraida\ do\ cilindro\ de\ madeira\ de\ raio\ r.$

$As\ dimensões\ da\ viga\ mais\ resistente\ são$:

$$l = \frac{2r}{\sqrt{3}}\ \ e$$

$$h^2 = 4r^2 - \frac{4r^2}{3} = \frac{8r^2}{3} \therefore h = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r = \frac{2\sqrt{6}}{3}r$$

11.8 Reavaliação da 1ª Média – 27 de Novembro de 2015

***Questão* 1.**

$a)$ *Onde a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq 2, x \neq -2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x = -2 \end{cases}$$

é contínua?

$b)$ *Em que ponto a reta normal à curva* $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ *em* $(1,1)$ *cruza a curva novamente?*

***Questão* 2**

$a)$ *Verifique se a função* $f(x) = |x^2 - \pi|$ *é derivável em* $x = \sqrt{\pi}$, *usando o conceito de derivada lateral.*

$b)$ *As assíntotas verticais do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{1}{9}}{6x^3 - 5x^2 + x}$ *intersectam o gráfico de* $g(x) = x^4$ *nos pontos* A *e* B. *Determine a área do triângulo formado pelos pontos* A, B *e* $C = (4,0)$.

***Questão* 3**

$a)$ *Calcule, caso exista,* $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \left[\ln(-x)\cos^2\left(\frac{1}{\ln(-x)}\right)\right]$.

$b)$ *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação*

$$[\![x]\!] + \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right]$$

admite uma solução no intervalo $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$.

***Questão* 4**

$a)$ *Encontre a reta tangente ao gráfico de* $y = \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{e^x}$ *no ponto de abscissa* $x = \pi$.

$b)$ *Em quais pontos o gráfico da função* $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ *tem reta tangente horizontal? Existem pontos onde a reta tangente tem inclinação igual a* -1?

Questão 5

$a)$ *Se* g é *uma função duas vezes diferenciável e* $f(x) = x.g(x^2 + 1)$, *encontre* $f''(1)$ *sabendo* $-$ *se que* $g'(2) = g''(2) = 1$.

$b)$ *Determine as assíntotas horizontais do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{4x + 5}{\sqrt{2x^2 + 1}}$.

***Questão* 1.**

$a)$ *Onde a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq 2, x \neq -2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x = -2 \end{cases}$$

é *contínua*?

$*$ *Obs: a primeira sentença da função* $f(x)$ *pode ser reescrita na forma ...*
$\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$, *como a sentença* é *válida para* $x \neq 2$, *então* $(x-2) \neq 0$.

Logo, a função $f(x)$ *pode ser reescrita na forma:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}, & x \neq 2 \text{ e } x \neq -2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x = -2 \end{cases}$$

f é *uma função sentencial formada por funções constantes e racionais e, portanto,* f é *contínua onde está definida. Logo,* f é *contínua em* $(-\infty, -2) \cup (-2,2) \cup (2, +\infty)$. *Precisamos verificar se* f é *contínua em* $x = -2$ *e* $x = 2$, *os* únicos *valores aos quais não podemos garantir a continuidade da função* $f(x)$.

$*$ *Dizemos que uma função* f é *contínua no número* $x = a$ *se, somente se,* $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. *Para isso,* $f(a)$ *e* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *devem existir.*

Se $x \to 2$, *então* $x \neq 2$. *Se* $x \to -2$, *então* $x \neq -2$. *Logo, para ambos os limites calculados a seguir,* $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, *temos* $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$.

Em $x = -2$, *temos* $f(-2) = 4$.

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2^+} \frac{\overbrace{x^2 + 2x + 4}^{\to 4}}{\underbrace{x + 2}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$*$ *Com isso, já podemos concluir que* $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \nexists$ *e, portanto,* $f(x)$ *não* é *contínua em* $x = -2$.

Em $x = 2$, *temos* $f(2) = 3$.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4)}{\lim\limits_{x \to 2} (x + 2)} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim\limits_{x \to 2} 2x + \lim\limits_{x \to 2} 4}{\lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 2} =$$

$$\frac{4+4+4}{2+2}=\frac{12}{3}=4.$$

$* \; Como\; f(2)=\lim_{x\to 2} f(x) \; então \; f(x) \; é \; contínua \; em \; x=2.$

$Com\; essas\; informações\; conclui-se\; que\; f(x)\; é\; contínua\; em\; (-\infty,-2)\cup(-2,+\infty), ou\; ainda, f\; é\; contínua\; em\; \mathbb{R}-\{-2\}.$

$b)\; Em\; que\; ponto\; a\; reta\; normal\; à\; curva\; x^2+2xy-3y^2=0\; em\; (1,1)\; cruza\; a\; curva\; novamente?$

$Primeiro\; verificamos\; se\; o\; ponto\; (1,1)\; pertence\; à\; curva\; dada:$
$(1)^2+2(1)(1)-3(1)^2=1+2-3=3-3=0\;;\;\; (1,1)\; pertence\; a\; curva.$

$Derivando\; a\; expressão\; da\; curva\; implicitamente, obtemos:$

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(2xy)-\frac{d}{dx}(3y^2)=\frac{d}{dx}(0)$$
$$2x+\frac{d}{dx}(2x).y+(2x)\frac{dy}{dx}-3.\frac{d}{dx}(y^2)=0$$
$$2x+2y+2x.y'-6y.y'=0$$
$$x+y+x.y'-3y.y'=0$$
$$y'(x-3y)=-(x+y)$$
$$y'=-\frac{x+y}{x-3y}$$

$O\; coeficiente\; angular\; da\; reta\; normal\; em\; (1,1)\; é\; dado\; por:$

$$m_N=-\frac{1}{y'_{(1,1)}}=\frac{1}{\frac{1+1}{1-3}}=-\frac{2}{2}=-1$$

$Equação\; da\; reta\; normal\; a\; curva\; no\; ponto\; (1,1):$

$$y-1=-1(x-1)$$
$$y=-x+2$$

$Substituindo\; a\; equação\; da\; reta\; normal\; na\; expressão\; da\; curva, temos:$

$$x^2+2x(-x+2)-3(-x+2)^2=0$$
$$x^2-2x^2+4x-3x^2+12x-12=0$$
$$-4x^2+16x-12=0$$
$$x^2-4x+3=0$$
$$(x-3)(x-1)=0$$
$$\therefore x=3\; ou\; x=1$$

$* \; Obs: para\; x=1\; temos\; o\; ponto\; (1,1)\; que\; já\; foi\; mencionado\; no\; problema, logo\; x=3\; é\; a\; abscissa\; do\; ponto\; onde\; a\; reta\; normal\; em\; (1,1)\; cruza\; a\; curva\; novamente.$

$$y=-x+2$$

$$y = -3 + 2$$
$$y = -1$$

Ponto $A = (3, -1)$ *é o ponto onde a reta normal em* $(1,1)$ *cruza a curva novamente.*

Questão 2

a) Verifique se a função $f(x) = |x^2 - \pi|$ *é derivável em* $x = \sqrt{\pi}$*, usando o conceito de derivada lateral.*

Pela definição de derivada em um ponto $x = a$*, temos:*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ ; façamos } h = x - a, \text{ então}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$* \; Obs: f(x) = |x^2 - \pi| = \begin{cases} x^2 - \pi, & x \leq -\sqrt{\pi} \text{ ou } x \geq \sqrt{\pi} \\ -(x^2 - \pi) & , -\sqrt{\pi} < x < \sqrt{\pi} \end{cases};$$

$* \; Se\ x \to \sqrt{\pi}^{+}$*, então* $x > \sqrt{\pi} \Rightarrow x \neq \sqrt{\pi}$ *e, portanto,* $f(x) = (x^2 - \pi)$

$$f'_{+}\left(\sqrt{\pi}\right) = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^{+}} \frac{f(x) - f\left(\sqrt{\pi}\right)}{x - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^{+}} \frac{x^2 - \pi - 0}{x - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^{+}} \frac{x^2 - \pi}{x - \sqrt{\pi}} =$$

$$\lim_{x \to \sqrt{\pi}^{+}} \frac{\left(x - \sqrt{\pi}\right)\left(x + \sqrt{\pi}\right)}{x - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^{+}} \left(x + \sqrt{\pi}\right) = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^{+}} x + \lim_{x \to \sqrt{\pi}^{+}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}.$$

$* \; Se\ x \to \sqrt{\pi}^{-}$*, então* $x < \sqrt{\pi} \Rightarrow x \neq \sqrt{\pi}$ *e, portanto,* $f(x) = -(x^2 - \pi)$

$$f'_{-}\left(\sqrt{\pi}\right) = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^{-}} \frac{f(x) - f\left(\sqrt{\pi}\right)}{x - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^{-}} \frac{-(x^2 - \pi) - 0}{x - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^{-}} \frac{-(x^2 - \pi)}{x - \sqrt{\pi}} =$$

$$\lim_{x \to \sqrt{\pi}^{-}} \frac{-\left(x - \sqrt{\pi}\right)\left(x + \sqrt{\pi}\right)}{x - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^{-}} -\left(x + \sqrt{\pi}\right) = -\lim_{x \to \sqrt{\pi}^{-}} x - \lim_{x \to \sqrt{\pi}^{-}} \sqrt{\pi} =$$

$$-\sqrt{\pi} - \sqrt{\pi} = -2\sqrt{\pi}.$$

Como $f'_{+}\left(\sqrt{\pi}\right)$ *e* $f'_{-}\left(\sqrt{\pi}\right)$ *existem, porém, são diferentes, dizemos que* f *não é derivável ou diferenciável em* $x = \sqrt{\pi}$.

b) As assíntotas verticais do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{1}{9}}{6x^3 - 5x^2 + x}$ *intersectam o gráfico de* $g(x) = x^4$ *nos pontos A e B. Determine a área do triângulo formado pelos pontos A, B e* $C = (4,0)$.

$$f(x)=\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{6x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}\ ;\ D(f)=\left\{x\in\mathbb{R};x\neq 0,x\neq\frac{1}{2}\ e\ x\neq\frac{1}{3}\right\}$$

Dizemos que a reta $x=a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty\ \ ou\ \ \lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$$

Logo, pela definição de continuidade de uma função em um número $x=a$, devemos procurar as assíntotas verticais onde a função $f(x)$ é descontínua. Como f é uma função polinomial racional e, portanto, contínua onde está definida, devemos verificar se as retas $x=0, x=1/2$ e $x=1/3$ são assíntotas verticais, uma vez que, f é descontínua nesses números.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{x^2-\frac{1}{9}}^{-1/9}}{\underbrace{6x}_{0^+}\underbrace{\left(x-\frac{1}{3}\right)}_{-1/3}\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)}_{-1/2}}=-\infty$$

$*$ *Portanto, a reta $x=0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $f(x)$.*

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}^+}\frac{\overbrace{x^2-\frac{1}{9}}^{5/36}}{\underbrace{6x}_{3}\underbrace{\left(x-\frac{1}{3}\right)}_{1/6}\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)}_{0^+}}=+\infty$$

$*$ *Portanto, a reta $x=\frac{1}{2}$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $f(x)$.*

$*$ *Se $x\to\frac{1}{3}$ então $x\neq\frac{1}{3}\Rightarrow\left(x-\frac{1}{3}\right)\neq 0$. Logo, podemos reescrever $f(x)$ na forma:*

$$f(x)=\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{6x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{x+\frac{1}{3}}{6x\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{x+\frac{1}{3}}{6x\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{x+\frac{1}{3}}{6x^2-3x}=\frac{\lim_{x\to\frac{1}{3}} x+\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{1}{3}}{\lim_{x\to\frac{1}{3}} 6x^2-\lim_{x\to\frac{1}{3}} 3x}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}-1}=\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}}=-2.$$

$* \, Portanto, a \, reta \, x = \frac{1}{3}$ não é assíntota vertical ao gráfico de $f(x)$.

$Logo, os \, pontos \, A \, e \, B \, definidos \, pela \, interseção \, das \, retas \, x = 0 \, e \, x = \frac{1}{2} \, com \, o$ $gráfico \, da \, função \, g(x) = x^4$ são:

$$A = (0, g(0)) = (0,0) \quad e \quad B = \left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$$

$O \, triângulo \, formado \, pelos \, pontos \, A, B \, e \, C \, tem \, base \, no \, eixo \, x \, dada \, pela \, distância \, entre \, A \, e \, C \, [d(A,C) = 4] \, e \, altura \, igual \, a \, ordenada \, do \, ponto \, B \, [h = 1/16]. \, Logo,$ a área do triângulo ΔABC é:

$$S = \frac{b.h}{2} = \frac{4 \times \frac{1}{16}}{2} = \frac{1}{8} u.A$$

Questão 3

$a) \, Calcule, caso \, exista, \lim_{x \to -1^+} \left[\ln(-x) \cos^2\left(\frac{1}{\ln(-x)}\right)\right].$

$\forall x \in \mathbb{R}, com \, x < 0, temos:$

$$0 \leq \cos^2\left(\frac{1}{\ln(-x)}\right) \leq 1$$

$* \, Se \, x \to -1^+, então \, \ln(-x) \to 0^- \, e, portanto, \ln(-x) < 0. \, Logo,$

$$0 \geq \ln(-x) \cos^2\left(\frac{1}{\ln(-x)}\right) \geq \ln(-x)$$

$Seja \, g(x) = 0, f(x) = \ln(-x) \cos^2\left(\frac{1}{\ln(-x)}\right) \, e \, h(x) = \ln(-x). \, Com \, isso,$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

$\lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} 0 = 0$
$\lim_{x \to -1^+} h(x) = \lim_{x \to -1^+} \ln(-x) = 0$

$Se \, h(x) \leq f(x) \leq g(x) \, quando \, x \, está \, próximo \, de -1 \, (exceto \, possivelmente \, em \, -1) \, e \, \lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} h(x) = 0. \, Então, pelo \, Teorema \, do \, Confronto, \lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$
$Portanto,$

$$\lim_{x \to -1^+} \ln(-x) \cos^2\left(\frac{1}{\ln(-x)}\right) = 0$$

$b)$ *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação*

$$[\![x]\!] + \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right]$$

admite uma solução no intervalo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Seja $f(x) = [\![x]\!] + \frac{1}{2} - \operatorname{sen}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right]$. *Devemos provar que* $f(x)$ *admite uma raíz real no intervalo* $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right] + \frac{1}{2} - \operatorname{sen}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\pi\right] = 0 + \frac{1}{2} - \operatorname{sen}(0) = \frac{1}{2} \;\; ; \;\; f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left[\!\left[\frac{3}{4}\right]\!\right] + \frac{1}{2} - \operatorname{sen}\left[\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\pi\right] = 0 + \frac{1}{2} - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \;\; ; \;\; f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$$

$*$ *Obs*$_1$: *lembremos que a função* $[\![x]\!]$ *é contínua em* $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$ *e, portanto, a função* $[\![x]\!]$ *é contínua no intervalo fechado* $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

$*$ *Obs*$_2$: *a função* $\operatorname{sen}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right]$ *assim como a função constante* $\frac{1}{2}$ *são contínuas em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, contínuas no intervalo fechado* $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

Logo, f *é contínua no intervalo fechado* $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ *e* 0 *é um número entre* $f\left(\frac{1}{2}\right)$ *e* $f\left(\frac{3}{4}\right)$, *onde* $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0 > f\left(\frac{3}{4}\right)$. *Então, existe algum número* $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ *tal que* $f(x) = 0$. *Portanto,* f *admite raíz real no intervalo* $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ *tal que*

$$[\![x]\!] + \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right].$$

Questão 4

$a)$ *Encontre a reta tangente ao gráfico de* $y = \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{e^x}$ *no ponto de abscissa* $x = \pi$.

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\left[\frac{d}{dx}(x^2.\operatorname{sen} x)\right]e^x - (x^2.\operatorname{sen} x).\frac{d}{dx}(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$y' = \frac{[2x.\operatorname{sen} x + x^2 \cos x]e^x - x^2.\operatorname{sen} x\,.\,e^x}{(e^x)^2} \;\; ; \;\; e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$y' = \frac{2x.\operatorname{sen} x + x^2(\cos x - \operatorname{sen} x)}{e^x}$$

$* \, Em \; x = \pi \; temos \;\; y = \dfrac{\pi^2.\operatorname{sen}\pi}{e^\pi} = 0. Ponto \; (\pi, 0)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi} = y'_\pi = \frac{2\pi.\operatorname{sen}\pi + \pi^2(\cos\pi - \operatorname{sen}\pi)}{e^\pi} = -\frac{\pi^2}{e^\pi}$$

Equação da reta tangente em $(\pi, 0)$:

$$y - 0 = -\frac{\pi^2}{e^\pi}(x - \pi)$$
$$y = \frac{-\pi^2 x + \pi^3}{e^\pi}$$

$b)$ *Em quais pontos o gráfico da função* $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ *tem reta tangente horizontal? Existem pontos onde a reta tangente tem inclinação igual a* -1?

Dizemos que uma reta tangente é horizontal quando a inclinação da reta é zero em relação ao eixo x, *ou seja, quando* $m = f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$
$$x = \frac{4 \pm 2}{6} \therefore x_1 = 1 \;\; e \;\; x_2 = \frac{1}{3}$$

Logo, os pontos onde a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ *é horizontal são:*
$A = (1, f(1)) = (1, -1) \;\; e \; B = \left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{23}{27}\right)$.

Existem pontos onde a reta tangete tem inclinação $m = f'(x) = -1$?

$f'(x) = -1 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = -1$
$3x^2 - 4x + 2 = 0$
$\Delta = 16 - 24 = -8 \qquad (\Delta < 0 \Rightarrow não \; existe \; solução \; em \; x \in \mathbb{R})$

$*$ *Portanto, não existe reta tangente ao gráfico de* $f(x)$ *com inclinação igual a* -1.

Questão 5

$a)$ *Se* g *é uma função duas vezes diferenciável e* $f(x) = x.g(x^2 + 1)$, *encontre* $f''(1)$ *sabendo-se que* $g'(2) = g''(2) = 1$.

$$f'(x) = g(x^2+1) + x.\frac{d}{dx}[g(x^2+1)]$$

$* \ Pela\ Regra\ da\ Cadeia,$

$$\frac{d}{dx}[g(x^2+1)] = g'(x^2+1).\frac{d}{dx}(x^2+1) = g'(x^2+1).2x$$

$$f'(x) = g(x^2+1) + 2x^2.g'(x^2+1)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[g(x^2+1)] + 4x.g'(x^2+1) + 2x^2.\frac{d}{dx}[g'(x^2+1)]$$
$$f''(x) = 2x.g'(x^2+1) + 4xg'(x^2+1) + 2x^2.\frac{d}{dx}[g'(x^2+1)]$$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia,$

$$\frac{d}{dx}[g'(x^2+1)] = g''(x^2+1).\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x.g''(x^2+1)$$

$$f''(x) = 6x.g'(x^2+1) + 4x^3.g''(x^2+1)$$
$$f''(1) = 6.g'(2) + 4.g''(2)$$
$$f''(1) = 6.1 + 4.1$$
$$f''(1) = 6 + 4 = 10$$

$b)\ Determine\ as\ assíntotas\ horizontais\ do\ gráfico\ da\ função\ f(x) = \dfrac{4x+5}{\sqrt{2x^2+1}}.$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ y = L\ é\ uma\ assíntota\ horizontal\ do\ gráfico\ de\ f(x)\ se\ ou$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x+5}{|x|}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x+5}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}\ ;$$

$*\ Obs_1: se\ x\to+\infty, então\ |x| = x\ , e\ ainda, |x| = \sqrt{x^2}.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}4 + \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}}{\sqrt{\lim_{x\to+\infty}2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}} = \frac{4+0}{\sqrt{2+0}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$Portanto, a\ reta\ y = 2\sqrt{2}\ é\ uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4x+5}{|x|}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x+5}{-x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4-\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}\ ;$$

$* \, Obs_1: se \ x \to -\infty, então \ |x| = -x \ , e \ ainda, |x| = \sqrt{x^2}.$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4-\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-\lim_{x\to-\infty} 4 - \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x}}{\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 2 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}} = \frac{-4-0}{\sqrt{2+0}} = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}.$$

$Portanto, a \ reta \ y = -2\sqrt{2}$ é $uma \ assíntota \ horizontal \ ao \ gráfico \ de \ f(x).$

11.9 Reavaliação da 1ª Média – 28 de Novembro de 2015

Questão 1

$a)$ *Defina* $g(4)$ *de maneira que estenda* $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4}$ *para ser contínua em* $x = 4.$

$b)$ *Determine os dois pontos em que a curva* $x^2 + xy + y^2 = 7$ *cruza o eixo* x *e mostre que as tangentes à curva nesses pontos são paralelas. Qual é o coeficiente angular comum dessas tangentes?*

Questão 2

$a)$ *Determine as assíntotas do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *e a seguir obtenha os pontos de contato delas com o gráfico da função* $g(x) = \operatorname{arcsen} x.$

$b)$ *Calcule, caso exista,* $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \left[(3 - x)\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)}\right].$

Questão 3

$a)$ *Ache a derivada de* $f(x) = \cos(\pi^{\operatorname{arccotg} x}).$

$b)$ *Obtenha a equação da reta tangente à curva* $y = \dfrac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cossec} x}$ *no ponto em que* $x = \dfrac{\pi}{2}.$

Questão 4

$a)$ *Seja* $f(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)(x - 2)e^x.$ *Calcule a área do triângulo delimitado pelos eixos coordenados e a reta tangente ao gráfico de* $y = f(x)$ *no ponto de abscissa* $x = 1.$

$b)$ *Considere* $f(x) = x^n$*, n inteiro positivo. Use a definição de derivada para provar que* $f'(x) = nx^{n-1}.$

Questão 5

$a)$ *Seja* $g(x) = f\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 4}}\right).$ *Sendo* $f'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \sqrt{2}$*, calcule* $g'(2).$

$b)$ *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que o gráfico da função* $f(x) = -x^2$ *intercepta a circunferência de raio 1 e centrada na origem num ponto do 3º quadrante.*

Questão 1

$a)$ *Defina* $g(4)$ *de maneira que estenda* $g(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ *para ser contínua em* $x = 4$.

Dizemos que $g(x)$ *é contínua em* $x = 4$ *se, somente se,* $g(4) = \lim_{x\to 4} g(x)$.
Contudo, $g(4)$ *e* $\lim_{x\to 4} g(x)$ *devem existir.*

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+1)}\ ;$$

Obs: se $x \to 4$, *então* $x \neq 4$ *e, portanto,* $x - 4 \neq 0$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+1)} = \lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 4} x + \lim_{x\to 4} 4}{\lim_{x\to 4} x + \lim_{x\to 4} 1} = \frac{4+4}{4+1} = \frac{8}{5}$$

Portanto, para que $g(x)$ *seja contínua em* $x = 4$, $g(4) = \dfrac{8}{5}$.

$b)$ *Determine os dois pontos em que a curva* $x^2 + xy + y^2 = 7$ *cruza o eixo* x *e mostre que as tangentes à curva nesses pontos são paralelas. Qual é o coeficiente angular comum dessas tangentes?*

Os pontos onde a curva cruza o eixo x *possui ordenada igual a zero* $(y = 0)$.
Logo,

$$x^2 + x.0 + 0^2 = 7 \Longrightarrow x^2 = 7 \therefore x_1 = \sqrt{7}\ \ e\ x_2 = -\sqrt{7}.$$

Pontos $A = \left(\sqrt{7}, 0\right)$ *e* $B = \left(-\sqrt{7}, 0\right)$.

Derivando a expressão da curva implicitamente em relação a x, *temos:*

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$
$$2x + y.\frac{dx}{dx} + x.\frac{dy}{dx} + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x + y + xy' + 2yy' = 0$$
$$y'(x+2y) = -(2x+y)$$
$$y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_A = y'_A = -\frac{2\sqrt{7}+0}{\sqrt{7}+2.0} = -2 \qquad ; \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_B = y'_B = -\frac{2\left(-\sqrt{7}\right)+0}{\left(-\sqrt{7}\right)+2.0} = -2$$

$*$ *Duas retas são ditas paralelas quando possuem a mesma inclinação, ou seja, mesmo coeficiente angular. Como* $y'_A = y'_B$ *então as retas tangentes em* A *e* B *são paralelas e o coeficiente angular em comum é* $m = -2$.

***Questão* 2**

$a)$ *Determine as assíntotas do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *e a seguir obtenha os pontos de contato delas com o gráfico da função* $g(x) = \operatorname{arcsen} x$.

Domínio da função $f(x)$: *como* $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *e* $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *então* f *está definida nos reais e, portanto,* $D(f) = \mathbb{R}$.

$*$ *Como* f é *contínua em* $\mathbb{R}$ *então* f *não possui assíntotas verticais, pois estas assíntotas ocorrem nos pontos de descontinuidade de uma função.*

Dizemos que a reta $y = L$ é *uma assíntota horizontal se ou* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1 \ ; se\ x \to +\infty, \frac{1}{e^{2x}} \to 0.$$

Portanto, a reta $y = 1$ é *uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - \lim\limits_{x\to-\infty} 1}{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} + \lim\limits_{x\to-\infty} 1} = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1 \ ; se\ x \to -\infty, e^{2x} \to 0$$

Portanto, a reta $y = -1$ é *uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$

$*$ *A interseção entre as assíntotas com o gráfico de* $g(x) = \operatorname{arcsen} x$ são:

$y = 1 = g(x) \Longrightarrow 1 = \operatorname{arcsen} x \therefore x = \operatorname{sen} 1$
$y = -1 = g(x) \Longrightarrow -1 = \operatorname{arcsen} x \therefore x = \operatorname{sen}(-1) = -\operatorname{sen}(1)$

Pontos de contato : $A = (\operatorname{sen}(1), 1)$ *e* $B = (-\operatorname{sen}(1), -1)$

$b)$ *Calcule, caso exista,* $\lim\limits_{x\to3^+} \left[(3-x)\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)}\right]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, *com* $x \neq 3$, *temos*:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{3-x}\right) \leq 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$$

$* \, Obs: como \; 0 < \frac{1}{2} < 1 \; a \; função \; exponencial \; é \; decrescente \; e, portanto, o \; sentido$ $da \; desigualdade \; inverte.$

$$2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)} \geq \frac{1}{2}$$

$Se \; x \to 3^+, então \; x > 3 \; e, portanto, 3 - x < 0. Logo,$

$$2(3-x) \leq (3-x)\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)} \leq \frac{1}{2}(3-x)$$

$Seja \; f(x) = 2(3-x), g(x) = (3-x)\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)} \; e \; h(x) = \frac{1}{2}(3-x), então$ $f(x) \leq g(x) \leq h(x).$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2(3-x) = 0$$
$$\lim_{x\to 3^+} h(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{2}(3-x) = 0.$$

$Se \; f(x) \leq g(x) \leq h(x) \; quando \; x \; está \; próximo \; de \; 3 \; por \; valores \; maiores \; que \; 3$ $(exceto \; possivelmente \; em \; 3) \; e \; \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} h(x) = 0 \; então, pelo \; Teorema$ $do \; Confronto, \lim_{x\to 3^+} g(x) = 0. \; Portanto,$

$$\lim_{x\to 3^+} (3-x)\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)} = 0$$

Questão 3

$a) \; Ache \; a \; derivada \; de \; f(x) = \cos(\pi^{\operatorname{arccotg} x}).$

$Seja \; u = \operatorname{arccotg} x \;, v = \pi^u \; e \; f(v) = \cos(v). Pela \; Regra \; da \; Cadeia, temos:$

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{df}{dv}$$
$$f'(x) = \left[-\frac{1}{1+x^2}\right].(\pi^u.\ln\pi).(-\operatorname{sen} v)$$
$$f'(x) = \frac{\pi^{\operatorname{arccotg} x}.\ln\pi.\operatorname{sen}(\pi^{\operatorname{arccotg} x})}{1+x^2}$$

$b) \; Obtenha \; a \; equação \; da \; reta \; tangente \; à \; curva \; y = \frac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cossec} x} \; no \; ponto \; em \; que$ $x = \frac{\pi}{2}.$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{(-\operatorname{cossec}^2 x).\operatorname{cossec} x - (-\operatorname{cossec} x\,.\operatorname{cotg} x)(\operatorname{cotg} x - 1)}{\operatorname{cossec}^2 x}$$

$$y' = \frac{-\operatorname{cossec} x\,(\operatorname{cossec}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x + \operatorname{cotg} x)}{\operatorname{cossec}^2 x} \;;\quad \operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cossec}^2 x$$

$$y' = -\frac{(1 + \operatorname{cotg} x)}{\operatorname{cossec} x} = -(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$Em\ x = \frac{\pi}{2}, y' = -\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) = -(1+0) = -1.$

$Quando\ x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} - 1}{\operatorname{cossec}\frac{\pi}{2}} = \frac{0-1}{1} = \frac{-1}{1} = -1\,; Ponto\ \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

Equação da reta tangente em $x = \pi/2$:

$$y - 1 = -1\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y = -x + \frac{2+\pi}{2}$$

Questão 4

$a)$ *Seja* $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)(x-2)e^x$. *Calcule a área do triângulo delimitado pelos eixos coordenados e a reta tangente ao gráfico de* $y = f(x)$ *no ponto de abscissa* $x = 1$.

Ponto do gráfico de $f(x)$ *com abscissa* $x = 1$:

$$f(1) = \left(\frac{\ln 1}{1}\right)(1-2)e^1 = 0 \;\; ; ponto\ (1{,}0)$$

$$f'(x) = D_x\left[\frac{\ln x}{x}\right].(x-2)e^x + \left(\frac{\ln x}{x}\right).D_x[(x-2)e^x]$$
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2}.(x-2)e^x + \left(\frac{\ln x}{x}\right).[e^x + (x-2)e^x]$$
$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}(x-2)e^x + \frac{\ln x}{x}e^x(x-1)$$
$$f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1}(1-2)e^1 + \frac{\ln 1}{1}e^1(1-1)$$
$$f'(1) = -e$$

Equação da reta tangente em $P = (1{,}0)$:

$$y - 0 = -e(x-1)$$

Interseções com os eixos coordenados: $(0, e)$ *e* $(1{,}0)$

Área do triângulo delimitado pela reta e os eixos coordenados:

$$A = \frac{1.e}{2} = \frac{e}{2}u.A$$

$b)$ *Considere* $f(x) = x^n$, *n inteiro positivo. Use a definição de derivada para provar que* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Pela definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$(x+\Delta x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \Delta x^k = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x + \cdots + nx\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\right]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x + \cdots + nx\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\right] \end{aligned}$$

$*$ *Se* $\Delta x \to 0$ *então todos os termos com* Δx *também tendem a zero. Logo,*

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Questão 5

$a)$ *Seja* $g(x) = f\left(\sqrt{\frac{1}{x^2+4}}\right)$. *Sendo* $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \sqrt{2}$, *calcule* $g'(2)$.

$$g'(x) = f'\left(\sqrt{\frac{1}{x^2+4}}\right) . D_x \left[\sqrt{\frac{1}{x^2+4}}\right]$$

$$g'(x) = f'\left(\sqrt{\frac{1}{x^2+4}}\right) . D_x \left[(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$g'(x) = f'\left(\sqrt{\frac{1}{x^2+4}}\right) \left[-\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{3}{2}}.(2x)\right]$$

$$g'(2) = f'\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right) \left[-\frac{1}{2}(8)^{-\frac{3}{2}}(4)\right]$$

$$g'(2) = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right).\left[-2.\frac{1}{8\sqrt{8}}\right] = \sqrt{2}.\left[-\frac{1}{4\sqrt{8}}\right] = -\frac{1}{4\sqrt{4}} = -\frac{1}{8}$$

$b)$ *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que o gráfico da função* $f(x) = -x^2$ *intercepta a circunferência de raio* 1 *e centrada na origem num ponto do* $3º$ *quadrante.*

Equação da circunferência de raio 1 *centrada na origem*:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Seja $[g(x)]^2 = 1 - x^2$ *, com* $g(x) \leq 0$*, então* $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ *representa a semicircunferência compreendida no* $3º$ *e* $4º$ *quadrante.*

Devemos mostrar que $f(x) = g(x)$ *para algum ponto* (x, y) *no* $3º$ *quadrante, ou seja,* $x < 0$ *e* $y < 0$*. Como* $g(x) \leq 0$ *então a segunda condição já é satisfeita* $(y < 0)$. *Seja* $h(x) = f(x) - g(x) = -x^2 + \sqrt{1 - x^2}$.

$h(-1) = -(-1)^2 + \sqrt{1 - (-1)^2} = -1 + \sqrt{0} = -1$; $h(-1) < 0$
$h(0) = -(0)^2 + \sqrt{1 - 0^2} = 0 + \sqrt{1} = 1$; $h(0) > 0$

h *é uma função contínua no intervalo fechado* $[-1,0]$ *e* 0 *é um número entre* $h(-1)$ *e* $h(0)$*, onde* $h(-1) < 0 < h(0)$*. Então, existe algum* $x \in (-1,0)$ *tal que* $h(x) = 0$*. Portanto,* $h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$ *para algum* $x \in (-1,0)$ *onde* $x < 0$*. E como* $y = g(x) = f(x) < 0$*, então o ponto de interseção pertence ao* $3º$ *quadrante.*

$*$ *Obs: essa questão também pode ser resolvida utilizando a expressão obtida pela substituição de* $f(x)$ *na equação da circunferênica* $(x^2 + x^4 = 1)$ *e fazer o mesmo procedimento, mostrando que* $x < 0$ *e* $y < 0$.

11.10 Reavaliação da 2ª Média – 27 de Novembro de 2015

Questão 1

$a)$ *Mostre que a equação* $2x - 1 = \operatorname{sen} x$ *tem exatamente uma raíz real.*

$b)$ *Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função* $f(x) = 2\cos x - \cos(2x)\,, x \in [0,2\pi]$.

Questão 2

$a)$ *Um triângulo retângulo tem um cateto com lado de* $5m$ *e ângulo agudo oposto com* $45°$, *com um possível erro de* $\pm\, 2°$. *Use diferenciais para estimar o erro no cálculo do outro cateto.*

$b)$ *Uma partícula, inicialmente em repouso, dá uma volta completa num círculo, respeitando a função de posição* $s(t) = 2 - \cos[\ln(t+1)]$. *Determine em que instante, após o início do movimento, a partícula volta ao repouso. Qual o deslocamento neste intervalo de tempo?*

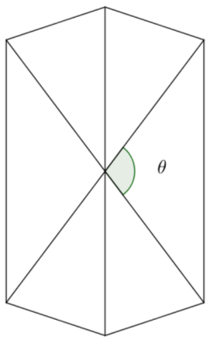
Questão 3

$a)$ *Um avião voa horizontalmente a uma altitude de* $2km$, *a* $800\ km/h$, *e passa diretamente sobre uma estação de radar. Determine a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta, quando ele está a* $3km$ *da estação.*

$b)$ *Determine os pontos críticos, o domínio e os valores extremos (absolutos e relativos) da função* $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.

Questão 4

$a)$ *Pedrinho está construindo uma pipa com 3 palitos de tamanhos* $2r\ cm$, *cruzando-se seus pontos médios, como na figura, onde o palito vertical é um eixo de simetria para o hexágono resultante. Qual o ângulo* θ *que maximiza a área da pipa?*

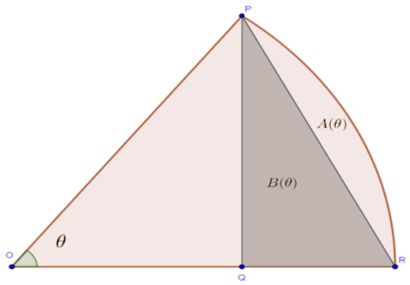


$b)$ *Os pontos* $(-1,3)$ *e* $(0,2)$ *estão no gráfico da função* f *para a qual* $f''(x) = 2 - 4x$. *Verifique se o gráfico de* f *intercepta o gráfico da função* $g(x) = \dfrac{3x^2 - 2x^3}{3}$.

Questão 5

$a)$ $Verifique\ se\ existe\ função\ derivável\ na\ qual\ f'(x) \leq 5, f(2) = -1\ e$ $f(4) = 10, quando\ restrita\ ao\ intervalo\ (2,4).$

$b)$ $A\ figura\ mostra\ o\ setor\ de\ um\ círculo\ com\ ângulo\ central\ \theta. Seja\ A(\theta)\ a$ $área\ do\ segmento\ entre\ a\ corda\ PR\ e\ o\ arco\ PR. Seja\ B(\theta)\ a\ área\ do\ triângulo$ $PQR. Encontre\ \lim_{\theta \to 0^+} \dfrac{A(\theta)}{B(\theta)}.$



Questão 1

$a)$ *Mostre que a equação* $2x - 1 = \operatorname{sen} x$ *tem exatamente uma raíz real.*

Seja $f(x) = 2x - 1 - \operatorname{sen} x$. *Devemos mostrar que* $f(x)$ *possui exatamente uma raíz real.*

$f(0) = 2.(0) - 1 - \operatorname{sen} 0 = 0 - 1 - 0 = -1$; $f(0) = -1 < 0$
$f(\pi) = 2\pi - 1 - \operatorname{sen} \pi = 2\pi - 1 - 0 = 2\pi - 1$; $f(\pi) = 2\pi - 1 > 0$

Como f é *uma composição de funções contínuas em* $\mathbb{R}$ *e, portanto,* f é *contínua no em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f é *contínua no intervalo fechado* $[0, \pi]$ *e* 0 é *um número entre* $f(0)$ *e* $f(\pi)$, *onde* $f(0) < 0 < f(\pi)$, *então pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número* $x \in (0, \pi)$ *tal que* $f(x) = 0$. *Com isso, concluimos que* f *possui uma raíz real em* $(0, \pi)$.

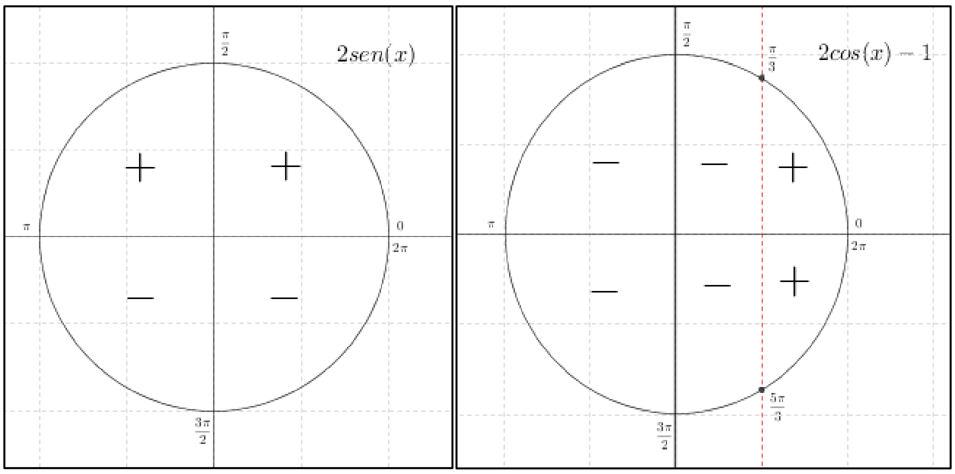
Suponha que f *possua duas raízes reais* a *e* b *tais que* $f(a) = f(b) = 0$. *Como* f é *uma função contínua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e diferenciável no intervalo aberto* (a, b), *e* $f(a) = f(b)$ *pelo Teorema de Rolle existe algum* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 2 - \cos x \, ;$$
$$-1 \le -\cos x \le 1$$
$$2 - 1 \le 2 - \cos x \le 2 + 1$$
$$1 \le f'(x) \le 3$$

$*$ *Logo,* $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *e, portanto,* f *não possui duas raízes reais e, por contradição,* f *possui no máximo* 1 *raíz real. Como já comprovamos a existência dessa raíz pelo Teorema do Valor Intermediário, então* f *possui exatamente uma raíz real.*

$b)$ *Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função* $f(x) = 2\cos x - \cos(2x)$, $x \in [0, 2\pi]$.

$f'(x) = -2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen}(2x)$
$f'(x) = -2 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen} x \, . \cos x$
$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \, (2 \cos x - 1)$



Com essa análise acima chegamos ao seguinte comportamento de $f'(x)$:

$$(0) + + + + \left(\frac{\pi}{3}\right) - - - - - - (\pi) + + + + + + \left(\frac{5\pi}{3}\right) - - - - (2\pi) \quad f'(x)$$

f *é crescente onde* $f'(x) > 0$, *portanto*, f *é crescente em* $\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right)$.
f *é decrescente onde* $f'(x) < 0$, *portanto*, f *é decrescente em* $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$.

Questão 2

a) Um triângulo retângulo tem um cateto com lado de 5m *e ângulo agudo oposto com* 45°, *com um possível erro de* $\pm$ 2°. *Use diferenciais para estimar o erro no cálculo do outro cateto.*

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{5}{x} \;;\; x = 5\operatorname{cotg}\theta \;;\; \Delta\theta = d\theta = \pm 2\frac{\pi}{180}rad = \pm\frac{\pi}{90}rad.$$

Como $d\theta \ll 1rad$, *então* $\Delta x \approx dx$. *Logo*,

$$\begin{gathered}\Delta x \approx dx \\ \Delta x \approx x'(\theta).d\theta \\ \Delta x \approx -5.\operatorname{cossec}^2\theta\,.d\theta \\ \Delta x \approx -5.\operatorname{cossec}^2\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(\pm\frac{\pi}{90}\right) \\ \Delta x \approx -5.(2).\left(\pm\frac{\pi}{90}\right) = \pm\frac{\pi}{9}m\end{gathered}$$

Logo, o erro no cálculo do comprimento do outro cateto é $\pm\frac{\pi}{9}m$.

b) Uma partícula, inicialmente em repouso, dá uma volta completa num círculo, respeitando a função de posição $s(t) = 2 - \cos[\ln(t+1)]$. *Determine em que instante, após o início do movimento, a partícula volta ao repouso. Qual o deslocamento neste intervalo de tempo?*

Inicialmente $(t = 0)$ *temos* $s(0) = 2 - \cos[\ln(1)] = 2 - \cos 0 = 2 - 1 = 1$.

$$s'(t) = v(t) = \frac{\operatorname{sen}[\ln(t+1)]}{t+1}$$

O momento em que a partícula volta ao repouso refere-se ao tempo $t > 0$, *tal que* $s'(t) = v(t) = 0$.

$v(t) = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}[\ln(t+1)] = 0$

$\ln(t+1) = 0 \Longrightarrow t = 0$ *(referente ao início do movimento)*
$\ln(t+1) = \pi \Longrightarrow t = e^{\pi} - 1$.

$* \, Portanto, t = e^{\pi} - 1$ é o instante, após o início do movimento, que a partícula volta ao repouso.

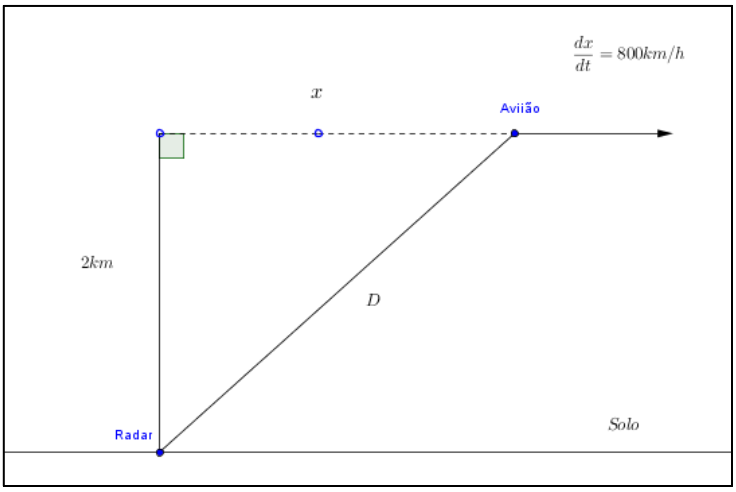
O deslocamento nesse intervalo de tempo é dado por $\Delta s = s(e^{\pi} - 1) - s(0)$.

$$s(e^{\pi} - 1) = 2 - \cos[\ln(e^{\pi})] = 2 - \cos\pi = 2 - (-1) = 3.$$

Logo, o deslocamento da partícula foi $\Delta s = 3 - 1 = 2$.

***Questão* 3**

a) Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 2km, a 800 km/h, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Determine a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta, quando ele está a 3km da estação.



Pela ilustração acima, tiramos a seguinte relação:

$$D^2 = 2^2 + x^2$$
$$D^2 = 4 + x^2$$

Quando $D = 3km$ temos ...

$$x^2 = D^2 - 4 = 9 - 4 = 5 \therefore x = \sqrt{5}km$$

Derivando a expressão inicial em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt}(D^2) = \frac{d}{dt}(4) + \frac{d}{dt}(x^2)$$
$$2D.\frac{dD}{dt} = 0 + 2x.\frac{dx}{dt}$$

Onde $\frac{dx}{dt}$ é velocidade do avião, ou seja, $800km/h$ e $\frac{dD}{dt}$ a velocidade com a qual varia a distância entre o avião e a estação de radar. Logo, para $D = 3km$ e $x = \sqrt{5}km$, temos:

$$2.(3).\frac{dD}{dt} = 2.\sqrt{5}.800$$
$$\frac{dD}{dt} = \frac{800\sqrt{5}}{3} km/h$$

$* \; Portanto, a\; distância\; entre\; o\; avião\; e\; a\; estação\; está\; aumentando\; a\; taxa\; de$
$\frac{800\sqrt{5}}{3} km/h \; quando\; o\; avião\; está\; a\; 3km\; de\; distância\; da\; estação.$

$b)$ *Determine os pontos críticos, o domínio e os valores extremos (absolutos e relativos) da função* $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.

Primeiramente devemos definir o domínio da função $f(x)$.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; 4 - x^2 \geq 0\} \therefore D(f) = \{x \in \mathbb{R};\; -2 \leq x \leq 2\}$$

$$f'(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}} \;; D(f') = \{x \in \mathbb{R};\; -2 < x < 2\}$$

Como f *é uma função contínua no intervalo fechado* $[-2,2]$ *e diferenciável no intervalo aberto* $(-2,2)$ *podemos utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos (absolutos e relativos) de* $f(x)$ *no intervalo fechado* $[-2,2]$.

Obs_1: f *é uma função ímpar, ou seja,* $f(x) = -f(-x)$

1. *Os valores de* f *nas extremidades do intervalo.*

$f(-2) = -2\sqrt{4 - (-2)^2} = -2\sqrt{4 - 4} = -2\sqrt{0} = 0.$
$f(2) = 2\sqrt{4 - (2)^2} = 2\sqrt{4 - 4} = 2\sqrt{0} = 0.$

2. *Os valores de* f *nos números críticos.*

$*$ *Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe.*

Como f *é derivável em* $(-2,2)$ *os números críticos ocorrem onde* $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \therefore x = \pm\sqrt{2}$
$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{4 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{2}.\sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2.$

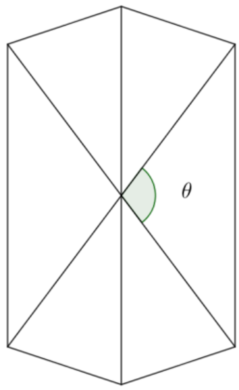
Usando o fato de que f *é uma função ímpar:* $f(-\sqrt{2}) = -f(\sqrt{2}) = -2.$

3. *Comparando os valores obtidos nas etapas* 1 *e* 2, *concluimos que*

$*$ $f(\sqrt{2}) = 2$ *é o valor máximo absoluto e local da função* f *no intervalo* $[-2,2]$;
$*$ $f(-\sqrt{2})$ *é o valor mínimo absoluto e local da função* f *no intervalo* $[-2,2]$;

Questão 4

a) Pedrinho está construindo uma pipa com 3 palitos de tamanhos 2r cm, cruzando – se seus pontos médios, como na figura, onde o palito vertical é um eixo de simetria para o hexágono resultante. Qual o ângulo θ que maximiza a área da pipa?



Como o palito vertical é um eixo de simetria podemos nos ater apenas a metade do hexágono resultante. Como os palitos estão unidos pelo seu ponto médio, então todos os triângulos observados no hexágono são isósceles com lados iguais medindo r cm.

Dado 2 lados do triângulo e o ângulo adjacente entre eles, a área desse triângulo é dada pela expressão:

$$A = \frac{1}{2} a. b. \operatorname{sen} \alpha$$

$*$ *O triângulo central possui abertura θ, com $0 < \theta < \pi$ enquanto que os outros por simetria, possui abertura de $(\pi/2 - \theta/2)$ cada um. Logo,*

$$A_1 = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} \theta \quad e\ A_2 = A_3 = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} r^2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$*$ *Portanto, a área total do hexágono resultante (pipa) é dada pela expressão:*

$$A_T(\theta) = r^2 \operatorname{sen} \theta + 2r^2 \cos \theta = r^2 \left(\operatorname{sen} \theta + 2 \cos \frac{\theta}{2}\right)$$

$$A'_T(\theta) = r^2 \left(\cos \theta - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right) \quad ; \quad \cos \theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$$

$$A'_T(\theta) = r^2 \left(-2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + 1\right)$$

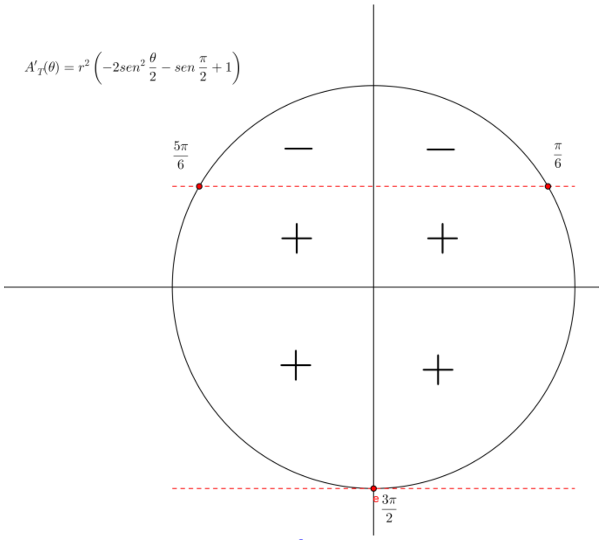
Analisando a função quadrática em incógnita $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$, *temos:*

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{1 \pm 3}{-4} \Longrightarrow \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = -1 \quad e \quad \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(-1) + + + + + + + + + (1/2) - - - - - - - (1) \quad \left(-2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + 1\right)$$

Analisando o círculo trigonométrico para a função $A'_T(\theta)$, temos:



Pelo teste da primeira derivada, para $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}$ *temos um ponto crítico associado ao valor máximo local da função da área da pipa. Logo,* $\theta = \frac{\pi}{3}$ é *o valor do ângulo* θ *que maximiza a área da pipa que Pedrinho está construindo.*

b) Os pontos $(-1,3)$ *e* $(0,2)$ *estão no gráfico da função* f *para a qual* $f''(x) = 2 - 4x$. *Verifique se o gráfico de* f *intercepta o gráfico da função* $g(x) = \frac{3x^2 - 2x^3}{3}$.

$f'(x) = 2x - 2x^2 + C_1$; $\quad f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + C_1x + C_2$

Como os pontos $(0,2)$ *e* $(-1,3)$ *pertencem ao gráfico de* f, *então* $f(0) = 2$ *e* $f(-1) = 3$. *Substituindo na expressão de* $f(x)$, *obtemos:*

$$f(0) = C_2 \therefore \; C_2 = 2$$

$f(-1) = 1 + \frac{2}{3} - C_1 + 2 = 3 \therefore C_1 = \frac{2}{3}$

$f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x + 2 \quad ; \quad g(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3$

Interseção entre $f(x)$ *e* $g(x)$:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x + 2 = x^2 - \frac{2}{3}x^3$$
$$\frac{2}{3}x + 2 = 0$$
$$x = -3$$

Interseção: $\left(-3, g(-3)\right)$;

$g(-3) = (-3)^2 - \frac{2}{3}(-3)^3 = 9 + 18 = 27.$ *Interseção* $P = (-3,27)$;

***Questão* 5**

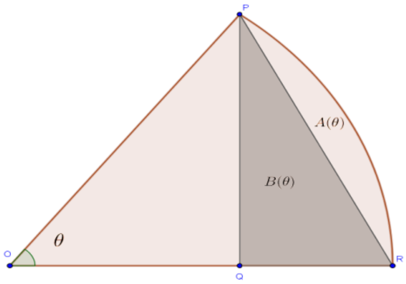
$a)\ Verifique\ se\ existe\ função\ derivável\ na\ qual\ f'(x) \leq 5, f(2) = -1\ e$
$f(4) = 10, quando\ restrita\ ao\ intervalo\ (2,4).$

$Se\ f\ é\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [2,4]\ e\ derivável\ em\ (2,4), pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio, existe\ algum\ x \in (2,4)\ tal\ que$

$$f'(x) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{10 - (-1)}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

$*\ Portanto, não\ pode\ existir\ uma\ função\ derivável\ na\ qual\ f'(x) \leq 5\ com\ essas\ condições, uma\ vez\ que, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ deve\ existir, pelo\ menos, algum\ x \in (2,4)\ tal\ que\ f'(x) = 5{,}5.$

$b)\ A\ figura\ mostra\ o\ setor\ de\ um\ círculo\ com\ ângulo\ central\ \theta. Seja\ A(\theta)\ a\ área\ do\ segmento\ entre\ a\ corda\ PR\ e\ o\ arco\ PR. Seja\ B(\theta)\ a\ área\ do\ triângulo\ PQR. Encontre\ \lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}.$



$$A(\theta) = \frac{1}{2}\theta r^2 - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\theta = \frac{r^2}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$
$$B(\theta) = \frac{1}{2} b \times h = \frac{1}{2}(r - r.\cos\theta) \times (r.\operatorname{sen}\theta) = \frac{r^2}{2}(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta$$

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta}\ ; indeterminação\ do\ tipo\ "\frac{0}{0}"$$

$Aplicando\ a\ Regra\ de\ L'Hôspital, temos:$

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta + \cos\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{1 - \cos\theta}{-2\cos^2\theta + \cos\theta + 1};$$
$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1 - \cos\theta}{-2\cos^2\theta + \cos\theta + 1} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{4\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\,(4\cos\theta - 1)} =$$
$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{4\cos\theta - 1} = \frac{\lim_{\theta \to 0^+} 1}{\lim_{\theta \to 0^+} 4\cos\theta - \lim_{\theta \to 0^+} 1} = \frac{1}{4 - 1} = \frac{1}{3}.$$

11.11 Reavaliação da 2ª Média – 28 de Novembro de 2015

***Questão* 1**

a) Uma partícula se desloca em linha reta, de acordo com a função de posição $s(t) = \ln\left[\frac{(t-2)^2+1}{5}\right]$.

i. Determine em que momento a partícula volta à posição inicial.

ii. Determine em que intervalos de tempo a partícula se move para trás ou para frente e em que ocasião ela estará em instantâneo repouso.

b) A curva $y = \operatorname{senh}[\operatorname{senh}(e^x) - e^x]$ *possui reta tangente horizontal? Caso possua, dê sua equação.*

***Questão* 2**

a) Uma piscina com borda quadrada de 10*m de lado possui um fundo inclinado com profundidade* 1*m numa lateral, crescendo até* 2*m na lateral oposta. Se a piscina está sendo enchida à velocidade de* 0,4 m^3/min, *determine a taxa de variação da altura no nível da água, no instante em que ele é de* 0,5*m na extremidade mais profunda.*

b) Seja $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x\,, & se\ 0 \le x \le \pi/2 \\ -\frac{2}{\pi}x + 2, & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$. *Mostre que* $f(0) = f(\pi)$.
Existe $c \in (0,\pi)$, *tal que* $f'(c) = 0$?

***Questão* 3**

a) Encontre as abscissas dos pontos da curva $y = -2\cos x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$, *com* $0 < x < 2\pi$, *onde a concavidade é mínima e onde a concavidade é máxima.*

b) Considere a função f *que satisfaz às seguintes condições:* $f''(x) < 0$, $f'(0) = 2$ *e* $f(0) = 1$. *Mostre que* $f(x) \le 2x + 1$, *em* $[-1,1]$.

***Questão* 4**

a) Determine os pontos críticos, o domínio e o valores extremos (absolutos e locais) para a função $f(x) = x^{1/3} + x^{4/3}$.

b) Calcule $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{\pi}{2.\cos x}\right]$.

***Questão* 5**

$a)$ *Sabemos que* $f'(x) = 1 - \dfrac{8}{x^3}$ *e que* $f(2) = 5.$ *Determine as assíntotas horizontais, verticais e oblíquas de* f, *caso existam.*

$b)$ *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$, *depois de determinar*

— *Os intervalos de crescimento e decrescimento;*
— *Os pontos de máximos e mínimos locais;*
— *As assíntotas, caso existam;*
— *Os intervalos onde a concavidade é para cima ou para baixo;*
— *Os pontos de inflexão.*

***Questão* 1**

$a)$ *Uma partícula se desloca em linha reta, de acordo com a função de posição*
$s(t) = \ln\left[\dfrac{(t-2)^2+1}{5}\right]$.

$i.$ *Determine em que momento a partícula volta à posição inicial.*
A posição inicial da partícula é $s(0) = \ln\left[\dfrac{(0-2)^2+1}{5}\right] = \ln\left[\dfrac{4+1}{5}\right] = \ln 1 = 0$
Queremos determinar quando $s(t) = 0$ *para* $t \neq 0$. *Logo,*

$$s(t) = 0 \Longrightarrow \ln\left[\frac{(t-2)^2+1}{5}\right] = 0 \Rightarrow \frac{(t-2)^2+1}{5} = e^0 = 1 \Rightarrow (t-2)^2+1 = 5$$

$(t-2)^2 = 4 \therefore (t-2) = \pm 2 \therefore t = 0$ *ou* $t = 4$.

Portanto, em $t = 4$ *a partícula volta à posição inicial.*

$ii.$ *Determine em que intervalos de tempo a partícula se move para trás ou para frente e em que ocasião ela estará em instantâneo repouso.*

$$v(t) = s'(t) = \frac{5}{(t-2)^2+1} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2(t-2) = \frac{2(t-2)}{(t-2)^2+1}$$

Analisando o comportamento (sinal) da função velocidade, temos:

$$(0) - - - - - - - (2) + + + + + + + + + \quad v(t)$$

Portanto, onde $v(t) < 0$ *a partícula se move para trás, ou seja, em* $t \in (0,2)$.
Logo, $v(t) > 0$ *significa dizer que a partícula se move para frente em* $t \in (2, +\infty)$. *E excepcionalmente em* $t = 2$ *a partícula encontra-se em instantâneo repouso* $(v(t) = 0)$.

$b)$ *A curva* $y = \operatorname{senh}[\operatorname{senh}(e^x) - e^x]$ *possui reta tangente horizontal? Caso possua, dê sua equação.*

$$y' = [e^x.\cosh(e^x) - e^x].\cosh[\operatorname{senh}(e^x) - e^x]$$
$$y' = e^x[\cosh(e^x) - 1]\cosh[\operatorname{senh}(e^x) - e^x]$$

Devemos verificar se existe $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $y' = 0$. *Logo,*

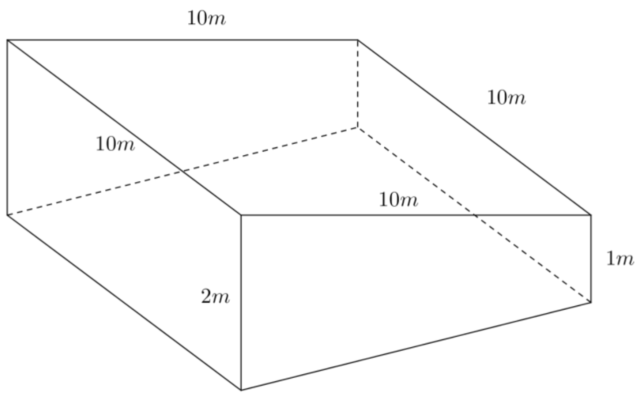
$$y' = 0 \Longrightarrow \begin{cases} e^x = 0 \\ \cosh(e^x) - 1 = 0 \\ \cosh[\operatorname{senh}(e^x) - e^x] = 0 \end{cases};$$

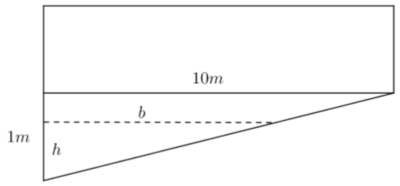
$*$ Obs_1: $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *Portanto, a primeira equação não tem solução.*
$*$ Obs_2: $\cosh(e^x) > 1, \forall x \in \mathbb{R}$. *Logo,* $\cosh(e^x) - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *Portanto, a segunda equação não tem solução.*
$*$ Obs_2: $\cosh[\operatorname{senh}(e^x) - e^x] > 1, \forall x \in \mathbb{R}$. *Portanto, a terceira equação não tem solução.*

$Com\ essas\ análises, não\ existe\ x \in \mathbb{R}\ tal\ que\ y' = 0\ e, portanto, o\ gráfico\ de$
$y = \text{senh}[\text{senh}(e^x) - e^x]\ não\ possui\ reta\ tangente\ horizontal.$

Questão 2

$a)\ Uma\ piscina\ com\ borda\ quadrada\ de\ 10m\ de\ lado\ possui\ um\ fundo\ inclinado\ com\ profundidade\ 1m\ numa\ lateral, crescendo\ até\ 2m\ na\ lateral\ oposta. Se\ a\ piscina\ está\ sendo\ enchida\ à\ velocidade\ de\ 0{,}4\ m^3/min, determine\ a\ taxa\ de\ variação\ da\ altura\ no\ nível\ da\ água, no\ instante\ em\ que\ ele\ é\ de\ 0{,}5m\ na\ extremidade\ mais\ profunda.$





$$V = A_{Transversal} \times Comprimento = \frac{1}{2} h.b.10 = 5hb$$

$Pelo\ triângulo\ ilustrado\ na\ figura\ à\ direita, temos:$

$$\frac{10}{1} = \frac{b}{h} \therefore b = 10h \Longrightarrow V = 50h^2$$

$Pela\ regra\ da\ cadeia,$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}.\frac{dh}{dt}$$
$$0{,}4 = 100h.\frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{250h}$$

$Quando\ a\ água\ está\ com\ 0{,}5m\ de\ profundidade, temos:$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=0{,}5m} = \frac{1}{125} m/min = 0{,}008\ m/min$$

$A\ taxa\ de\ variação\ da\ altura\ no\ nível\ da\ água\ é\ de\ 0{,}008\ m/min\ \ quando\ ela\ está\ 0{,}5m\ de\ profundidade\ na\ extremidade\ mais\ profunda.$

$b)$ *Seja* $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x\,, & se\ 0 \le x \le \pi/2 \\ -\dfrac{2}{\pi}x + 2, & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$. *Mostre que* $f(0) = f(\pi)$.
Existe $c \in (0,\pi)$, *tal que* $f'(c) = 0$?

$f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \quad ; \quad f(\pi) = -\dfrac{2}{\pi}\pi + 2 = -2 + 2 = 0. \ ; \quad f(0) = f(\pi) = 0.$

Se f *é uma função contínua no intervalo fechado* $[0,\pi]$ *e diferenciável em* $(0,\pi)$, *e* $f(0) = f(\pi)$, *pelo Teorema de Rolle deve existir algum* $c \in (0,\pi)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x\,, & se\ 0 < x < \pi/2 \\ -\dfrac{2}{\pi}, & se\ \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

$*$ *Obs*: $f'(x) = 0 \Longrightarrow \cos x = 0 \therefore x = \dfrac{\pi}{2}$. *Entretanto*, $f'_+\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{\pi}$ *e* $f'_-\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
Como as derivadas laterais existem, mas são diferentes, então f *não é derivável em* $x = \pi/2$.

Portanto, não existe $c \in (0,\pi)$ *tal que* $f'(c) = 0$ *e isso não contradiz o Teorema de Rolle, uma vez que,* f *não é derivável em* $(0,\pi)$.

Questão 3

$a)$ *Encontre as abscissas dos pontos da curva* $y = -2\cos x - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$, *com* $0 < x < 2\pi$, *onde a concavidade é mínima e onde a concavidade é máxima.*

Devemos encontrar os valores de x *tal que* $f''(x)$ *seja máximo ou mínimo, ou seja, faremos o estudo de* $f'''(x)$ *para encontrar os números críticos associados aos valores máximos e mínimos locais da concavidade.*

$y = f(x) = -2\cos x - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$
$f'(x) = 2\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$
$f''(x) = 2\cos x + \operatorname{sen}(2x)$

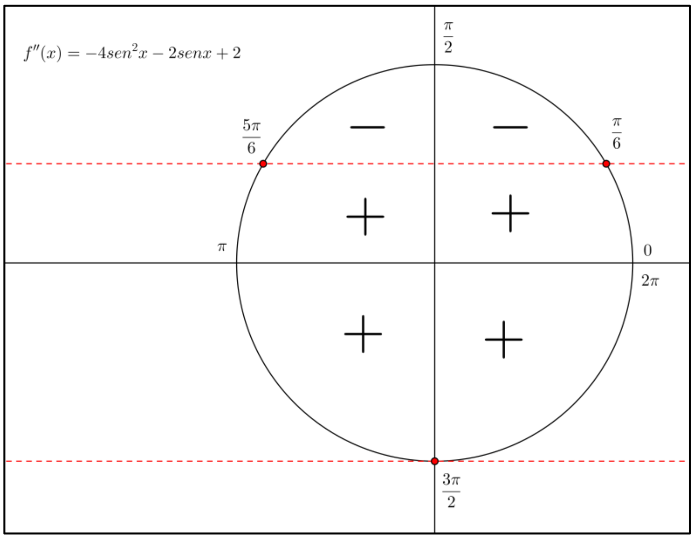
$f'''(x) = -2\operatorname{sen} x + 2\cos(2x) \ ; \ \cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \ ;$
$f'''(x) = -4\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 2$

$$\Delta = 4 + 32 = 36$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \pm 6}{-8} \therefore \operatorname{sen} x_1 = -1 \ ou \ \operatorname{sen} x_2 = \frac{1}{2}$$

$* \operatorname{sen} x_1 = -1 \therefore x_1 = \dfrac{3\pi}{2} \quad ; * \operatorname{sen} x_2 = \dfrac{1}{2} \therefore x_2 = \dfrac{\pi}{6} \ \ e \ \ x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$

Analisando a função $f'''(x)$ *pelo círculo trigonométrico abaixo, temos*:



Com a análise acima, concluimos que

$f''(x)$ *é crescente em* $(0, \pi/6) \cup (5\pi/6\,, 2\pi)$ *e*
$f''(x)$ *é decrescente em* $(\pi/6\,, 5\pi/6)$

Com isso temos que $x = \dfrac{3\pi}{2}$ *é apenas um número crítico, não está associado a nenhum valor extremo de* $f''(x)$*. Entretanto, pelo teste da primeira derivada de* $f''(x)$ *temos em* $x = \dfrac{\pi}{6}$ *um valor máximo local e em* $x = \dfrac{5\pi}{6}$ *um valor mínimo local.*

Portanto, em $x = \dfrac{\pi}{6}$ *a concavidade é máxima e em* $x = \dfrac{5\pi}{6}$ *a concavidade é mínima.*

b) Considere a função f *que satisfaz às seguintes condições*: $f''(x) < 0$, $f'(0) = 2$ *e* $f(0) = 1$*. Mostre que* $f(x) \leq 2x + 1$*, em* $[-1,1]$.

Seja $h(x) = f(x) - 2x - 1$*. Devemos mostrar que* $h(x) \leq 0$ *em* $[-1,1]$

$$h(-1) = f(-1) + 1 \text{ e } h(1) = f(1) - 3.$$

$h'(x) = f'(x) - 2$
$h''(x) = f''(x) < 0$

Como $h''(x) < 0$ *em* $(-1,1)$ *então,* $h'(x)$ *é decrescente em* $(-1,1)$*. Logo,* $h'(0) = f'(0) - 2 = 2 - 2 = 0$*. E como* $h'(x)$ *é decrescente então, para* $x > 0$, $h'(x) < 0$ *e para* $x < 0$, $h'(x) > 0$*. Com isso, podemos concluir que* $h(x)$ *é crescente em* $(-1,0)$ *e decrescente em* $(0,1)$*, em que* $x = 0$ *é um número crítico associado a um valor máximo local, pelo teste da primeira derivada.*

$$h(0) = f(0) - 2.0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0.$$

Como $h(0) = 0$ *é o valor máximo local e absoluto de* $h(x)$*, pois, pela análise de* $h'(x)$ *temos* $h(-1) < h(0)$ *e* $h(0) > h(1)$*, consequentemente, para todo o intervalo fechado* $[-1,1]$*,* $h(x) \le h(0) \Longrightarrow h(x) \le 0$*. Portanto,*

$$f(x) \le 2x + 1 \ \ em\ [-1,1]$$

Questão 4

a) *Determine os pontos críticos, o domínio e o valores extremos (absolutos e locais) para a função* $f(x) = x^{1/3} + x^{4/3}$. $D(f) = \mathbb{R}$

Um número crítico de uma função f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe.*

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} = \frac{1+4x}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad D(f') = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + 4x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$ *e* $f'(x) \nexists$ *para* $x = 0$.

Como $x = -\frac{1}{4}$ *e* $x = 0$ *pertencem ao domínio de* f*, ambos são números críticos da função* $f(x)$.

Pontos críticos: $(0,0)$ *e* $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$

Analisando o crescimento e decrescimento da função $f(x)$*, temos:*

$$------\left(-\frac{1}{4}\right) +++ (0) ++++++++ \quad f'(x)$$

Pelo teste da primeira derivada, $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ *é um valor mínimo local e absoluto de* f *e em* $x = 0$ *temos um ponto crítico que nem é de máximo nem de mínimo local.*

b) *Calcule* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{\pi}{2.\cos x}\right]$; *Indeterminação do tipo* "$\infty - \infty$"

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2x.\cos x - \pi \operatorname{cotg} x}{2\cos x\,.\operatorname{cotg} x}\right] \text{; } \textit{indeterminação tipo } "\frac{0}{0}"$$

$* \cos x = \operatorname{cotg} x\,.\operatorname{sen} x$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2x.\cos x - \pi \operatorname{cotg} x}{2\cos x\,.\operatorname{cotg} x}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2x.\operatorname{cotg} x \operatorname{sen} x - \pi \operatorname{cotg} x}{2\cos x\,.\operatorname{cotg} x}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2x.\operatorname{sen} x - \pi}{2\cos x}\right];$$

Aplicando a Regra de L'Hôspital, temos:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2x.\operatorname{sen}x-\pi}{2\cos x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2\operatorname{sen}x+2x.\cos x}{-2.\operatorname{sen}x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[-1+x.\operatorname{cotg}x]=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}-1+\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}x.\operatorname{cotg}x=-1+0=-1.$$

Portanto, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x}{\operatorname{cotg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right]=-1.$

***Questão* 5**

a) Sabemos que $f'(x)=1-\frac{8}{x^3}$ *e que* $f(2)=5$. *Determine as assíntotas horizontais, verticais e oblíquas de* f, *caso existam.*

$$f(x)=x+\frac{4}{x^2}+C\ ;f(2)=5=2+1+C\therefore C=2$$

$$f(x)=x+\frac{4}{x^2}+2=\frac{x^3+2x^2+4}{x^2}\ ;\ D(f)=\{x\in\mathbb{R};x\neq 0\}$$

Assíntotas Verticais:

Dizemos que a reta $x=a$ *é uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty\quad ou\quad \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$$

Pela definição de continuidade de uma função no número $x=a$, *devemos procurar essa assíntota onde a função* f *é descontínua. Logo, verifcamos se a reta* $x=0$ *é uma assíntota.*

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{x^3+2x^2+4}^{\to 4}}{\underbrace{x^2}_{\to 0^+}}=+\infty$$

Portanto, a reta $x=0$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

Assíntotas Horizontais:

Dizemos que a reta $y=L$ *é uma assíntota horizontal se ou* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ *ou* $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+4}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(x+2+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2+\frac{4}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2+4}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(x+2+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\frac{4}{x}\right) = -\infty$$

Portanto, não há assíntotas horizontal ao gráfico de $f(x)$.

Assíntotas Oblíquas:

Dizemos que a reta $y = ax + b$ *é uma assíntota oblíqua ao gráfico da função* $f(x)$ *se, somente se,* $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$

$$f(x) = (x+2) + \frac{4}{x^2} \;\; ; \;\; f(x) - (x+2) = \frac{4}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (x+2)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

Portanto, a reta $y = x + 2$ *é uma assíntota oblíqua ao gráfico de* $f(x)$.

Assíntotas do gráfico da função $f(x)$: *as retas* $x = 0$ *e* $y = x + 2$.

$b)$ *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$, *depois de determinar*
—*Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
—*Os pontos de máximos e mínimos locais*;
—*As assíntotas, caso existam*;
—*Os intervalos onde a concavidade é para cima ou para baixo*;
—*Os pontos de inflexão*.

1) $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -2 \text{ e } x \neq 2\}$;

2) *Interseções com os eixos coordenados*: $(0,0)$

$$f'(x) = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2} \;\; ; \qquad f''(x) = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

3) *Intervalos de crescimento e decrescimento*;

$$\begin{array}{ll}
- - - - - - - - - - - - - - - - - - & (-x^2-4) \\
+ + + + (-2) + + + + + (2) + + + + + & (x^2-4)^2 \\
- - - - (-2) - - - - - (2) - - - - - & f'(x)
\end{array}$$

Com a análise acima, concluimos que f *é sempre decrescente em seu domínio.*

4) *Os pontos de máximos e mínimos locais*;

Os pontos de máximos e minimos locais ocorrem nos números críticos de uma função.

Um número de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c) \nexists$.

Analisando $f'(x)$ temos que a derivada não existe em $x = -2$ e em $x = 2$, mas esses números não pertencem ao domínio da função. Portanto, não há pontos de máximos e mínimos locais em $f(x)$.

5) *Assíntotas*:

$*$ *Verticais*:

Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Como esssas assíntotas ocorrem em pontos de descontinuidade da função, vamos verificar se as retas $x = -2$ e $x = 2$ são assíntotas.

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{\overbrace{x}^{\overset{-2}{\uparrow}}}{\underbrace{(x-2)}_{\underset{-4}{\downarrow}}\underbrace{(x+2)}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^-} \frac{\overbrace{x}^{\overset{-2}{\uparrow}}}{\underbrace{(x-2)}_{\underset{-4}{\downarrow}}\underbrace{(x+2)}_{\underset{0^-}{\downarrow}}} = -\infty$$

Portanto, a reta $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $f(x)$.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\overbrace{x}^{\overset{2}{\uparrow}}}{\underbrace{(x-2)}_{\underset{0^+}{\downarrow}}\underbrace{(x+2)}_{\underset{4}{\downarrow}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\overbrace{x}^{\overset{2}{\uparrow}}}{\underbrace{(x-2)}_{\underset{0^-}{\downarrow}}\underbrace{(x+2)}_{\underset{4}{\downarrow}}} = -\infty$$

Portanto, a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $f(x)$.

$*$ *Horizontal*:

Dizemos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal se ou $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x}}$$
$$= \frac{0}{1-0} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x}}$$
$$= \frac{0}{1-0} = 0$$

$Portanto, a\ reta\ y = 0$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

6) $Concavidade\ e\ Pontos\ de\ Inflexão$:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

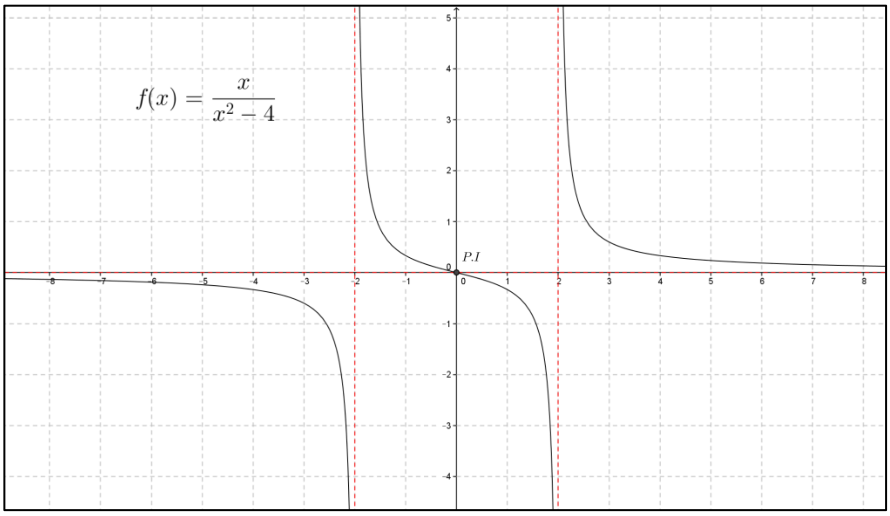
$$\begin{array}{ll} -------(0)++++++++ & (2x) \\ +++++++++++++++++ & (x^2+12) \\ +++(-2)-----(2)+++++ & (x^2-4)^3 \\ ---(-2)++(0)--(2)++++ & f''(x) \end{array}$$

$Com\ a\ análise\ acima, concluimos\ que$

$f\ possui\ C.V.C\ em\ (-2{,}0) \cup (2,+\infty)$ $;C.V.C - Concavidade\ Voltada\ para\ Cima$
$f\ possui\ C.V.B\ em\ (-\infty,-2) \cup (0{,}2)$ $;C.V.B - Concavidade\ Voltada\ para\ Baixo$

$*\ Em\ x = 0\ ocorre\ mudança\ na\ direção\ da\ concavidade\ e, portanto, (0{,}0)$ é $um\ ponto\ de\ inflexão\ da\ função\ f.\ Embora\ em\ x = -2\ e\ x = 2\ ocorre\ mudança\ na\ direção\ da\ concavidade, estes\ não\ pertencem\ ao\ domínio\ de\ f. Logo, (0{,}0)$ é o único $ponto\ de\ inflexão\ de\ f.$

7) $Esboço\ gráfico$:



11.12 Avaliação Final – 03 de Dezembro de 2015

Questão 1

$a)$ *Verifique se o existe* $\lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}$.

$b)$ *Seja* f *definida em* $\mathbb{R}$ *e tal que, para todo* x, $|f(x)-3| \leq 2|x-1|$. *Calcule* $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Questão 2

$a)$ *Mostre que a equação* $x^2 = \pi \cos x$ *tem, pelo menos uma raíz real.*

$b)$ *Seja* $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. *Prove que* $\operatorname{tg} c > c$.

Questão 3

$a)$ *Um triângulo isósceles tem lados iguais a* 3,2; 3,2 *e* 2. *Estime sua área, usando aproximações lineares.*

$b)$ *A função* $f(x) = |x-1|(\log_3 x)$ *é derivável em* $x = 1$? *Em caso afirmativo, determine* $f'(1)$.

Questão 4

$a)$ *Sendo* $f(x) = \log_x 2$, *encontre uma equação para a reta normal à curva* $y = f(x)$ *no ponto de ordenada* 1.

$b)$ *Encontre a derivada da função* $f(x) = x^{\ln x}$.

Questão 5

$a)$ *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função*

$$f(x) = \operatorname{sen} x \,.\, \ln(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x,$$

no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. ***Nota***: *Tome* $\ln 2 = 0{,}69$.

$b)$ *Determine uma equação para a reta normal à curva* $x^3y^3 - 2xy = 6x + y + 1$, *no ponto em que* $x = 0$.

Questão 6

$a)$ *Sendo* $f(x) = \ln[\cos(\operatorname{arcsec} x)]$, *determine* $f'(2)$.

$b)$ *Uma função* f *tem segunda derivada* $f''(x) = 6(x-1)$. *Encontre a função* f, *sabendo-se que seu gráfico passa pelo ponto* $(2,1)$ *e que nesse ponto ele é tangente à reta* $y = 3x - 5$.

Questão 7

$a)$ *Um dos vértices de um retângulo, que tem por abscissa o número* $\ln 2$, *está situado sobre o gráfico da função* $f(x) = 5\operatorname{tgh} x$ *e é simétrico dos outros três em relação aos eixos coordenados ou em relação à origem. Determine a área deste retângulo.*

$b)$ *Seja* f *uma função definida por* $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}, & x = 0. \end{cases}$ *Mostre que* f *é contínua em* $x = 0$.

Questão 8. *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{4x^2+8}{-2x-2}$, *tendo*

$$f'(x) = -\frac{8(x^2+x-2)}{(-2x-1)^2} \quad e \quad f''(x) = -\frac{72}{(2x+1)^3}$$

apontando:

(a) *As assíntotas horizontais, verticais e oblíquas, se existirem.*
(b) *Os intervalos onde* f *é crescente e onde* f *é decrescente e os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*
(c) *Os intervalos onde o gráfico de* f *é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.*

Questão 9. *Um pedaço de arame com comprimento* l *será dobrado para formar um círculo, um quadrado ou ambos (dividindo-se o arame em dois pedaços). Determine como dividir o arame para que a área total contornada seja máxima ou seja mínima.*

Questão 10. *Uma esfera está inscrita num cubo cuja diagonal cresce à taxa de.* $3\,mm/s$. *Com que velocidade estará crescendo o volume da esfera, no instante em que a aresta medir* $\sqrt[4]{3}mm$?

$\boldsymbol{Questão\ 1.}$

$(a) Verifique\ se\ o\ existe\ \lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}$; $\quad * |x-5| = \begin{cases} x-5, & x \geq 5 \\ -(x-5), & x < 5 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x\to 5^+}\frac{x-5}{x-5} = \lim_{x\to 5^+} 1 = 1$$

$* Obs: se\ x \to 5^+, então\ x > 5. Logo, |x-5| = x-5$

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x\to 5^-}\frac{-(x-5)}{x-5} = -\lim_{x\to 5^-}\frac{x-5}{x-5} = -\lim_{x\to 5^-} 1 = -1.$$

$* Obs: se\ x \to 5^-, então\ x < 5. Logo, |x-5| = -(x-5)$

$Como\ os\ limites\ laterais\ existe, mas\ são\ diferentes, dizemos\ que\ \lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}$ $não\ existe.$

Questão 1.

(b) Seja f definida em $\mathbb{R}$ e tal que, para todo x, $|f(x)-3| \leq 2|x-1|$. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Pela desigualdade modular, temos:

$$-2|x-1| \leq f(x)-3 \leq 2|x-1|$$
$$-2|x-1|+3 \leq f(x) \leq 2|x-1|+3$$

Se $x \geq 1$, temos que $x-1 \geq 0$ e, portanto, $|x-1| = x-1$. Logo,

$$-2(x-1)+3 \leq f(x) \leq 2(x-1)+3$$
$$-2x+5 \leq f(x) \leq 2x+1$$

Se $-2x+5 \leq f(x) \leq 2x+1$ quando x está próximo de 1 pela direita de 1 (exceto possivelmente em 1) e $\lim_{x\to 1^+}(-2x+5) = \lim_{x\to 1^+}(2x+1) = 3$, então pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3.$$

Se $x < 1$, temos que $x-1 < 0$ e, portanto $|x-1| = -(x-1)$. Logo,

$$2(x-1)+3 \geq f(x) \geq -2(x-1)+3$$
$$2x+1 \geq f(x) \geq -2x+5$$
$$-2x+5 \leq f(x) \leq 2x+1$$

Se $-2x+5 \leq f(x) \leq 2x+1$ quando x está próximo de 1 pela esquerda de 1 (exceto possivelmente em 1) e $\lim_{x\to 1^-}(-2x+5) = \lim_{x\to 1^-}(2x+1) = 3$, então pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$$

Como os limites laterais existem e são iguais, isto é, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$, então $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe e $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

Questão 2

(a) *Mostre que a equação* $x^2 = \pi \cos x$ *tem, pelo menos uma raíz real.*

Seja $f(x) = x^2 - \pi \cos x$. *Devemos mostrar que* f *possui pelo menos uma raíz real. Sabendo − se que* $f(0) = -\pi$ *e* $f(\pi) = \pi^2 + \pi$, *temos* $f(0) < 0$ *e* $f(\pi) > 0$.

Como a função f *é constituída por funções polinomial e trigonométrica, ambas contínuas em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[0, \pi]$ *e* 0 *é um número entre* $f(0)$ *e* $f(\pi)$, *então existe algum* $x \in (0, \pi)$ *tal que* $f(x) = 0$. *(Teorema do Valor Intermediário)*

Como $f(x) = 0$ *para algum* $x \in (0, \pi)$, *então …*

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - \pi \cos x = 0 \therefore x^2 = \pi \cos x \ , \text{para algum } x \in (0, \pi).$$

Com isso mostramos que a equação dada possui pelo menos uma raiz real.

$\boldsymbol{Questão\ 2}$

(b) $Seja\ c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). Prove\ que\ \operatorname{tg} c > c.$

$Seja\ f(c) = \operatorname{tg} c - c.\ Queremos\ provar\ que\ f(c) > 0, \forall c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

$$f'(c) = \sec^2 c - 1.$$

$Como\ \sec^2 c > 1, \forall c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), então\ f'(c) > 0\ em\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

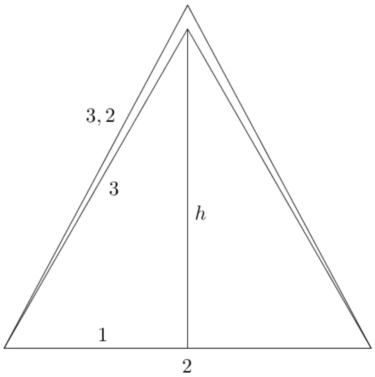
$Como\ f'(c) > 0\ em\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right), pelo\ Teste\ da\ Primeira\ Derivada, f\ é\ crescente\ no$ $intervalo\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\ e, portanto, f(c) > f(0), \forall c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

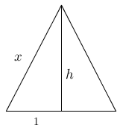
$Logo,$

$$\begin{gathered} f(c) > f(0) \\ \operatorname{tg} c - c > \operatorname{tg} 0 - 0 \\ \operatorname{tg} c - c > 0 \\ \operatorname{tg} c > c \qquad , \forall c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{gathered}$$

$\boldsymbol{Questão\ 3}$

(a) *Um triângulo isósceles tem lados iguais a* $3{,}2; 3{,}2$ *e* 2. *Estime sua área, usando aproximações lineares.*





Do triângulo à direita da imagem, temos:

$$x^2 = 1^2 + h^2$$
$$h^2 = x^2 - 1$$
$$h = \sqrt{x^2 - 1}$$

A área do triângulo isósceles com lados iguais medindo C:

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times \sqrt{x^2 - 1}}{2}$$
$$A(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Para $x = 3$, temos $A(3) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ u.A.$

$$A'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \ ; \quad A'(3) = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Por aproximação linear ou linearização em $x = 3$, temos:

$$L(x) = A(3) + A'(3).(x - 3)$$
$$L(x) = 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}(x - 3)$$

Para $x = 3{,}2$, temos:

$$L(3{,}2) = 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}(3{,}2 - 3)$$
$$L(3{,}2) = 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}(0{,}2)$$
$$L(3{,}2) = 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}.\frac{2}{10}$$
$$L(3{,}2) = 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{20} = \frac{43\sqrt{2}}{20}\ u.A$$

Logo, a área estimada para o triângulo isósceles acima é $\dfrac{43\sqrt{2}}{20}\ u.A$

$\textit{Questão 3}$

(b) *A função* $f(x) = |x-1|(\log_3 x)$ *é derivável em* $x = 1$? *Em caso afirmativo, determine* $f'(1)$.

Domínio da função f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\log_3 x\,, & x > 1 \\ -(x-1)\log_3 x\,, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Como f *é contínua onde está definida, então* f *é contínua em* $(0, +\infty)$.

Se $x > 1$, *então*:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[(x-1)\log_3 x] = \log_3 x + \frac{x-1}{x.\ln 3}$$

Se $0 < x < 1$, *então*:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[-(x-1)\log_3 x] = -\log_3 x - \frac{(x-1)}{x.\ln 3}$$

Logo, uma expressão para derivada da função f *é*:

$$f'(x) = \begin{cases} \log_3 x + \dfrac{x-1}{x.\ln 3}, & x > 1 \\ -\log_3 x - \dfrac{(x-1)}{x.\ln 3}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Analisando a diferenciabilidade em $x = 1$, *temos*:

$$f'_+(1) = \log_3 1 + \frac{1-1}{\ln 3} = 0 + 0 = 0.$$

$$f'_-(1) = -\log_3 1 - \frac{1-1}{\ln 3} = -0 - 0 = 0.$$

Como f *é contínua em* $x = 1$ *e as derivadas laterais existem e são iguais, isto é,* $f'_+(1) = f'_-(1)$, *então dizemos que* f *é diferenciável em* $x = 1$ *e* $f'(1) = 0$.

Questão 4

(a) *Sendo* $f(x) = \log_x 2$, *encontre uma equação para a reta normal à curva* $y = f(x)$ *no ponto de ordenada* 1.

$$f(x) = 1 \Longrightarrow \log_x 2 = 1 \Longrightarrow 2 = x^1 \therefore x = 2. \ \ Ponto\ P(2,1)$$

$$f(x) = \log_x 2 = \frac{\ln 2}{\ln x}\ (Mudança\ de\ Base)$$

$$f'(x) = -\frac{\ln 2}{x(\ln x)^2}\ ;\quad f'(2) = -\frac{\ln 2}{2(\ln 2)^2} = -\frac{1}{2\ln 2} = -\frac{1}{\ln 2^2} = -\frac{1}{\ln 4}.$$

O coeficiente angular da reta normal em $x = 2$ é $m_n = -\dfrac{1}{f'(2)} = \ln 4$.

Equação da reta normal ao gráfico de $f(x)$ *no ponto* $P(2,1)$:

$$y - 1 = \ln 4\,(x-2)$$
$$y = x.\ln 4 - 2.\ln 4 + 1$$
$$y = x.\ln 4 - \ln 16 + 1$$

$\boldsymbol{Quest\text{ão}\ 4}$

(b) *Encontre a derivada da função* $f(x) = x^{\ln x}$.

Domínio da função f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

$\ln f(x) = \ln x^{\ln x}$
$\ln f(x) = (\ln x). \ln x$
$\ln f(x) = (\ln x)^2$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2. \ln x . \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x)\left[2. \ln x . \frac{1}{x}\right]$$

$$f'(x) = x^{\ln x}[2. \ln x . x^{-1}]$$

$$f'(x) = 2x^{\ln x - 1}. \ln x$$

$\textbf{\textit{Questão}}$ 5

(a) *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função*

$$f(x) = \operatorname{sen} x \, . \ln(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x$$

no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. ***Nota***: *Tome* $\ln 2 = 0{,}69$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \operatorname{sen} x > 0\}$$
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \ \ com\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Como f é uma composição de função trigonométrica e logarítmica, sendo as trigonométricas definidas em $\mathbb{R}$ e a função composta $\ln(\operatorname{sen} x)$ definida apenas para o logaritmando maior do que. Portanto, a continuidade da função f é definida pelo seu domínio. Logo, para $k = 0$, temos que f é contínua em $(0, \pi)$ e, portanto, f é contínua no intervalo fechado $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1) *Os valores de f nos extremos do intervalo*:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\left[\ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{1}{2}[-\ln 2 - 1] = -\frac{1{,}69}{2} = -0{,}845.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[\ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) - 1\right] = 1[\ln 1 - 1] = -1$$

2) *Os valores de f nos números críticos de f em* $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

"*Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe*"

$$f'(x) = \cos x\,[\ln(\operatorname{sen} x) - 1] + \operatorname{sen} x \left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right] \ ; \ \operatorname{sen} x \neq 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$f'(x) = \cos x\,[\ln(\operatorname{sen} x) - 1] + \cos x$$
$$f'(x) = \cos x \, . \ln(\operatorname{sen} x)$$

Como f é diferenciável em $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ se f possui algum número crítico c nesse intervalo, então $f'(c)$ existe e $f'(c) = 0$. Logo,

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ ou \\ \ln(\operatorname{sen} x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ ou \\ \operatorname{sen} x = 1 \end{cases} \therefore x = \frac{\pi}{2} \ ; (\textit{não pertence ao intervalo!})$$

Logo, f não possui números críticos em $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Comparando os valores obtidos, -1 é o valor mínimo absoluto e $-0{,}845$ é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[\pi/6, \pi/2]$.

$\boldsymbol{Quest\tilde{a}o\ 5}$

$(b) Determine\ uma\ equação\ para\ a\ reta\ normal$ à $curva\ x^3y^3 - 2xy = 6x + y + 1,$ $no\ ponto\ em\ que\ x = 0.$

$Ponto\ em\ questão: P(0, -1)$

$Derivando\ a\ expressão\ da\ curva\ implicitamente, obtemos:$

$$\frac{d}{dx}(xy)^3 - 2.\frac{d}{dx}(xy) = 6.\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$3(xy)^2[y + xy'] - 2(y + xy') = 6 + y' + 0$$

$$y'[3x(xy)^2 - 2x - 1] = 6 + 2y - 3y(xy)^2$$

$$y' = \frac{6 + 2y - 3y(xy)^2}{3x(xy)^2 - 2x - 1}$$

$No\ ponto\ P(0, -1), temos\ y' = -4. Logo, o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal$ $em\ P(0, -1)$ é $m_n = \frac{1}{4}.$

$Equação\ da\ reta\ normal$ à $curva\ em\ P:$

$$y - (-1) = \frac{1}{4}(x - 0)$$
$$y + 1 = \frac{1}{4}x$$
$$y = \frac{1}{4}x - 1$$
$$4y - x + 4 = 0$$

Questão 6

(a) *Sendo* $f(x) = \ln[\cos(\operatorname{arcsec} x)]$, *determine* $f'(2)$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 1\}$$

$* \operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(x) = \ln\left[\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$

$f(x) = \ln\frac{1}{x}$

$f(x) = -\ln x$

$f'(x) = -\frac{1}{x}$

$f'(2) = -\frac{1}{2}.$

– –

$*$ *Caso fôssemos derivar pela regra da cadeia, teríamos*:

$f'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsec} x)}.[-\operatorname{sen}(\operatorname{arcsec} x)].\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$f'(x) = -\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x)}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\theta = \operatorname{arcsec} x \Longrightarrow \sec\theta = x\,;\;\; \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta - 1 \Longrightarrow \operatorname{tg}^2\theta = x^2 - 1 \therefore \operatorname{tg}\theta = \sqrt{x^2-1}$

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x}\,;\;\; f'(2) = -\frac{1}{2}.$$

$Questão\ 6$

(b) *Uma função f tem segunda derivada $f''(x) = 6(x-1)$. Encontre a função f, sabendo − se que seu gráfico passa pelo ponto $(2,1)$ e que nesse ponto ele é tangente à reta $y = 3x - 5$.*

A antiderivada mais geral para $f''(x)$ é:

$$f'(x) = 3(x-1)^2 + C$$

Pelo enunciado temos que a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2,1)$ é 3. Logo, $f'(2) = 3$.

$$f'(2) = 3(2-1)^2 + C = 3$$
$$3(1)^2 + C = 3$$
$$C = 0$$

$$f'(x) = 3(x-1)^2$$

A antiderivada mais geral para $f'(x)$ é:

$$f(x) = (x-1)^3 + K$$

Como o gráfico de f passa pelo ponto $(2,1)$ então $f(2) = 1$.

$$f(2) = (2-1)^2 + K = 1$$
$$1^2 + K = 1$$
$$K = 0$$

Portanto, $f(x) = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Questão 7

$(a)\ f(x) = 5\,\text{tgh}\, x$ *; o ponto de abscissa* $x = \ln 2$ *juntamente com os pontos simétricos a ele em relação aos eixos coordenados e à origem, formam os 4 vértices de um retângulo. Determinar a área do retângulo.*

$$f(\ln 2) = 5\,\text{tgh}(\ln 2) = 5.\frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}} = 5.\frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = 5.\frac{3}{5} = 3.$$

Ponto $A(\ln 2\,, 3)$

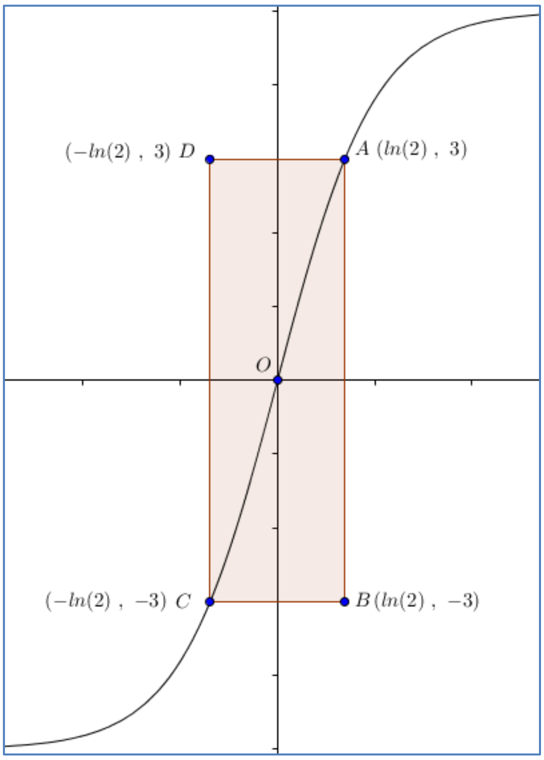
Ponto simétrico em relação ao eixo x : $B(\ln 2\,, -3)$

Ponto simétrico em relação à origem: $C(-\ln 2\,, -3)$

Ponto simétrico em relação ao eixo y: $D(-\ln 2\,, 3)$

Área do retêngulo $ABCD$:

$A_{ABCD} = b \times l = (2 \times \ln 2) \times (2 \times 3) = 12 \ln 2\ \ u.A$



$\boldsymbol{Questão\ 7}$

$(b)\ Seja\ f\ uma\ função\ definida\ por\ f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}, & x = 0. \end{cases}.\ Mostre\ que\ f\ é$ $contínua\ em\ x = 0.$

$Mostrar\ que\ uma\ função\ é\ contínua\ em\ um\ número\ x = a\ é\ mostrar\ que$

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

$Para\ tanto, f(a)\ deve\ existir\ e\ \lim_{x\to a} f(x)\ \ deve\ existir.$

$Para\ a\ função\ f(x)\ acima, temos\ que\ f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}.$

$\lim_{x\to 0} f(x)\ ;\ \ se\ x \to 0, então\ x \neq 0\ e, portanto, f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}};$$

$Calculando\ o\ limite\ do\ expoente, temos:$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2};\ Indeterminação\ do\ tipo\ "\frac{0}{0}"$$

$*\ Aplicando\ a\ Regra\ de\ L'Hôspital, obtemos:$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{\lim_{x\to 0} \sec^2 x}{\lim_{x\to 0} 2} = -\frac{\sec^2 0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$Portanto,$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$Como\ f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)\ \ então\ f\ é\ contínua\ em\ x = 0.$

$Questão\ 8$

$Esboce\ o\ gráfico\ da\ função\ f(x) = \dfrac{4x^2+8}{-2x-1}, tendo$

$$f'(x) = -\frac{8(x^2+x-2)}{(-2x-1)^2} \quad e \quad f''(x) = -\frac{72}{(2x+1)^3}$$

$Domínio\ da\ função\ f\!:\ D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -1/2\}$
$Interseções\ com\ os\ eixos\ coordenados\!:\ \ A(0,-4)$

$(a)\ Assíntotas\ Verticais, Horizontais\ e\ Oblíquas:$

$*\ Verticais \to a\ reta\ x = a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos: \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$

$Pela\ definição\ de\ continuidade\ de\ uma\ função\ em\ um\ número\ x = a, as\ assíntotas\ verticais\ ocorrem\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ função.$
$Verificamos\ se\ a\ reta\ x = -1\ é\ uma\ assíntota\ vertical.$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} \frac{\overbrace{4x^2+8}^{\overset{12}{\uparrow}}}{\underbrace{-2x-1}_{\underset{0^-}{\downarrow}}} = -\infty \quad e \quad \lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} \frac{\overbrace{4x^2+8}^{\overset{12}{\uparrow}}}{\underbrace{-2x-1}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = +\infty$$

$Logo, a\ reta\ x = -1/2\ \ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$*\ Horizontais \to a\ reta\ y = L\ é\ uma\ assíntota\ horizontal\ se\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = L\ \ ou\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+8}{-2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x}{-2} = \lim_{x\to+\infty} -4x = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+8}{-2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{-2} = \lim_{x\to-\infty} -4x = +\infty$$

$Logo, não\ há\ assíntotas\ horizontais\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$*\ Oblíquas \to a\ reta\ y = ax + b\ é\ uma\ assíntota\ oblíqua\ se, somente\ se, \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0\ .$

$$f(x) = \frac{4x^2+8}{-2x-1} = -2x + 1 + \frac{9}{-2x-1}$$
$$f(x) - (-2x+1) = \frac{9}{-2x-1}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (-2x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9}{-2x-1}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (-2x+1)] = 0$$

$Logo, a\ reta\ y = -2x + 1\ é\ uma\ assíntota\ oblíqua\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$\boldsymbol{Questão\ 8}$

(b) *Intervalos de crescimento e decrescimento e pontos extremos relativos*:

$$f'(x) = -\frac{8(x^2 + x - 2)}{(-2x - 1)^2}$$

$- - - - - - - (-2) + + + + + + + + + + (1) - - - - - - -$ $\quad - 8(x^2 + x - 2)$
$+ + + + + + + + + + + + (-1/2) + + + + + + + + + + + +$ $\quad (-2x - 1)^2$
$- - - - - - - (-2) + + + (-1/2) + + + (1) - - - - - -$ $\quad f'(x)$

Pelo Teste da Primeira Derivada, concluimos que

f *é crescente em* $(-2, -1) \cup (-1,1)$ *e* f *é decrescente em* $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

Em $x = -2$ *temos um ponto de mínimo local (ou relativo) e em* $x = 1$ *temos um ponto de máximo local (ou relativo). Pontos* $B(-2,8)$ *e* $C(1, -4)$

(c) *Concavidade e Pontos de Inflexão*:

$$f''(x) = -\frac{72}{(2x + 1)^3}$$

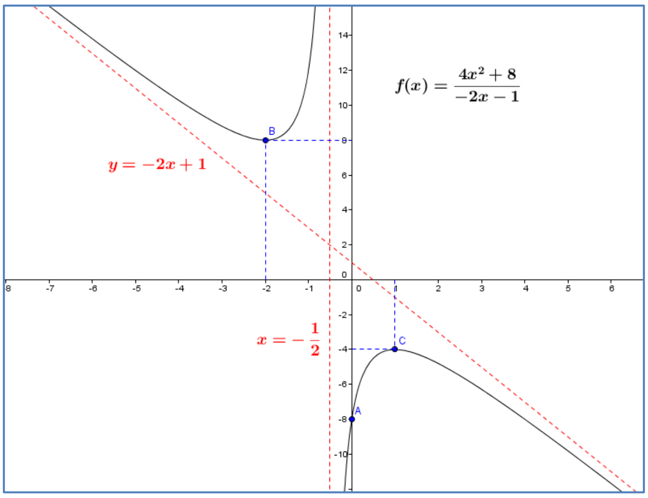
$+ + + + + + + (-1/2) - - - - - - - -$ $\quad f''(x)$

Pelo estudo do sinal da segunda derivada de f, *concluimos que*

o gráfico de f *possui concavidade voltada para cima em* $(-\infty, -1/2)$ *e o gráfico de* f *possui concavidade voltada para baixo em* $(-1/2, +\infty)$.

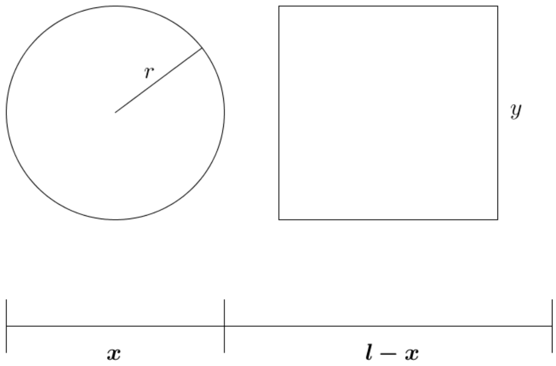
Embora ocorra mudança na direção da concavidade em $x = -1/2$, *o mesmo não pertence ao domínio da função* f *e, portanto, não é ponto de inflexão. Logo, não há pontos de inflexão no gráfico de* $f(x)$.

Esboço Gráfico:



Questão 9

Um pedaço de arame com comprimento l será dobrado para formar um círculo, um quadrado ou ambos (dividindo-se o arame em dois pedaços). Determine como dividir o arame para que a área total contornada seja máxima ou seja mínima.



De todo o comprimento l uma parte x será utilizada para formar o círculo e a parte $(l-x)$ para formar o quadrado. Portanto,

$$P_{círculo} = x \Longrightarrow 2\pi r = x \therefore r = \frac{x}{2\pi}$$

$$P_{quadrado} = l - x \Longrightarrow 4y = l - x \therefore y = \frac{1}{4}(l-x)$$

$$A_{círculo} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} \;;\quad A_{quadrado} = y^2 = \frac{1}{16}(l-x)^2$$

$$A_{total} = A_{círculo} + A_{quadrado} = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}(l-x)^2 \;;\quad 0 \le x \le l$$

Como a expressão da área total é uma função polinomial e, portato, contínua no intervalo fechado $[0,l]$, para encontrar os valores extremos absolutos de $A(x)$ utilizamos o Método do Intervalo Fechado.

1) *Valores de A nos extremos do intervalo*:

$A(0) = \dfrac{l^2}{16}$ (*todo o arame utilizado para formar o quadrado*)

$A(l) = \dfrac{l^2}{4\pi}$ (*todo o arame utilizado para formar o círculo*)

2) *Valores de A nos números críticos de A em $(0,l)$*:

"*Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe*".

$$A'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{(l-x)}{8} = \frac{4x - \pi(l-x)}{8\pi} = \frac{x(4+\pi) - \pi l}{8\pi}$$

$Questão\ 9$

$Como\ A\ é\ uma\ função\ polinomial\ contínua\ e\ diferenciável\ em\ \mathbb{R}, se\ A\ admite\ algum\ número\ crítico\ c\ então\ A'(c)\ existe\ e\ A'(c) = 0.$

$Se\ A\ tiver\ um\ máximo\ ou\ mínimo\ local\ em\ c\ e\ se\ A'(c)\ existir, então\ A'(c) = 0$ $(Teorema\ de\ Fermat)$

$$A'(x) = 0 \Longrightarrow x(4+\pi) - \pi l = 0 \therefore x = \frac{\pi l}{4+\pi}$$

$Pelo\ Teste\ da\ Primeira\ Derivada, concluimos\ que\ o\ número\ crítico\ \frac{\pi l}{4+\pi}\ está\ associado\ a\ um\ ponto\ de\ mínimo\ local.$

$$A\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right) = \frac{\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right)^2}{4\pi} + \frac{1}{16}\left(l - \frac{\pi l}{4+\pi}\right)^2 = \frac{\pi l^2}{4(4+\pi)^2} + \frac{(4l)^2}{16(4+\pi)^2} = \frac{l^2}{(4+\pi)^2}\left[\frac{\pi}{4}+1\right]$$
$$A\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right) = \frac{l^2}{4(4+\pi)}$$

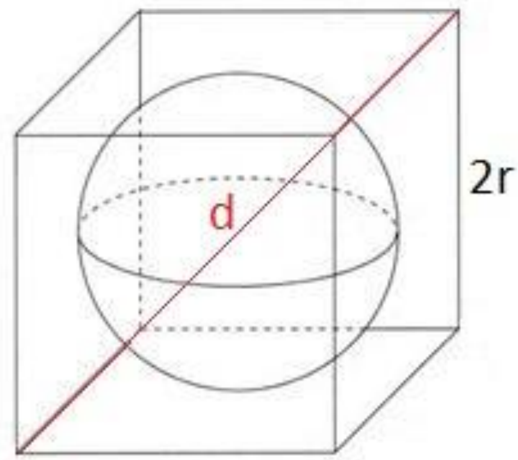
$Comparando\ os\ valores\ obtidos, \frac{l^2}{4(4+\pi)}\ é\ o\ valor\ mínimo\ absoluto\ e\ \frac{l^2}{4\pi}$ $é\ o\ valor\ máximo\ absoluto\ do\ intervalo\ [0, l].$

$*\ Para\ obtermos\ a\ área\ contornada\ sendo\ a\ máxima\ possível\ devemos\ utilizar\ todo\ o\ arame\ na\ confecção\ do\ círculo.$

$*\ Para\ obtermos\ a\ área\ contornada\ sendo\ a\ mínima\ possível\ devemos\ utilizar$ $\frac{\pi l}{4+\pi}\ de\ comprimento\ do\ arame\ para\ confeccionar\ o\ círculo\ e \frac{4l}{4+\pi}\ para$ $formar\ o\ quadrado.$

$Questão\ 10$

Uma esfera está inscrita num cubo cuja diagonal cresce à taxa de 3 mm/s. Com que velocidade estará crescendo o volume da esfera, no instante em que a aresta medir $\sqrt[4]{3}$mm?



$$d = 2r\sqrt{3}$$
$$\frac{dd}{dt} = 2\sqrt{3}.\frac{dr}{dt}$$
$$3 = 2\sqrt{3}.\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}mm/s$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}.\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dV}{dt} = (4\pi r^2).\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quando $r = \sqrt[4]{3}/2\,mm$, *temos*:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}} = \left(4\pi\frac{\sqrt{3}}{4}\right).\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\pi}{2}mm^3/s$$

O volume da esfera estará crescendo à taxa de $3\pi/2\ mm^3/s$ *quando o raio dela for* $\sqrt[4]{3}/2\,mm$ *com o raio crescendo a taxa de* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ mm/s$.

Capítulo 12 2015.2

12.1 1ª Prova – 12 de Fevereiro de 2016

***Questão* 1.** *Calcule*:

$a)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{7-x}-2}$

$b)\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\left[1+\mathrm{sen}^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right];$

***Questão* 2.**

$a)$ *Encontre as assíntotas do gráfico da função* $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

$b)\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}(2^{\cos x}.\,\mathrm{tg}\,x)\,;$

***Questão* 3.**

$a)$ *Determine o valor de* k *a fim de que a função* $f(x)=\begin{cases}\frac{x^4-16}{2-x}, x\neq 2\\ k^2+12k, x=2\end{cases}$

seja contínua em $\mathbb{R}$.

$b)$ *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação* $\cos x = x$ *possui uma solução em* $\mathbb{R}$.

***Questão* 4.**

$a)$ *Encontre as assíntotas horizontais do gráfico de* $f(x)=\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-1}}$.

$b)$*Determine uma equação para a reta tangente à curva* $y=2\sqrt{x}$ *no ponto* $(2,1)$.

***Questão* 5.**

$a)$ *Estude a continuidade da função* $f(x)=[\![\mathrm{sen}\,x]\!]$, *se* $x\in[0,\pi]$.

$b)$ *Analise os limites laterais da função* $f(x)=\mathrm{tg}\,x-|\mathrm{tg}\,x|$, *em torno de* $x=\frac{\pi}{2}$.

***Questão* 1.** *Calcule*:

$a)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{7-x}-2}$; *indeterminação tipo* "$\dfrac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{7-x}-2}=\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{7-x}-2}.\frac{\sqrt{4-x}+1}{\sqrt{4-x}+1}.\frac{\sqrt{7-x}+2}{\sqrt{7-x}+2}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{7-x}+2\right)}{(3-x)\left(\sqrt{4-x}+1\right)};$$

$*$ *Se* $x\to 3$ *então* $x\neq 3$. *Logo*, $(3-x)\neq 0$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{7-x}+2\right)}{(3-x)\left(\sqrt{4-x}+1\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{7-x}+2}{\sqrt{4-x}+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{7-x}+2\right)}{\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{4-x}+1\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{7-x}+\lim\limits_{x\to 3}2}{\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{4-x}+\lim\limits_{x\to 3}1}=$$
$$\frac{\sqrt{7-3}+2}{\sqrt{4-3}+1}=\frac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{1}+1}=\frac{2+2}{1+1}=\frac{4}{2}=2.$$

$b)\ \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\left[1+\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{2\pi}{x}\right)\right]$;

Pela desigualdade trigonométrica, temos:

$$0\leq \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\leq 1$$
$$1\leq 1+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\leq 2$$

$*$ *Se* $x\to 0^+$, $x>0$ *e, consequentemente*, $\sqrt{x}>0$. *Logo*,

$$\sqrt{x}\leq \sqrt{x}\left[1+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]\leq 2\sqrt{x}$$

Seja $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{x}\left[1+\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{2\pi}{x}\right)\right]$ *e* $h(x)=2\sqrt{x}$. *Então*, $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$.

$*\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=\sqrt{0}=0;$

$*\ \lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2\sqrt{x}=2\sqrt{0}=0;$

Se $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ *quando* x *está próximo de* 0 *pela direita, exceto possivelmente em* 0, *e* $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=0$ *então, pelo Teorema do Confronto*, $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\left[1+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]=0.$$

***Questão* 2.**

$a)$ *Encontre as assíntotas do gráfico da função* $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

$*$ *Primeiramente definimos o domínio da função* f.

$D(f)=\{x\in\mathbb{R};\,4-x^2>0\}$; $\quad 4-x^2>0\Rightarrow -2<x<2$
$D(f)=\{x\in\mathbb{R};\,-2<x<2\}$;

Assíntotas Verticais:

$Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a$ é $uma\ assíntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$Pela\ definição\ de\ continuidade\ de\ uma\ função, as\ assíntotas\ verticais\ ocorrem\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ função. Analisando\ o\ domínio\ da\ função\ f\ verificamos\ se\ as\ retas\ x = -2\ e\ x = 2$ são $assíntotas\ verticais. Para\ isso\ só\ podemos\ calcular\ \left(devido\ ao\ D(f)\right)\ \lim_{x\to -2^+} f(x)\ e\ \lim_{x\to 2^-} f(x).$

$* \ Se\ x \to -2^+, então\ 4 - x^2 \to 0^+. Portanto,$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{(2-x)(2+x)}}_{\downarrow \atop 0^+}} = +\infty$$

$Logo, a\ reta\ x = -2$ é $uma\ assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ de\ f(x).$

$* \ Se\ x \to 2^-, então\ 4 - x^2 \to 0^+. Portanto,$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{(2-x)(2+x)}}_{\downarrow \atop 0^+}} = +\infty$$

$Logo, a\ reta\ x = 2$ é $uma\ assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ de\ f(x).$

$Assíntotas\ Horizontais:$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ y = L$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se,$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

$Como\ a\ função\ f\ está\ definida\ para\ x \in (-2,2), ou\ seja, não\ existe\ Im(f)\ para\ x > 2\ ou\ x < -2. Logo, \lim_{x\to\infty} f(x) \nexists. Portanto,$ **não há assíntotas horizontais** $no\ gráfico\ de\ f(x).$

$b)\ \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^-} (2^{\cos x}.\operatorname{tg} x)\ ;$

$Pela\ desigualdade\ trigonométrica, temos:$

$$-1 \le \cos x \le 1$$
$$2^{-1} \le 2^{\cos x} \le 2^1$$

$* \ Obs: o\ sentido\ da\ desigualdade\ permanece\ inaltaredo\ porque\ a\ base\ exponencial$ é $maior\ do\ que\ 1.$

$$\frac{1}{2} \le 2^{\cos x} \le 2$$

$Se\ x \to \frac{3\pi}{2}^{-}\ \ então\ \text{tg}\, x > 0. Logo,$

$$\frac{1}{2}\text{tg}\, x \leq 2^{\cos x}.\text{tg}\, x \leq 2\,\text{tg}\, x$$

$Seja\ f(x) = \frac{1}{2}\text{tg}\, x\,, g(x) = 2^{\cos x}.\text{tg}\, x\ \ e\ h(x) = 2\,\text{tg}\, x\,.Se\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ quando$ $x\ está\ próximo\ de\ \frac{3\pi}{2}\ pela\ esquerda\ e\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^{-}} f(x) = +\infty\ e\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^{-}} h(x) = +\infty\ então$ $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^{-}} g(x) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^{-}} (2^{\cos x}.\text{tg}\, x) = +\infty.$

Questão 3.

$a)\ Determine\ o\ valor\ de\ k\ a\ fim\ de\ que\ a\ função\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 16}{2 - x}, x \neq 2 \\ k^2 + 12k, x = 2 \end{cases}$

$seja\ contínua\ em\ \mathbb{R}.$

$Reescrevendo\ a\ primeira\ sentença\ da\ função\ f\ ...$

$$\frac{x^4 - 16}{2 - x} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{-(x - 2)} = \frac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{-(x - 2)}$$

$Como\ essa\ sentença\ é\ válida\ \forall x \neq 2, então\ (x - 2) \neq 0. Logo,$

$$f(x) = \begin{cases} -(x + 2)(x^2 + 4), x \neq 2 \\ \quad k^2 + 12k, x = 2 \end{cases}$$

$A\ função\ polinomial\ é\ contínua\ em\ \mathbb{R}, porém, esta\ função\ é\ válida\ apenas\ para$ $x \neq 2. Portanto, f\ é\ contínua\ em\ (-\infty, 2) \cup (2, +\infty). Devemos\ verificar\ a$ $a\ continuidade\ de\ f\ em\ x = 2\ para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ \mathbb{R}.$

$Dizemos\ que\ uma\ função\ f\ é\ contínua\ no\ número\ a\ se, somente\ se, \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$ $Para\ isso, f(a)\ e\ \lim_{x\to a} f(x)\ devem\ existir. Analisando\ em\ x = 2, temos:$

$f(2) = k^2 + 12k$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}[-(x + 2)(x^2 + 4)] = \left[\lim_{x\to 2} -(x + 2)\right] \times \left[\lim_{x\to 2}(x^2 + 4)\right] = (-4)(8) = -32$

$Logo, para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ x = 2, devemos\ ter\ \lim_{x\to 2} f(x) = f(2).$

$$-32 = k^2 + 12k$$
$$k^2 + 12k + 32 = 0$$
$$\Delta = 144 - 128 = 16$$
$$k = \frac{-12 \pm 4}{2} \Rightarrow k = -4\ e\ k = -8$$

$Logo, para\ k = -4\ ou\ k = -8, f$ é $contínua\ em\ x = 2\ e, consequentemente, f$ é $contínua\ em\ (-\infty, +\infty), ou\ seja, f$ é $contínua\ em\ \mathbb{R}\ para\ k = -4\ ou\ k = -8.$

$b)\ Use\ o\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ para\ mostrar\ que\ a\ equação$ $\cos x = x$ $possui\ uma\ solução\ em\ \mathbb{R}.$

$Seja\ f(x) = \cos x - x. A\ função\ assim\ definida$ é $um\ composição\ de\ uma\ função\ trigonométrica\ contínua\ em\ \mathbb{R}\ e\ uma\ função\ polinomial\ contínua\ em\ \mathbb{R}. Portanto,$ f é $contínua\ em\ \mathbb{R}. Ainda\ temos\ que\ f(0) = 1\ e\ \ f(\pi) = -(1+\pi).$

$Como\ f$ é $uma\ função\ contínua\ em\ \mathbb{R}\ e, portanto, contínua\ no\ intervalo\ fechado$ $[0, \pi]\ e\ 0$ é $um\ número\ entre\ f(0)\ e\ f(\pi), existe\ algum\ x \in (0, \pi)\ tal\ que\ f(x) = 0.$
$f(x) = 0 \Rightarrow \cos x - x = 0 \therefore \cos x = x, para\ algum\ x \in (0, \pi), com\ x \in \mathbb{R}.$

Questão 4.

$a)\ Encontre\ as\ assíntotas\ horizontais\ do\ gráfico\ de\ f(x) = \dfrac{2x-4}{\sqrt{x^2-1}}.$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x < -1\ ou\ x > 1\}$$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ y = L$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se,$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}};$$

$* \ Se\ x \to +\infty, então\ |x| = x. Logo,$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-4}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}}} = \frac{2-0}{\sqrt{1-0}} = 2.$$

$Portanto, a\ reta\ y = 2$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}};$$

$* \ Se\ x \to -\infty, então\ |x| = -x. Logo,$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2+\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} -2 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}} = \frac{-2+0}{\sqrt{1-0}} = -2$$

$Portanto, a\ reta\ y = -2$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$b)$ *Determine uma equação para a reta tangente à curva* $y = 2\sqrt{x}$ *no ponto* $(1,2)$

Verifica − se que o ponto $P = (1,2)$ *pertence à curva* $y = 2\sqrt{x}$. *Logo, o coeficiente angular* m *da reta tangente à curva no ponto de abscissa* $x = 1$ é *dado por*:

$$m = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right] =$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{x}+1} = \frac{2}{\sqrt{1}+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Equação da reta tangente no ponto $(1,2)$ *e coeficiente angular* $m = 1$:

$$y - 2 = 1(x-1)$$
$$y = x + 1$$

Questão 5.

$a)$ *Estude a continuidade da função* $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!]$, *se* $x \in [0,\pi]$.

$*$ *Para* $x \in [0,\pi]$, *temos* $0 \le \operatorname{sen} x \le 1$. *Logo,*

$$f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!] = \begin{cases} 0, & se\ x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & se\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad x \in [0,\pi]$$

Como f é *uma função constante em* $x \in [0,\pi]$ *tal que* $x \neq \frac{\pi}{2}$, *então* f é *contínua em* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. *Analisando a continuidade em* $x = \frac{\pi}{2}$, *temos* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0$ *e* $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. *Como* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, *então* f *não é contínua em* $\frac{\pi}{2}$ *e, portanto,* f é *contínua em* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

$b)$ *Analise os limites laterais da função* $f(x) = \operatorname{tg} x - |\operatorname{tg} x|$, *em torno de* $x = \frac{\pi}{2}$.

$*$ *Para* $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} x > 0$ *e para* $x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\operatorname{tg} x < 0$

$*$ *Se* $x \to \frac{\pi}{2}^-$, *então* $x < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x > 0$ *e, consequentemente,* $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x$. *Logo,*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}[\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} 0 = 0.$$

$*$ *Se* $x \to \frac{\pi}{2}^+$, *então* $x > \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x < 0$ *e, consequentemente,* $|\operatorname{tg} x| = -\operatorname{tg} x$. *Logo,*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}[\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} 2\operatorname{tg} x = -\infty.$$

12.2 1ª Prova – 13 de Fevereiro de 2016

***Questão* 1.** *Calcule*:

$a)\ \lim_{x \to 0} x^3 . 2^{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$.

$b)\ \lim_{x \to -1} \left| \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} \right|$.

***Questão* 2**

$a)$ *Calcule as assíntotas verticais dos gráficos da função* $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{6x^2 - 2x^3}$.

$b)$ *Na Teoria da Relatividade, a massa de uma partícula com velocidade* v é

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_o é *a massa da partícula em repouso e* c*, a velociade da luz. O que acontece se* $v \to c^-$?

***Questão* 3**

$a)$ *Determine o maior intervalo (ou reunião de intervalos) em que a função*
$f(x) = \begin{cases} x + 5, & x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2}, & -3 \leq x \leq 3 \\ 3 - x, & x > 3 \end{cases}$ é *contínua.*

$b)$ *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a função* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 5$ *possui, pelo menos, duas raízes reais.*

***Questão* 4**

$a)$ *Calcule os pontos de intersecção das assíntotas da curva* $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x - 2}$;

$b)$ *Determine as equações de todas as retas com coeficiente angular* -1 *que sejam tangentes* à *curva* $y = \dfrac{1}{x - 1}$.

***Questão* 5**

$a)$ *Determine* $\lim_{x \to a} ([\![x]\!]^2 + [\![x^2]\!])$ *, nos casos em que* $a = 2$ *e* $a = 1{,}5$.

$b)$ *Calcule* $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

***Questão* 1.** *Calcule*:

$a)\ \lim_{x\to 0} x^3 . 2^{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$;

$\lim_{x\to 0} x^3 . 2^{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} x^3 . \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$;

Pela desigualdade trigonométrica, temos:

$$-1 \le \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

Como $0 < \frac{1}{2} < 1$, *a função exponencial* $\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$ *é decrescente. Logo, o sinal da desigualdade inverte.*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$$

Reescrevendo a desigualdade,

$$\frac{1}{2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \le 2$$

$*$ *Obs*: *Se* $x \to 0^+, x^3 > 0$ *e se* $x \to 0^-, x^3 < 0$. *Então,*

1^{o} *caso*: $x^3 < 0$. *A desigualdade inverte novamente de sentido.*

$$\frac{1}{2}x^3 \ge x^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \ge 2x^3$$

$$2x^3 \le x^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \le \frac{1}{2}x^3$$

Seja $f(x) = 2x^3, g(x) = x^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$ *e* $h(x) = \frac{1}{2}x^3$. *Então, se* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *quando* x *está próximo de* 0 *pela esquerda e*, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x) = 0$, *então* $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$. (*Teorema do Confronto*)

2^{o} *caso*: $x^3 > 0$. *A desigualdade permanece a mesma.*

$$\frac{1}{2}x^3 \le x^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \le 2x^3$$

Seja $f(x) = \frac{1}{2}x^3, g(x) = x^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$ *e* $h(x) = 2x^3$. *Então, se* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *quando* x *está próximo de* 0 *pela direita e*, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$, *então* $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. (*Teorema do Confronto*)

Como $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x)$, *então* $\lim_{x\to 0} g(x)$ *existe e* $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to 0} x^3 . \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

$b)\ \lim_{x\to -1}\left|\frac{x^2-x-2}{x+1}\right|$; $(No\ final\ do\ arquivo\ tem\ a\ resolução\ mais\ detalhada)$

$$\lim_{x\to -1}\left|\frac{x^2-x-2}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1}\left|\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1}\frac{|x+1|.|x-2|}{|x+1|};$$

$*\ Se\ x\to -1, então\ x\neq -1\ e, portanto, x+1\neq 0\ \Rightarrow |x+1|\neq 0. Logo,$

$$\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|.|x-2|}{|x+1|} = \lim_{x\to -1}|x-2| = |-1-2| = |-3| = 3.$$

***Questão* 2**

$a)\ Calcule\ as\ assíntotas\ verticais\ dos\ gráficos\ da\ função\ f(x) = \frac{x^3+1}{6x^2-2x^3}$;

$$f(x) = \frac{x^3+1}{2x^2(3-x)}\ ;\ \ D(f) = \{x\in\mathbb{R}\,; x\neq 0\ e\ x\neq 3\}\ ou\ D(f) = \mathbb{R}-\{0{,}3\}$$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a$ é $uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ da\ função\ f\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos$:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$Pela\ definição\ de\ continuidade\ de\ uma\ função, as\ assíntotas\ verticais\ ocorrem\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ função. Logo, calculamos\ \lim_{x\to 0} f(x)\ e\ \lim_{x\to 3} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{x^3+1}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{2x^2}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}\underbrace{(3-x)}_{\substack{\downarrow\\ 3}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{x^3+1}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{2x^2(3-x)}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$

$*\ Logo, a\ reta\ x = 0$ é $uma\ assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ da\ função\ f(x).$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\frac{\overbrace{x^3+1}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{2x^2}_{\substack{\downarrow\\ 18}}\underbrace{(3-x)}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = \lim_{x\to 3^+}\frac{\overbrace{x^3+1}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{2x^2(3-x)}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = -\infty$$

$*\ Logo, a\ reta\ x = 3$ é $uma\ assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ da\ função\ f(x).$

$b)\ Na\ Teoria\ da\ Relatividade, a\ massa\ de\ uma\ partícula\ com\ velocidade\ v$ é

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$onde\ m_o$ é $a\ massa\ da\ partícula\ em\ repouso\ e\ c, a\ velociade\ da\ luz. O\ que\ acontece\ se\ v\to c^-?$

$$\lim_{v\to c^-} m = \lim_{v\to c^-} \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\;;$$

$* \, Obs: se\ v \to c^-, então\ \frac{v^2}{c^2} \to 1^-. Logo, \frac{v^2}{c^2} < 1\ e, portanto, \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \to 0^+.$

$$\lim_{v\to c^-} \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \lim_{v\to c^-} \frac{m_o}{\underbrace{\sqrt{1-v^2/c^2}}_{\downarrow \atop 0^+}} = +\infty$$

$Conclusão: Quando\ v \to c^-\ a\ massa\ da\ partícula\ se\ expande\ infinitamente.$

Questão 3

$a)$ *Determine o maior intervalo (ou reunião de intervalos) em que a função*

$f(x) = \begin{cases} x+5, & x < -3 \\ \sqrt{9-x^2}, & -3 \le x \le 3 \\ 3-x, & x > 3 \end{cases}$ é *contínua.*

f é *uma função sentencial, composta por função polinomial e função raíz, cada uma dessas funções com suas particularidades. Logo,* f é *contínua onde cada sentença for contínua, respeitando o intervalo onde estão definidas.*

As funções polinomiais $(x+5)$ *e* $(3-x)$ *são contínuas em* $\mathbb{R}$. *Porém, como estas funções são válidas, respectivamente, para* $x \in (-\infty, -3)$ *e* $x \in (3, +\infty)$, *então* f é *contínua em* $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

A funçã raíz $\sqrt{9-x^2}$ é *contínua onde está definida, ou seja, em seu domínio. Logo, essa função está definida para* $(9-x^2) \ge 0 \Rightarrow -3 \le x \le 3$. *Como esta sentença* é *válida para* $x \in [-3,3]$, *então* f é *contínua em* $(-3,3)$.

Verificando a continuidade de f *em* $x = -3$ *e em* $x = 3$, *onde a função* $f(x)$ *muda de comportamento, temos:*

Dizemos que uma função f é *contínua num número* a *se, somente se,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Em $x = -3$, *temos:*

$f(-3) = \sqrt{9-(-3)^2} = \sqrt{9-9} = \sqrt{0} = 0.$
$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} (x+5) = 3+5 = 8$
$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(=3)^2} = \sqrt{9-9} = \sqrt{0} = 0.$

$* \, Como \lim_{x\to -3^+} f(x) \ne \lim_{x\to -3^-} f(x)\ então \lim_{x\to -3} f(x) \nexists.$

Logo, f *não* é *contínua em* $x = -3$.

$Em\ x = 3, temos:$

$$f(3) = \sqrt{9 - (3)^2} = \sqrt{9-9} = \sqrt{0} = 0.$$
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^-} (3 - x) = 3 - 3 = 0$$
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - (3)^2} = \sqrt{9-9} = \sqrt{0} = 0.$$

$* \ Como \ \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) \ então \ \lim_{x \to 3} f(x) = 0. \ f(3) = \lim_{x \to 3} f(x).$
$Logo, f$ é contínua em $x = 3.$

$Reunindo\ os\ resultados, podemos\ concluir\ que\ f$ é contínua em $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty).$
Essa é a maior reunião de intervalos onde f é contínua.

b) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a função $f(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 5$ possui, pelo menos, duas raízes reais.

Calculando os valores de f para $x = \{0,1,4\}$ temos:

$f(0) = 0^3 - 9 \times 0^2 + 20 \times 0 - 5 = -5\,;$ $\qquad f(0) = -5$
$f(1) = 1^3 - 9 \times 1^2 + 20 \times 1 - 5 = 7 \quad ;$ $\qquad f(1) = 7$
$f(4) = 4^3 - 9 \times 4^2 + 20 \times 4 - 5 = 64 - 144 + 80 - 5 = -5;$ $\qquad f(4) = -5$

f é uma função polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua nos intervalos fechados $[0,1]$ e $[1,4]$ e 0 é um número entre $f(0)$ e $f(1)$, assim como, entre $f(1)$ e $f(4)$, então existe algum $\mathrm{c} \in (0,1)$ e algum $\mathrm{d} \in (1,4)$ tais que $f(c) = 0$ e $f(d) = 0$. Logo, f possui, pelo menos, duas raízes reais c e d .

Questão 4

a) Calcule os pontos de intersecção das assíntotas da curva $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x-2}$;

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2/3\}$$

Assíntota Vertical:

Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Pela definição de continuidade de uma função, as assíntotas verticais ocorrem nos pontos de descontinuidade da função. Logo, calculamos $\lim_{x \to 2/3} f(x)$.

$$\lim_{x \to \frac{2}{3}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{2}{3}^+} \frac{\overbrace{\sqrt{x^2+1}}^{\sqrt{13}/3}}{\underbrace{3x-2}_{0^+}} = +\infty$$

$* \ Obs: se\ x \to 2/3^+ ,\ então\ x > 2/3 .\ Logo, 3x - 2 > 0.$

$Logo, a\ reta\ x = 2/3$ é $uma\ assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ de\ f(x).$

$Assíntota\ Horizontal:$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ y = L$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{3x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3x-2};$$

$* \ Obs: se\ x \to +\infty, então\ |x| = x.$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{2}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3-\frac{2}{x}\right)} =$$

$$\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}}{3-0} = \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3}.$$

$Logo, a\ reta\ y = 1/3$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ do\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{3x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3x-2};$$

$* \ Obs: se\ x \to +\infty, então\ |x| = -x.$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-3+\frac{2}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-3+\frac{2}{x}\right)} =$$

$$\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to-\infty} -3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}}{-3+0} = \frac{\sqrt{1}}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

$Logo, a\ reta\ y = -1/3$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ do\ gráfico\ de\ f(x).$

$Pontos\ de\ intersecção\ das\ assíntotas\ de\ f(x)\ são: A = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\ e\ B = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$

$b)\ Determine\ as\ equações\ de\ todas\ as\ retas\ com\ coeficiente\ angular\ -1\ que\ sejam\ tangentes$ à $curva\ y = \frac{1}{x-1}.$

Precisamos determinar, primeiramente, os pontos da curva $y = \dfrac{1}{x-1}$ *onde a reta tangente possui coeficiente angular* $m = -1$.

O coeficiente angular de uma reta tangente à uma curva é dado pelo valor da função derivada naquele ponto. Logo,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+\Delta x-1} - \dfrac{1}{x-1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x-1-(x+\Delta x-1)}{\Delta x(x+\Delta x-1)(x-1)} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x-1-x-\Delta x+1}{\Delta x(x+\Delta x-1)(x-1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x-1)(x-1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x-1)(x-1)} =$$
$$\frac{-1}{(x-1)^2} \;\therefore\; y' = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

$*$ *Onde* $y' = -1$?

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \therefore x = 0 \text{ e } x = 2.$$

Pontos da curva onde a reta tangente possui inclinação -1: $A = (0,-1)$ *e* $B = (2,1)$.

Equação das retas tangentes nos pontos A *e* B:

$$y_1 - (-1) = -1(x-0) \qquad y_2 - 1 = -1(x-2)$$
$$y_1 = -x - 1 \qquad y_2 = -x + 3$$

Questão 5

a) *Determine* $\lim_{x\to a}([\![x]\!]^2 + [\![x^2]\!])$, *nos casos em que* $a = 2$ *e* $a = 1{,}5$.

$\lim_{x\to 2}([\![x]\!]^2 + [\![x^2]\!])$; *Como* $x = 2 \in \mathbb{Z}$ *vamos analisar os limites laterais!*

$$\lim_{x\to 2^+}([\![x]\!]^2 + [\![x^2]\!]) = \lim_{x\to 2^+}[\![x]\!]^2 + \lim_{x\to 2^+}[\![x^2]\!] \;;$$

$*$ *Obs: se* $x \to 2^+$, *então* $[\![x]\!] = 2$, $x^2 \to 4^+$ *e, portanto,* $[\![x^2]\!] = 4$. *Logo,*

$$\lim_{x\to 2^+}([\![x]\!]^2 + [\![x^2]\!]) = \lim_{x\to 2^+}[\![x]\!]^2 + \lim_{x\to 2^+}[\![x^2]\!] = 2^2 + 4 = 4 + 4 = 8.$$

$$\lim_{x\to 2^-}([\![x]\!]^2 + [\![x^2]\!]) = \lim_{x\to 2^-}[\![x]\!]^2 + \lim_{x\to 2^+}[\![x^2]\!] \;;$$

$*$ *Obs: se* $x \to 2^-$, *então* $[\![x]\!] = 1$, $x^2 \to 4^-$ *e, portanto,* $[\![x^2]\!] = 3$. *Logo,*

$$\lim_{x\to 2^-}([\![x]\!]^2 + [\![x^2]\!]) = \lim_{x\to 2^-}[\![x]\!]^2 + \lim_{x\to 2^-}[\![x^2]\!] = 1^2 + 3 = 1 + 3 = 4.$$

Como $\lim_{x\to 2^+}([\![x]\!]^2 + [\![x^2]\!]) \neq \lim_{x\to 2^-}([\![x]\!]^2 + [\![x^2]\!])$ *então* $\lim_{x\to 2}([\![x]\!]^2 + [\![x^2]\!]) \nexists$.

$$\lim_{x\to 1,5}([\![x]\!]^2+[\![x^2]\!]) = \lim_{x\to 1,5}[\![x]\!]^2 + \lim_{x\to 1,5}[\![x^2]\!] \;;$$

$* \, Obs: se \; x \to 1{,}5, então \; [\![x]\!] = 1, x^2 \to 2{,}25 \; e, portanto, [\![x^2]\!] = 2. Logo,$

$$\lim_{x\to 1,5}([\![x]\!]^2+[\![x^2]\!]) = \lim_{x\to 1,5}[\![x]\!]^2 + \lim_{x\to 1,5}[\![x^2]\!] = 1^2+2 = 1+2 = 3.$$

$b)\; Calcule \; \lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \;;$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} \;;$$

$* \, Obs: se \; x \to 1, então \; x \neq 1. Logo, (x-1) \neq 0.$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x^2}+\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x}+\lim_{x\to 1}1} =$$
$$\frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}.$$

$- -$

$DETALHAMENTO \; DA \; QUESTÃO \; 1 \; ITEM$ b

$$\lim_{x\to -1}\left|\frac{x^2-x-2}{x+1}\right|$$

$Há \; 3 \; formas \; de \; resolver \; esse \; limite \; cuja \; função \; é \; modular. A \; primeira \; delas \; é \; analisando \; |x^2-x-2| \; e \; |x+1| \; separadamente \; e, obrigatoriamente, calcular \; os \; limites \; laterais \; em \; x=-1; A \; segunda, simplificar \; a \; expressão \; racional \; e, ainda \; assim, calcular \; os \; limites \; laterais, uma \; vez \; que:$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases}, porém, temos \; \left|\frac{x+1}{x+1}\right| = 1, x \neq -1.$$

$A \; terceira \; forma \; foi \; apresentanda \; no \; início \; da \; resolução \; considerando \; o \; fator \; |x+1| \; não \; nulo, pois \; |x+1| \to 0, logo \; |x+1| \neq 0.$

1º)

$$\lim_{x\to -1}\left|\frac{x^2-x-2}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1}\frac{|x^2-x-2|}{|x+1|} \;;$$

$$* \; |x^2-x-2| = \begin{cases} x^2-x-2, & x \leq -1 \; ou \; x \geq 2 \\ -(x^2-x-2), & -1 < x < 2 \end{cases} \;;$$

$$* \; |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases}$$

$* \; Se \; x \to -1^+, então \; x > -1. Logo, |x^2 - x - 2| = -(x^2 - x - 2) \; e \; |x+1| = (x+1).$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x^2 - x - 2|}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x^2 - x - 2)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} -(x-2)$$
$$= -(-1-2) = -(-3) = 3.$$

$* \; Se \; x \to -1^-, então \; x < -1. Logo, |x^2 - x - 2| = (x^2 - x - 2) \; e \; |x+1| = -(x+1).$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x^2 - x - 2|}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 - x - 2}{-(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)(x-2)}{-(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} -(x-2)$$
$$= -(-1-2) = -(-3) = 3.$$

$$Como \; \lim_{x\to -1^+} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1^-} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| \; então \; \lim_{x\to -1} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| = 3.$$

$$2º) \; \lim_{x\to -1} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1} \frac{|x+1||x-2|}{|x+1|};$$

$$* \; |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases};$$
$$* \; |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases};$$

$* \; Se \; x \to -1^+, então \; x > -1. Logo, |x+1| = (x+1) \; e \; |x-2| = -(x-2);$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x+1||x-2|}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)[-(x-2)]}{(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)} =$$
$$\lim_{x\to -1^+} -(x-2) = -(-1-2) = -(-3) = 3.$$

$* \; Se \; x \to -1^-, então \; x < -1. Logo, |x+1| = -(x+1) \; e \; |x-2| = -(x-2);$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{|x+1||x-2|}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^-} \frac{[-(x+1)][-(x-2)]}{-(x+1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+1)(x-2)}{-(x+1)} =$$
$$\lim_{x\to -1^-} -(x-2) = -(-1-2) = -(-3) = 3.$$

$$Como \; \lim_{x\to -1^+} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1^-} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| \; então \; \lim_{x\to -1} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| = 3.$$

12.3 2ª Prova – 11 de Março de 2016

Questão 1

a) Para quais valores da constante m *a função* $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(2x), & x \le 0 \\ mx, & x > 0 \end{cases}$ é *derivável?*

b) Onde a reta normal à elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$, *no ponto* $(-1,1)$ *intercepta a elipse uma segunda vez?*

Questão 2

a) $y(t)$ *satisfaz a equação* $y^2 + ky = 0$, *onde* k é *constante. Mostre que toda reta tangente ao gráfico* é *uma reta horizontal.*

b) A reta normal ao gráfico da função $f(x) = x^{e^{-x^2}}$, *no ponto em que* $x = 1$ *intercepta o eixo das abscissas. Dê a equação da reta paralela ao eixo das ordenadas e que passa por essa intersecção.*

Questão 3

a) Se $f(x) = 2\cos x + \cos^2 x$, *encontre os pontos sobre o gráfico de* f *nos quais a reta tangente* é *horizontal.*

b) Sendo $f(x) = \arccos(\sec(\ln x))$ *determine onde* f é *derivável.*

Questão 4

a) Calcule $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{3x}\right)^{\frac{4x}{5}}$;

b) Determine uma equação para a reta normal ao gráfico da função $f(x) = 3^{\frac{\ln x}{x}}$, *no ponto onde a reta tangente* é *horizontal.*

Questão 5

a) Use derivação logarítmica para calcular a derivada da função

$f(x) = \dfrac{2^x (\operatorname{cotg} x)^3 \sqrt{x}}{(x^3 - 1)^5}$.

b) Calcule $\lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsec}(2+h) - \operatorname{arcsec}(2)}{h}$.

***Questão* 1**

$a)$ *Para quais valores da constante* m *a função* $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(2x), x \leq 0 \\ mx, \quad\quad x > 0 \end{cases}$ é *derivável*?

A priori, f é *uma função sentencial formada por função trigonométrica composta com polinomial e também formada por uma função polinomial linear, como essas funções são contínuas e diferenciáveis em* $\mathbb{R}$*, então* f é *contínua e diferenciável em* $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Para que f *seja derivável em* $x = 0$*, primeiro verificamos se* f é *contínua em* $x = 0$. *Logo,*

$f(0) = \text{sen}(2 \times 0) = \text{sen}(0) = 0.$
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} mx = m \lim_{x \to 0^+} x = m \times 0 = 0.$
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \text{sen}(2x) = \text{sen}(0) = 0$
$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 0$, *e ainda,* $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$. *Logo,* f é *contínua em* $x = 0$.

$$f_-'(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}(2x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}(2x)}{x} . \frac{2}{2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\,\text{sen}(2x)}{2x};$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2\,\text{sen}(2x)}{2x} = \lim_{x \to 0^-} 2 \times \lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} = 2 \times 1 = 2.$$

$*$ *Obs: Limite fundamental trigonométrico* $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(kx)}{kx} = 1$

$$f_+'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{mx - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{mx}{x} = m.$$

Para que f *seja derivável em* $x = 0$, $f_-'(0) = f_+'(0)$. *Portanto,* $m = 2$.
Com isso, concluimos que para $m = 2$ f é *diferenciável em todos os reais.*

$b)$ *Onde a reta normal* à *elipse* $x^2 - xy + y^2 = 3$, *no ponto* $(-1,1)$ *intercepta a elipse uma segunda vez?* *Ponto* $P = (-1,1)$ *pertence* à *curva!*

Derivando implicitamente à *expressão da elipse, temos:*

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(3)$$
$$2x - y - xy' + 2yy' = 0$$
$$y'(2y - x) = -(2x - y)$$
$$y' = -\frac{2x - y}{2y - x}$$

No ponto $(-1,1)$, $y'_{(-1,1)} = -\frac{(-2) - 1}{2 - (-1)} = -\frac{(-3)}{3} = 1$. *Esse* é *o coeficiente angular* m_1 *da reta tangente em* P. *Como as retas tangente e normal são perpendiculares*

$então\ m_1.m_2 = -1.\ Logo, o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal$ é $m = -1.$

$Equação\ da\ reta\ normal:$

$$y - 1 = -1(x + 1)$$
$$y = -x$$

$Substituindo\ a\ equação\ da\ reta\ na\ expressão\ da\ elipse, obtemos:$

$$x^2 - x(-x) + (-x)^2 = 3$$
$$x^2 + x^2 + x^2 = 3$$
$$3x^2 = 3$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

$Pontos\ de\ intersecção: P = (-1,1)\ e\ A = (1,-1).$

$Logo, a\ reta\ normal\ em\ (-1,1)\ intercepta\ a\ elipse\ uma\ segunda\ vez\ no\ ponto$ $A = (1,-1).$

Questão 2

$a)\ y(t)\ satisfaz\ a\ equação\ y^2 + ky = 0, onde\ k$ é $constante. Mostre\ que\ toda\ reta\ tangente\ ao\ gráfico$ é $uma\ reta\ horizontal.$

$Mostrar\ que\ toda\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ da\ função\ y(t)$ é $uma\ reta\ horizontal,$ é $provar\ que\ y'(t) = 0\ para\ todo\ t \in D(y)\ (domínio\ da\ função\ y).$

$Derivando\ implicitamente\ a\ expressão\ dada\ acima, temos:$

$$\frac{d}{dt}(y^2) + \frac{d}{dt}(ky) = \frac{d}{dt}(0)$$

$$2y(t).y'(t) + k.y'(t) = 0$$

$$y'(t)[2y(t) + k] = 0$$
$$y'(t) = 0\ ou\ y(t) = -\frac{k}{2}$$

$Se\ y(t) = -\frac{k}{2}, onde\ k$ é $uma\ constante, então\ y'(t) = 0, confirmando\ a\ primeira\ solução\ acima. Portanto, y'(t) = 0, \forall t \in D(y). Com\ isso, concluimos\ que\ toda\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ y(t)$ é $uma\ reta\ horizontal.$

$b)\ A\ reta\ normal\ ao\ gráfico\ da\ função\ f(x) = x^{e^{-x^2}}, no\ ponto\ em\ que\ x = 1\ intercepta\ o\ eixo\ das\ abscissas. Dê\ a\ equação\ da\ reta\ paralela\ ao\ eixo\ das\ ordenadas\ e\ que\ passa\ por\ essa\ intersecção.$ $f(1) = 1 \curvearrowright P = (1,1)$

$$f(x) = x^{e^{-x^2}}$$
$$\ln f(x) = \ln x^{e^{-x^2}}$$
$$\ln f(x) = e^{-x^2}.\ln x$$

Por diferenciação logarítmica, obtemos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (-2x)e^{-x^2}.\ln x + e^{-x^2}.\frac{1}{x}$$
$$f'(x) = f(x)\left[-2x.e^{-x^2}.\ln x + \frac{e^{-x^2}}{x}\right]$$
$$f'(1) = f(1)\left[-2.e^{-1}.\ln 1 + \frac{e^{-1}}{1}\right]$$
$$f'(1) = \frac{1}{e}\ (coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente\ m_1\ em\ x = 1)$$

Coeficiente angular da reta normal $m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = -e.$

Equação da reta normal:
$$y - 1 = -e(x-1)$$
$$y = -ex + e + 1$$

Intersecção com o eixo das abscissas $(y = 0)$:

$$0 = -ex + e + 1$$
$$x = \frac{e+1}{e}\ ;ponto\ \left(\frac{e+1}{e}, 0\right)$$

Reta paralela ao eixo das ordenadas que passa por esse ponto é a reta $x = \dfrac{e+1}{e}$.

Questão 3

a) Se $f(x) = 2\cos x + \cos^2 x$, *encontre os pontos sobre o gráfico de f nos quais a reta tangente é horizontal.*

A reta tangente é horizontal onde $f'(x) = 0$. *Portanto,*

$$f'(x) = -2\,\mathrm{sen}\,x - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$$
$$f'(x) = -2\,\mathrm{sen}\,x\,(1 + \cos x)$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{sen}\,x = 0 \\ \quad ou \\ \cos x = -1 \end{cases} \therefore\ x_1 = k\pi\ \ e\ x_2 = \pi + 2k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Observe que $x_2 \subset x_1$. *Logo, a solução geral é* $x_1 = k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.
$f(x_1) = 0 \ \Longrightarrow$ *Pontos* $(k\pi, 0)$ *com* $k = 2n+1, n \in \mathbb{Z}$ *(k é ímpar)*
$f(x_1) = -1 \Longrightarrow$ *Pontos* $(k\pi, -1)$ *com* $k = 2n, n \in \mathbb{Z}$ *(k é par)*

Esses são os pontos do gráfico de $f(x)$ *onde a reta tangente é horizontal.*

b) Sendo $f(x) = \arccos(\sec(\ln x))$ *determine onde f é derivável.*

Primeiramente analisamos o domínio da função f e observe com atenção!!!

$1^{\underline{o}})\ \ln x$ *está definido para* $x > 0$;
$2^{\underline{o}})\ |\sec x| \geq 1$, *ou seja*, $\sec x \geq 1$ *ou* $\sec x \leq -1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
$3^{\underline{o}})\ D(\arccos x) = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 1\}$

Compondo as 3 informações acima, observe que primeiramente o domínio de f *é restrito à função* $\ln x$, *ou seja*, $x > 0$. *Porém, a função* $\sec x$ *possui imagem* $Im(\sec x) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ *e, portanto, a função* $\arccos(\sec(\ln x))$ *só possui valor definido para* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\sec(\ln x) = \pm 1$.

Essa análise permite concluir que f *não é diferenciável para qualquer* $x \in \mathbb{R}$.

$*$ *Obs: A função* f *é representada por pontos dispersos, ou seja, não possui qualquer continuidade em algum intervalo aberto. Logo, não há necessidade em derivar a função* f *uma vez que* f *é descontínua em todos os reais.*

Para deixar mais clara essa explicação ...

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \sec^2(\ln x)}} . \sec(\ln x) . \operatorname{tg}(\ln x) . \frac{1}{x}$$

Lembremos que $\sec^2(\ln x) \geq 1$, *desde que esteja definida, ou seja, para* $x > 0$. *E com isso, observe que a derivada* $f'(x)$ *não existe! Portanto,* f *não é derivável para qualquer* $x \in D(f)$.

Questão 4

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{\frac{4x}{5}}$;

$*$ *Façamos a substituição* $x = \frac{2}{3}n$. *Se* $x \to \infty$, *então* $n \to \infty$. *Ajustando o limite ...*

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{\frac{4x}{5}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{8}{15}n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{8}{15}} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{8}{15}} =$$
$$\left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{8}{15}} = e^{\frac{8}{15}}.$$

$*$ *Obs: Limite fundamental exponencial* $\lim_{n\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$.

$b)$ *Determine uma equação para a reta normal ao gráfico da função* $f(x) = 3^{\frac{\ln x}{x}}$, *no ponto onde a reta tangente é horizontal.* $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

Derivando a função composta pela Regra da Cadeia, temos:

$$f'(x) = 3^{\frac{\ln x}{x}} . \ln 3 . \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln x}{x}\right]$$
$$f'(x) = 3^{\frac{\ln x}{x}} . \ln 3 . \left[\frac{\frac{1}{x} . x - \ln x . 1}{x^2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} . 3^{\frac{\ln x}{x}} . \ln 3$$

Onde a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ *é horizontal* $(f'(x) = 0)$ *a reta normal é vertical, cuja equação é* $x = x_0$*, onde* $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \therefore x = e$$

Equação da reta normal é a reta vertical $x = e$.

***Questão* 5**

a) *Use derivação logarítmica para calcular a derivada da função*
$f(x) = \dfrac{2^x (\operatorname{cotg} x)^3 \sqrt{x}}{(x^3 - 1)^5}$.

$$\ln f(x) = \ln \left[\frac{2^x (\operatorname{cotg} x)^3 \sqrt{x}}{(x^3 - 1)^5} \right]$$
$$\ln f(x) = \ln 2^x + \ln(\operatorname{cotg} x)^3 + \ln x^{\frac{1}{2}} - \ln(x^3 - 1)^5$$
$$\ln f(x) = x . \ln 2 + 3 . \ln(\operatorname{cotg} x) + \frac{1}{2} \ln x - 5 . \ln(x^3 - 1)$$

Por derivação logarítmica, obtemos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln 2 - 3 \frac{\operatorname{cossec}^2 x}{\operatorname{cotg} x} + \frac{1}{2x} - 5 \frac{3x^2}{x^3 - 1}$$
$$f'(x) = f(x) \left[\ln 2 - \frac{3}{\operatorname{sen} x . \cos x} + \frac{1}{2x} - \frac{15x^2}{x^3 - 1} \right]$$
$$f'(x) = \frac{2^x (\operatorname{cotg} x)^3 \sqrt{x}}{(x^3 - 1)^5} . \left[\ln 2 - \frac{3}{\operatorname{sen} x . \cos x} + \frac{1}{2x} - \frac{15x^2}{x^3 - 1} \right]$$

b) *Calcule* $\lim_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{arcsec}(2 + h) - \operatorname{arcsec}(2)}{h}$.

Esse limite é, em outras palavras, $f'(2)$ *onde* $f(x) = \operatorname{arcsec} x$.

Seja $y = \sec x$, *façamos a troca entre as variáveis. Então,*

$$x = \sec y \quad , \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Derivando implicitamente, sendo $y = f(x)$*, temos*:

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \sec(y)$$
$$1 = \sec y . \operatorname{tg} y . y'$$
$$y' = \frac{1}{\sec y . \operatorname{tg} y} \quad ; \operatorname{tg} y > 0 \textit{ no intervalo definido}$$
$$y' = \frac{1}{\sec y . \sqrt{\sec^2 y - 1}} ; \quad \sec y = x$$

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$y' = f'(x) = \frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x]$

$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{4-1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Logo,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{arcsec}(2+h) - \operatorname{arcsec}(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

12.4 2ª Prova – 12 de Março de 2016

Questão 1

$a)$ *Use a definição de derivada para mostrar que a curva* $y = \sqrt{x}$ *apresenta reta tangente na origem.*

$b)$ *Tome* $y = \operatorname{arcsec} x$, *com* $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ *ou* $\pi \leq y \leq \dfrac{3\pi}{2}$ *e estabeleça uma fórmula para calcular* $\dfrac{dy}{dx}$.

Questão 2

$a)$ *Dada a função* $f(x) = \log_2[\operatorname{arcsen}(x^2)] \cdot \dfrac{(\ln 2)\pi\sqrt{3}}{12}$, *determine o valor de* k, *de modo que* $f'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^k$.

$b)$ *A função* $f(x) = \begin{cases} x, -1 \leq x < 0 \\ \operatorname{tg} x, 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ *é diferenciável em* $x = 0$?

Questão 3

$a)$ *Use derivação logarítmica para determinar o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de* $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$, *no ponto em que* $x = 1$.

$b)$ *Suponha que* f *seja uma função injetiva, derivável e que sua função inversa* f^{-1}, *seja também derivável. Se* $f(2) = 10$ *e* $f'(2) = \dfrac{3}{5}$, *encontre* $[f^{-1}]'(10)$.

Questão 4

$a)$ *Encontre equações para as duas retas que passam pela origem e são tangentes à curva* $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$.

$b)$ *Calcule* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^x$.

Questão 5

$a)$ *Há uma reta que tangencia o gráfico de* $f(x) = 2^{\log_3 x} . \ln 3$, *no ponto de abscissa* $x = 1$. *Tal reta intercepta o eixo* $- y$ *num ponto cuja ordenada é dada por* $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$. *Determine essa ordenada.*

$b)$ *Sendo* $f(x) = x^{e^{x^e}}$, *calcule* $f'(x)$.

***Questão* 1**

$a)$ *Use a definição de derivada para mostrar que a curva* $y = \sqrt{x}$ *apresenta reta tangente na origem.*

$$y = f(x) = \sqrt{x} \ \ ; \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$$

Como a função f *está definida para* $x \geq 0$, *temos as seguintes considerações*:

$1)\ f(0) = 0 \ \ e \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$
$2) f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$ *Logo*, f *é contínua à direita de zero*!

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

A derivada de uma função no ponto $x = a$ *é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* $f(x)$ *em* $x = a$. *Matematicamente, esse coeficiente angular* $m = f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$, *onde* α *é o ângulo formado entre a reta e a direção positiva do eixo das abscissas.*

Logo, $m = f'_+(0) \to +\infty$, *então* $\operatorname{tg} \alpha \to \infty$ *e, portanto*, $\alpha \to 90°$ *ou* $\frac{\pi}{2}$.
Como a função f *é contínua à direita de zero e* $\lim_{x \to 0^+} |f'(x)| = \infty$, *então* f *admite reta tangente vertical em* $x = 0$ *e essa reta é dada pela equação* $x = 0$.

$b)$ *Tome* $y = \operatorname{arcsec} x$, *com* $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ *ou* $\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2}$ *e estabeleça uma fórmula para calcular* $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \operatorname{arcsec} x \Leftrightarrow \sec y = x$$

Derivando implicitamente a expressão em relação à x, *temos*:

$$\frac{d}{dx}[\sec y] = \frac{d}{dx}(x)$$
$$\sec y \,.\operatorname{tg} y \,.\frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \,.\operatorname{tg} y}$$

$*$ *Como* $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ *ou* $\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2}$, 1º *e* 3º *quadrante, respectivamente, logo* $\operatorname{tg} y > 0$.

$$\operatorname{tg}^2 y + 1 = \sec^2 y \Rightarrow \operatorname{tg} y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$* \sec y = x$ *e, portanto,*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Questão 2

a) Dada a função $f(x) = \log_2[\operatorname{arcsen}(x^2)] . \frac{(\ln 2)\pi\sqrt{3}}{12}$*, determine o valor de* k*, de modo que* $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^k$.

$*$ *Seja* $u = x^2$; $v = \operatorname{arcsen} u$ *e* $f(v) = \frac{(\ln 2)\pi\sqrt{3}}{12} . \log_2 v$. *Pela Regra da Cadeia,*

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dv} . \frac{dv}{du} . \frac{du}{dx}$$
$$f'(x) = \frac{(\ln 2)\pi\sqrt{3}}{12} . \frac{1}{v . \ln 2} . \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} . (2x)$$

$$f'(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} . \frac{1}{\operatorname{arcsen}(x^2)} . \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} (2x)$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} . \frac{1}{\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)} . \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} . (\sqrt{2})$$
$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} . \frac{6}{\pi} . \frac{2}{\sqrt{3}} . \sqrt{2}$$
$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^k \therefore k = \frac{1}{2}$$

b) A função $f(x) = \begin{cases} x, -1 \leq x < 0 \\ \operatorname{tg} x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$ *é diferenciável em* $x = 0$?

$*$ *Primeiro verificamos se* f *é contínua em* $x = 0$ *pois, só então poderemos analisar a diferenciabilidade de* f *em* $x = 0$.

1) $f(0)$ *está definido;* $f(0) = 0$

2) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 0 = 0.$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ *existe* ; $\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$

3) $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ *e, portanto,* f *é contínua em* $x = 0$.

Analisando a diferenciabilidade de f *em* $x = 0$*, temos:*

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1.$$
$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} . \frac{1}{\cos x}\right] = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Logo, como f é contínua em $x = 0$ e as derivadas laterais existem e são iguais, $f'_{-}(0) = f'_{+}(0)$, então f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 1$.

Questão 3

a) *Use derivação logarítmica para determinar o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$, no ponto em que $x = 1$.*

$\ln f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

$\ln f(x) = \ln x \,.\, \ln(\operatorname{sen} x)$

Por derivação logarítmica, temos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x) + \ln x \,.\, \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x) + \ln x \,.\, \operatorname{cotg} x\right]$$

$$f'(x) = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x) + \ln x \,.\, \operatorname{cotg} x\right]$$

$$f'(1) = (\operatorname{sen} 1)^{\ln 1}\left[\frac{1}{1}\ln(\operatorname{sen} 1) + \ln 1 \,.\, \operatorname{cotg} 1\right] \quad ; \ln 1 = 0 \quad e \ (\operatorname{sen} 1)^0 = 1$$

$$f'(1) = \ln(\operatorname{sen} 1)$$

Portanto, o coeficiente angular da reta normal em $x = 1$ é $m_N = -\frac{1}{f'(1)}$. Logo,

$$m_N = -\frac{1}{\ln(\operatorname{sen} 1)}.$$

b) *Suponha que f seja uma função injetiva, derivável e que sua função inversa f^{-1}, seja também derivável. Se $f(2) = 10$ e $f'(2) = \frac{3}{5}$, encontre $[f^{-1}]'(10)$.*

Se f admite função inversa, então $f^{-1}(f(x)) = x$. Pelo teorema da derivada da função inversa, temos:

$$[f^{-1}]'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$[f^{-1}]'(f(x)) = [f^{-1}]'(10) \Leftrightarrow f(x) = 10$. *Logo, para $x = 2$, temos $f(2) = 10$.*

Consequentemente, obtemos ...

$$[f^{-1}]'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$[f^{-1}]'(10) = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)}$$

$$[f^{-1}]'(10) = \frac{5}{3}$$

Questão 4

$a)$ *Encontre equações para as duas retas que passam pela origem e são tangentes à curva* $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0.$

Precisamos determinar os pontos onde essa reta tangencia a curva dada acima.

Equação da reta que passa pela origem $(0,0)$:

$$y - 0 = m(x - 0)$$
$$y = mx$$

Onde m é o coeficiente angular da reta e é dado pelo valor da derivada no ponto em que essa reta tangencia a curva. Logo, derivando implicitamente a expressão da curva, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(4x) + \frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(3) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$2x - 4 + 2y.y' + 0 = 0$$
$$y' = \frac{2-x}{y}$$

$\rightarrow$ *Substituindo* $m = y'$*na equação da reta ...*

$$y = \frac{(2-x)}{y}x$$
$$y^2 = 2x - x^2$$
$$y^2 + x^2 = 2x$$

$*$ *Pela expressão da curva* $y^2 + x^2 = 4x - 3.$

$$4x - 3 = 2x$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$

$$y^2 = 2x - x^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \therefore y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pontos de tangencia: $A = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *e* $B = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Pela equação da reta que passa pela origem, temos $m = \frac{y}{x}$. *Nos pontos A e B, temos* $m_A = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ *e* $m_B = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Equação das retas tangentes:

$$y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad e \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$b)\ Calcule\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^x.$

$*\ Seja\ x=10n. Se\ x\to+\infty, então\ n\to+\infty. Ajustando\ o\ limite, temos:$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^x=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{10}{10n}\right)^{10n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{10};$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{10}=\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{10}=e^{10}.$$

$*\ Obs: Limite\ Fundamental\ Exponencial\ \lim_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

Questão 5

$a)$ *Há uma reta que tangencia o gráfico de* $f(x)=2^{\log_3 x}.\ln 3$, *no ponto de abscissa* $x=1$. *Tal reta intercepta o eixo* $-\ y$ *num ponto cuja ordenada é dada por* $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$. *Determine essa ordenada.*

$f(1)=2^{\log_3 1}.\ln 3=2^0.\ln 3=\ln 3.\quad Ponto\ P=(1,\ln 3)$

$f'(x)=2^{\log_3 x}.\dfrac{1}{x.\ln 3}.\ln 2.\ln 3$

$f'(x)=2^{\log_3 x}.\dfrac{\ln 2}{x}\ ;\quad f'(1)=\ln 2$

Equação da reta tangente em $P=(1,\ln 3)$:

$y-\ln 3=\ln 2\,(x-1)$

$y=\ln 3+x.\ln 2-\ln 2$

Em $x=0$ (*interseção com o eixo* y), *temos* $y=\ln 3-\ln 2=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

$b)$*Sendo* $f(x)=x^{e^{x^e}}$, *calcule* $f'(x)$.

$\ln f(x)=\ln(x)^{e^{x^e}}$

$\ln f(x)=e^{x^e}\ln x$

Pela diferenciação logarítmica, encontramos a seguinte expressão:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=e^{x^e}(ex^{e-1}).\ln x+e^{x^e}.\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=f(x).e^{x^e}\left[ex^{e-1}\ln x+\frac{1}{x}\right]$$

$$f'(x)=x^{e^{x^e}}e^{x^e}\left[ex^{e-1}.\ln x+\frac{1}{x}\right], ou\ ainda, f'(x)=x^{e^{x^e}-1}.e^{x^e}+e^{x^e+1}x^{e^{x^e}+e-1}\ln x$$

12.5 3ª Prova – 08 de Abril de 2016

***Questão* 1**

a) Um triângulo é definido pelos vértices $V_1(0,0), V_2(50,0)$ *e* $V_3(0,30)$. *O vértice* V_2 *se move para a esquerda a uma taxa de* $2\, m/h$ *e o vértice* V_3 *se move para cima a uma taxa de* $3\, m/h$.

i. Determine a que taxa a área cresce após $5h$.

ii. Em que momento a área para de crescer?

b) Um incêndio em um campo aberto se alastra em forma de círculo. O raio do círculo aumenta à razão de $1\, m/min$. *Determine a taxa à qual a área incendiada está aumentando, quand o raio é de* 20 *metros*.

***Questão* 2.**

a) Use diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de tinta de $0{,}01 cm$ *a uma semi − esfera com diâmetro de* 100 *metros*.

b) Use aproximação linear para estimar $\sqrt{99{,}8}$.

***Questão* 3.**

a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{senh} x}{e^x}$;

b) Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = e^x \operatorname{sech} x$, *no ponto onde* $x = 0$.

***Questão* 4.**

a) Determine os números críticos da função $f(x) = 2\cos x - 2\operatorname{sen} 2x$ *que estão no intervalo* $[0,2\pi]$ *e, em seguida, determine os valores de máximo e mínimo absolutos da função nesse intervalo.*

b) Se $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2$, *ache os valores máximo e mínimo absolutos de* f *no intervalo* $[0,9]$.

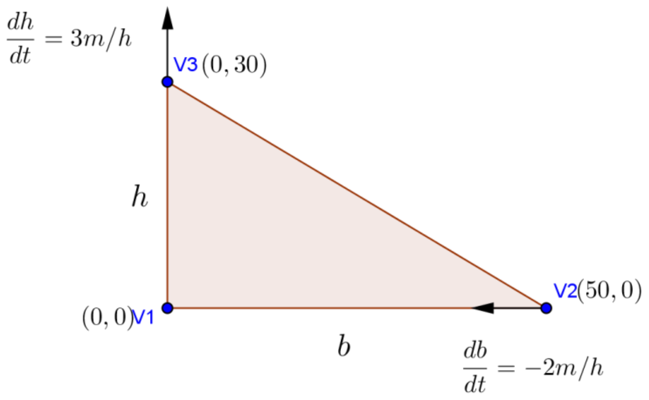
***Questão* 5.**

a) Demonstre a identidade $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} = -\dfrac{\pi}{2}$.

b) Use o Teorema de Rolle para mostrar que a função $f(x) = \operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$ *não possui mais que duas raízes reais.*

Questão 1

$a)$ *Um triângulo é definido pelos vértices* $V_1(0,0), V_2(50,0)$ *e* $V_3(0,30)$. *O vértice* V_2 *se move para a esquerda a uma taxa de* $2\,m/h$ *e o vértice* V_3 *se move para cima a uma taxa de* $3\,m/h$.



$i.$ *Determine a que taxa a área cresce após* $5h$.

$$A = \frac{1}{2} b \times h$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{db}{dt}.h + b.\frac{dh}{dt}\right]$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}[-2h + 3b]$$

$*$ *Após* $5h, b = 50 - 2 \times 5 = 40m$ *e* $h = 30 + 3 \times 5 = 45m$. *Logo,*

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\substack{b=60m \\ h=45m}} = \frac{1}{2}[-2 \times 45 + 40 \times 3] = \frac{1}{2}[-90 + 120] = \frac{1}{2}[30] = 15\,m^2/h$$

$*$ *A área do triângulo cresce à taxa de* $15\,m^2/h$ *após* $5h$.

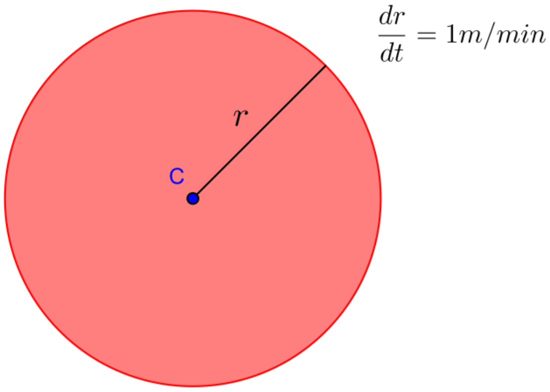
$ii.$ *Em que momento a área para de crescer?*

A área para de crescer quando $\frac{dA}{dt} = 0$. *Pela expressão inicial, obtemos:*

$$\frac{db}{dt}.h = -b.\frac{dh}{dt}$$
$$-2h = -3b$$
$$h = \frac{3}{2}b$$
$$h(t) = 30 + 3t\;;\;\; b(t) = 50 - 2t$$
$$30 + 3t = \frac{3}{2}(50 - 2t)$$
$$30 + 3t = 75 - 3t$$
$$6t = 45$$

$$t = \frac{45}{6} = \frac{15}{2} = 7{,}5h \ ou \ 7h30min$$

$b)$ *Um incêndio em um campo aberto se alastra em forma de círculo. O raio do círculo aumenta à razão de* $1\, m/min$. *Determine a taxa à qual a área incendiada está aumentando, quand o raio é de* 20 *metros*.



$$A = \pi r^2$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r . 1$$
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r$$
$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=20m} = 40\pi \, m^2/min$$

$*$ *A área incendiada está aumentando à taxa de* $40\pi \, m^2/min$ *quando o raio é de* 20 *metros*.

***Questão* 2.**

$a)$ *Use diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de tinta de* $0{,}01cm$ *a uma semi − esfera com diâmetro de* 100 *metros*.

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3$$
$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$
$$dV = 2\pi r^2 dr = 2\pi(50m)^2 . (10^{-4}m) = 2\pi . (0{,}25) = \frac{\pi}{2} m^3$$

Para pequenas variações temos $\Delta V \approx dV$. *Logo, serão necessários* $\frac{\pi}{2} m^3$ *de tinta para aplicar uma camada de* $0{,}01cm$ *a uma semi − esfera com diametro de* $100m$

$b)$ *Use aproximação linear para estimar* $\sqrt{99{,}8}$.

A aproximação linear ou linearização de $f(x) = \sqrt{x}$ *em* $a = 100$ *é dada pela expressão*:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Onde $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. *Então* $f'(a) = f'(100) = \dfrac{1}{2\sqrt{100}} = \dfrac{1}{20}$.

$$L(x) = \sqrt{100} + f'(100)(x-100)$$
$$L(x) = 10 + \frac{1}{20}(x-100)$$

Queremos estimar pela linearização, o valor de $\sqrt{99{,}8}$, *ou seja,*

$$L(99{,}8) = 10 + \frac{1}{20}(99{,}8 - 100) = 10 - \frac{0{,}2}{20} = 10 - 0{,}01 = 9{,}99$$

Logo, $\sqrt{99{,}8} \approx L(99{,}8) = 9{,}99$.

***Questão* 3.**

a) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{senh} x}{e^x}$;

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{senh} x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{2e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}(2)};$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}(2)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}}\right] = \frac{1}{2}[1-0] = \frac{1}{2}.$$

b) Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = e^x \operatorname{sech} x$, *no ponto onde* $x = 0$.

Quando $x = 0$, *temos o ponto* $P = (0,1)$ *no gráfico de* $y = e^x \operatorname{sech} x$.

$$\frac{dy}{dx} = e^x \operatorname{sech} x + e^x(-\operatorname{sech} x \,.\, \operatorname{tgh} x)$$
$$\frac{dy}{dx} = e^x \operatorname{sech} x\,(1 - \operatorname{tgh} x)\;;\;\; \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = e^0 \operatorname{sech} 0\,(1 - \operatorname{tgh} 0) = 1$$

Equação da reta tangente em $P(0,1)$:

$$y - 1 = 1(x - 0)$$
$$y = x + 1$$

***Questão* 4.**

a) Determine os números críticos da função $f(x) = 2\cos x - 2\operatorname{sen} 2x$ *que estão no intervalo* $[0,2\pi]$ *e, em seguida, determine os valores de máximo e mínimo absolutos da função nesse intervalo.*

A *função* f é *uma composição de funções trigonométricas contínuas e deriváveis em* $\mathbb{R}$ *e, portanto,* f é *contínua em* $\mathbb{R}$*. Logo,* f é *contínua no intervalo fechado* $[0,2\pi]$*. Podemos então utilizar o método do intervalo fechado para determinar os valores extremos absolutos da função* f *neste intervalo incluindo os números críticos da função.*

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo*:

$f(0) = 2\cos 0 - 2\operatorname{sen} 0 = 2 - 0 = 2$
$f(2\pi) = 2\cos 2\pi - 2\operatorname{sen} 4\pi = 2 - 0 = 2$

2. *Os valores de* f *nos números críticos de* f *em* $(0,2\pi)$:

"*Um número crítico de uma função* f é *um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*"

Como a função f *em questão* é *diferenciável em* $\mathbb{R}$*, se* f *possui algum número crítico* c *em* $(0,2\pi)$ *então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$.

$f'(x) = -2\operatorname{sen} x - 4\cos 2x$
$f'(x) = -2\operatorname{sen} x - 4(1 - 2\operatorname{sen}^2 x)$
$f'(x) = -2(-4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 2 = 0$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{-8} = \frac{1 \mp \sqrt{33}}{8}$$

$$x = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \;\; e \;\; x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$$

$*$ *Obs*: *considerando o intervalo* $(0,2\pi)$ *a função seno admite* 2 *arcos com a mesma imagem, ou seja, há* 4 *números críticos no intervalo* $(0,2\pi)$*. São eles*:

$$x_1 = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \qquad x_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$$

$$x_3 = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \; e \; x_4 = 2\pi + \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$$

$*$ *Obs*2: *Lembre* $-$ *se do conjunto imagem da função* $\arcsin x$ *para interpretar como apareceram* π *e* 2π *na composição das respostas*!

$$\cos x_1 = \frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{8} \; ; \; \cos x_2 = -\frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{8}$$
$$\cos x_3 = -\frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8} \; ; \cos x_4 = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8}$$

$$f(x) = 2\cos x - 4\,\text{sen}\,x\cos x$$
$$f(x) = 2\cos x\,(1 - 2\,\text{sen}\,x)$$

$$f(x_1) = \frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{4}\left(1 - \frac{1 + \sqrt{33}}{4}\right) = \frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{16}\left(3 - \sqrt{33}\right) \quad * f(x_1) < 0$$

$$f(x_2) = -\frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{4}\left(1 - \frac{1 + \sqrt{33}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{16}\left(3 - \sqrt{33}\right) \quad * f(x_2) > 0$$

$$f(x_3) = -\frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{4}\left(1 - \frac{1 - \sqrt{33}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{16}\left(3 + \sqrt{33}\right) \quad * f(x_3) < 0$$

$$f(x_4) = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{4}\left(1 - \frac{1 - \sqrt{33}}{4}\right) = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{16}\left(3 + \sqrt{33}\right) \quad * f(x_4) > 0$$

Pelos valores obtidos acima, podemos concluir que $f(x_3) < f(x_1) < 0$. *E, com* $f(0) = f(2\pi) = 2$, *concluimos que* $f(x_3)$ *é o valor mínimo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[0,2\pi]$.

Dos valores positivos, temos $f(x_2)$ *e* $f(x_4)$, *onde* $f(x_4) > f(x_2)$. *Resta saber se* $f(x_4) > 2$. *Logo,*

$$\frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{16}\left(3 + \sqrt{33}\right);\ \ 8 < \left(3 + \sqrt{33}\right) < 9\,;\ 6 < \sqrt{30 + 2\sqrt{33}} < 7$$

Logo,

$$48 < \sqrt{30 + 2\sqrt{33}}\left(3 + \sqrt{33}\right) < 63$$

$$3 < \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}\left(3 + \sqrt{33}\right)}{16} < \frac{63}{16}$$

Portanto, $f(x_4) > 2$ *e, por isso,* $f(x_4)$ *é o valor máximo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[0,2\pi]$.

b) Se $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2$, *ache os valores máximo e mínimo absolutos de* f *no intervalo* $[0,9]$.

A função f *é uma composição das funções racional e constante, contínuas no intervalo fechado* $[0,9]$ *e, portanto,* f *é contínua no intervalo fechado* $[0,9]$. *Logo, podemos utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos absolutos de* f.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo.*

$f(0) = \sqrt[3]{1} + 2 = 3$
$f(9) = \sqrt[3]{64} + 2 = 6$

$2.$ *Os valores de* f *nos números críticos de* f *no intervalo* $(0,9)$.

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*".

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

Note que $f'(x) = 0$ *não possui solução para* $x \in \mathbb{R}$. *Entretanto,* $f'(x)\nexists$ *para* $x = 1$ *e, como* $1 \in (0,9)$ *então* 1 *é um número crítico de* f.

$f(1) = \sqrt[3]{0} + 2 = 2$

Comparando os resultados obtidos, concluimos que $f(9) = 6$ *é o valor máximo absoluto e* $f(1) = 2$ *é o valor mínimo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[0,9]$.

***Questão* 5.**

$a)$ *Demonstre a identidade* $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Seja $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}\ , D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}}.\frac{d}{dx}\left[\frac{x-1}{x+1}\right] - 2.\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}.\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2-(x-1)^2}}\left[\frac{2}{(x+1)^2}\right] - \frac{2}{1+x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{4x}}.\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = 0$$

Teorema: Se $f'(x) = 0$ *para todo* x *em um intervalo* (a,b), *então* f *é constante em* (a,b). *Ou seja,* $f(x) = C$ *em* (a,b), *onde* C *é uma constante.*

Nesse caso, temos que $f'(x) = 0$ *para todo* x *no intervalo* $(0,+\infty)$, *então* f *é constante em* $(0,+\infty)$. *Calculando o valor de* f *para* $x = 0$, *por exemplo, obtemos o valor* C, *tal que*:

$$f(0) = \operatorname{arcsen}(-1) - 2\operatorname{arctg} 0 = -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2} = C$$

$$\textit{Portanto, } f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2}$$

$b)$ *Use o Teorema de Rolle para mostrar que a função* $f(x) = \operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$ *não possui mais que duas raízes reais.*

Em outras palavras, "Mostre que $f(x)$ *possui no máximo 2 raízes reais"*

$*$ *Suponhamos que* f *possui 3 raízes reais,* a, b *e* c *tais que* $f(a) = f(b) = f(c) = 0$;
Com $a \neq b, a \neq c$ *e* $b \neq c$.

Como f é *uma função contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e* $f(a) = f(b)$ *e* $f(b) = f(c)$, *então existe algum* $\mathrm{d} \in (a, b)$ *e* $\mathrm{e} \in (b, c)$ *tal que* $f'(\mathrm{d}) = 0$ *e* $f'(\mathrm{e}) = 0$, *com* $d \neq e$.
Ou seja, $f'(x)$, *por essa hipótese, possui 2 raízes reais.*

$f'(x) = 2 \operatorname{senh} x \,.\, \cosh x + 2 \cosh x \,.\, \operatorname{senh} x$
$f'(x) = 4 \operatorname{senh} x \cosh x \quad ; * \cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{senh} x = 0 \therefore x = 0.$

Logo, $f'(x)$ *só possui 1 raíz real* $(x = 0)$ *e, por contradição,* f *possui no máximo 2 raízes reais.*

12.6 3ª Prova – 09 de Abril de 2016

***Questão* 1**

$a)$ *Um triângulo isósceles tem os lados iguais, com* $15cm$ *cada um. Se o ângulo entre* θ *entre eles varia* $2°$ *por minuto, determine a taxa de variação da área do triângulo, quando* $\theta = 30°$.

$b)$ *Um velocista corre em uma pista circular de raio* 100 *metros, a uma velocidade angular constante de* $1°$ *por segundo. Seu amigo está em pé a uma distância de* $200m$ *do centro da pista. Quão rápido está variando a distância entre os amigos, quando* $\theta = 90°$?

***Questão* 2**

$a)$ *O raio de um cilindro circular reto de altura igual a* 2 *metros, mede* $50cm$, *com um erro de medida, de no máximo,* $1cm$. *Encontre o erro máximo que este desvio pode causar no volume do cilindro.*

$b)$ *Estime o valor de* $\operatorname{senh}(0{,}1) + \cosh(0{,}1)$.

***Questão* 3**

$a)$ *Mostre que* $\cosh(x+y) = \cosh x \,.\cosh y + \operatorname{senh} x \,.\operatorname{senh} y$.

$b)$ *Encontre a equação da reta normal ao gráfico de* $y = e^{\cosh(3x)}$, *no ponto onde* $x = 0$.

***Questão* 4**

$a)$ *Se* $a > 0$ *e* $b > 0$, *ache o valor máximo absoluto de* $f(x) = x^a(1-x)^b$, *com* $x \in [0{,}1]$.

$b)$ *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função* $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$, *no intervalo* $[0{,}2\pi]$.

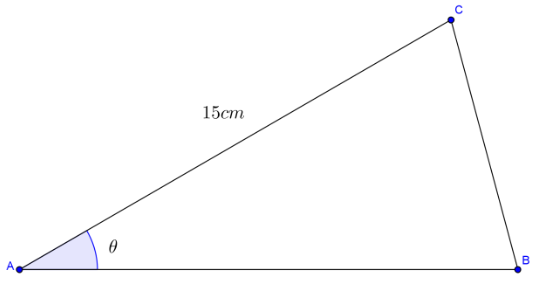
***Questão* 5**

$a)$ *Suponha que uma função* f *seja duas vezes diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e que tenha três raízes reais distintas. Mostre que* f'' *tem pelo menos uma raíz real. Em seguida, comprove que este fato ocorre, dando um exemplo.*

$b)$ *Mostre que* $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{\pi}{4}$.

***Questão* 1**

$a)$ *Um triângulo isósceles tem os lados iguais, com* $15cm$ *cada um. Se o ângulo entre* θ *entre eles varia* $2°$ *por minuto, determine a taxa de variação da área do triângulo, quando* $\theta = 30°$.



$*$ *Área de um triângulo dado dois lados e o ângulo adjacente entre eles:*

$$A = \frac{1}{2}a.b.\operatorname{sen}\theta \quad ; onde\ a = b = 15cm\ \ e\ \ \frac{d\theta}{dt} = 2\,°/min = \frac{\pi}{90}rad/min$$

$$A = \frac{225}{2}\operatorname{sen}\theta$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$

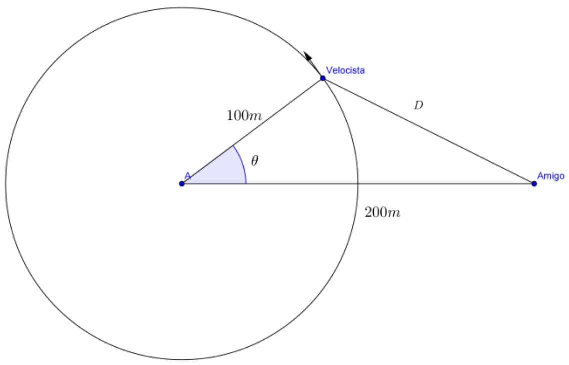
$$\frac{dA}{dt} = \frac{225}{2}\cos\theta.\frac{\pi}{90}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{5\pi}{4}\cos\theta$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}rad} = \frac{5\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{8}m^2/min$$

Logo, a área do triângulo isósceles, em questão, está crescendo à taxa de $\frac{5\pi\sqrt{3}}{8}m^2/min$ *quando* $\theta = 30°$.

$b)$ *Um velocista corre em uma pista circular de raio* 100 *metros, a uma velocidade angular constante de* $1°$ *por segundo. Seu amigo está em pé a uma distância de* $200m$ *do centro da pista. Quão rápido está variando a distância entre os amigos, quando* $\theta = 90°$?



$Pela\ Lei\ dos\ Cossenos, temos$:

$$D^2 = 100^2 + 200^2 - 2 \times 100 \times 200 \times \cos\theta$$
$$D^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$
$$\frac{d}{dt}(D^2) = \frac{d}{dt}(50000) - \frac{d}{dt}(40000\cos\theta)$$
$$2.D.\frac{dD}{dt} = 40000 \operatorname{sen}\theta\,.\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{dD}{dt} = \frac{20000\operatorname{sen}\theta}{D}.\frac{d\theta}{dt}$$

$Quando\ \theta = 90°\ ou\ \frac{\pi}{2} rad, obtemos\ D = \sqrt{50000} = 100\sqrt{5}m. Sabendo\ que\ a$ $velocidade\ angular, ou\ ainda, \frac{d\theta}{dt} = 1\,°/s = \frac{\pi}{180} rad/s\,, então\ ...$

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{\substack{D=100\sqrt{5}m \\ \theta=90°}} = \frac{20000\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{100\sqrt{5}}.\frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{9\sqrt{5}} = \frac{2\pi\sqrt{5}}{9} m/s$$

$Logo, a\ distância\ entre\ os\ amigos\ está\ aumentado\ à\ taxa\ de\ \frac{2\pi\sqrt{5}}{9} m/s\ \ quando$ $\theta = 90°.$

Questão 2

$a)$ $O\ raio\ de\ um\ cilindro\ circular\ reto\ de\ altura\ igual\ a\ 2\ metros, mede\ 50cm, com$ $um\ erro\ de\ medida, de\ no\ máximo, 1cm. Encontre\ o\ erro\ máximo\ que\ este\ desvio$ $pode\ causar\ no\ volume\ do\ cilindro.$

$Comparando\ o\ erro\ de\ medida\ com\ a\ medida\ do\ raio\ inicial\ do\ cilindro, concluimos$ $que\ 1cm \ll 50cm, ou\ seja, a\ variação\ do\ raio\ foi\ muito\ pequena\ comparada\ as$ $dimensões\ do\ cilindro. Logo, para\ pequenas\ variações\ teremos\ \Delta V \approx dV.$

$$V = \pi r^2 h = 2\pi r^2$$
$$dV = 4\pi r.dr$$
$$dV = 4\pi.\frac{50}{100}.\frac{1}{100} = \frac{\pi}{50} m^3$$
$$\Delta V \approx dV = \frac{\pi}{50} m^3$$

$O\ erro\ máximo\ que\ o\ desvio\ de\ 1cm\ pode\ causar\ no\ volume\ do\ cilindro\ em\ questão$ $é\ de\ \ \pi/50\, m^3.$

$b)$ $Estime\ o\ valor\ de$ $\operatorname{senh}(0{,}1) + \cosh(0{,}1).$

$Seja\ f(x) = \operatorname{senh} x + \cosh x\,;\ f(0) = 1\ e\ f'(x) = f(x)\ \Rightarrow f'(0) = f(0) = 1.$

$Por\ aproximação\ linear\ ou\ linearização\ da\ função\ f\ em\ x = 0, temos$:

$$L(x) - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$
$$L(x) = x + 1$$

Usando o fato de que a estimativa por aproximação linear é válida para pequenas variações em torno de $x = 0$ *(neste caso), então podemos dizer que*

$$f(0,1) \approx L(0,1) = 1,1$$

Logo, $\operatorname{senh}(0,1) + \cosh(0,1) \approx 1,1.$

Questão 3

a) Mostre que $\cosh(x+y) = \cosh x \,.\cosh y + \operatorname{senh} x \,.\operatorname{senh} y.$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$$
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$
$$\cosh(x+y) = \frac{e^{2x+2y}+1}{2e^{x+y}}$$

$*$ *Provando a identidade acima desenvolvendo o segundo membro*:

$$\cosh x \,.\cosh y = \frac{1}{4}.\frac{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)}{e^x e^y} = \frac{1}{4}.\frac{(e^{2x+2y}+e^{2x}+e^{2y}+1)}{e^x e^y}$$
$$\operatorname{senh} x \,.\operatorname{senh} y = \frac{1}{4}.\frac{(e^{2x}-1)(e^{2y}-1)}{e^x e^y} = \frac{1}{4}.\frac{(e^{2x+2y}-e^{2x}-e^{2y}+1)}{e^x e^y}$$
$$\cosh x \,.\cosh y + \operatorname{senh} x \,.\operatorname{senh} y = \frac{1}{4}.\frac{2(e^{2x+2y}+1)}{e^x e^y} = \frac{e^{2x+2y}+1}{2e^x e^y} = \cosh(x+y)$$

$*$ *Provando a igualdade desenvolvendo o primeiro membro*:

$$\begin{aligned}
\cosh(x+y) &= \frac{e^{2x}e^{2y}+1}{e^x e^y} \\
&= \frac{2e^{2x}e^{2y}+2}{4e^x e^y} \\
&= \frac{2e^{2x}e^{2y}+2+e^{2x}-e^{2x}+e^{2y}-e^{2y}}{4e^x e^y} \\
&= \frac{(e^{2x}e^{2y}+e^{2x}+e^{2y}+1)+(e^{2x}e^{2y}-e^{2x}-e^{2y}+1)}{4e^x e^y} \\
&= \frac{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)}{4e^x e^y} + \frac{(e^{2x}-1)(e^{2y}-1)}{4e^x e^y} \\
&= \frac{e^{2x}+1}{2e^x}\cdot\frac{e^{2y}+1}{2e^y} + \frac{e^{2x}-1}{2e^x}\cdot\frac{e^{2y}-1}{2e^y} \\
&= \cosh x \,.\cosh y + \operatorname{senh} x \,.\operatorname{senh} y
\end{aligned}$$

$*$ *Obs: esse segundo método foi mostrado apenas por razões didáticas.*

$b)$ *Encontre a equação da reta normal ao gráfico de* $y = e^{\cosh(3x)}$*, no ponto onde* $x = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = 3\,\mathrm{senh}(3x)\,.\,e^{\cosh(3x)}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 3\,\mathrm{senh}(0)\,.\,e^{\cosh(0)} = 0$$

Logo, a reta tangente em $x = 0$ *é uma reta horizontal e, portanto, a reta normal ao gráfico de* $y = e^{\cosh(3x)}$ *no ponto* $(0, e)$ *é uma reta vertical de equação* $x = 0$.

Questão 4

$a)$ *Se* $a > 0$ *e* $b > 0$*, ache o valor máximo absoluto de* $f(x) = x^a(1-x)^b$*, com* $x \in [0,1]$. $* \; D(f) = \mathbb{R}$

f *é uma função polinomial e, portanto, contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$*. Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[0,1]$*. Podemos então utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos absolutos de* f *no intervalo fechado* $[0,1]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo:*

$f(0) = 0$ *e* $f(1) = 0$.

2. *Os valores de* f *nos números críticos de* f *em* $(0,1)$:

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*"

Como f *é uma função diferenciável em* $\mathbb{R}$*, se* f *possui algum número crítico* c *em* $(0,1)$ *então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$.

$f'(x) = ax^{a-1}(1-x)^b - bx^a(1-x)^{b-1}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow ax^{a-1}(1-x)^b = bx^a(1-x)^{b-1}$

$ax^a.x^{-1}(1-x)^b = bx^a(1-x)^b(1-x)^{-1}$

$\frac{a}{x} = \frac{b}{1-x} \Rightarrow x(a+b) = a \therefore x = \frac{a}{a+b}$; *com* $a > 0$ *e* $b > 0$, $\frac{a}{a+b} \in (0,1)$.

$$f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)^b$$
$$f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \frac{a^a}{(a+b)^a}.\frac{b^b}{(a+b)^b} = \frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$$

Comparando os valores obtidos, concluimos que $\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$ *é o valor máximo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[0,1]$.

$b)$ *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função* $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$, *no intervalo* $[0,2\pi]$. $\quad * D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x\,(2 + \operatorname{sen} x) - \cos x\,.\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)^2} = \frac{-(2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(2\operatorname{sen} x + 1)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}\ ;\ D(f') = \mathbb{R}$$

f *é uma função racional contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[0,2\pi]$. *Podemos então utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos de* f *no intervalo fechado* $[0,2\pi]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo:*
$f(0) = \dfrac{\cos 0}{2 + \operatorname{sen} 0} = \dfrac{1}{2}\ ;\ f(2\pi) = \dfrac{\cos 2\pi}{2 + \operatorname{sen} 2\pi} = \dfrac{1}{2}$.

2. *Os valores de* f *nos números críticos de* f *em* $(0,2\pi)$:

"*Um número crítico de uma função* f *é um númer* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*".

Como f *é uma função diferenciável em* $\mathbb{R}$, *então diferenciável em* $(0,2\pi)$, *se* f *possui algum número crítico* c *em* $(0,2\pi)$ *então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = \frac{-(2\operatorname{sen} x + 1)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \therefore x = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{2 + \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{2 + \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Comparando os valores obtidos, concluimos que $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ *é o valor máximo absoluto e* $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ *é o valor mínimo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[0,2\pi]$.

***Questão* 5**

$a)$ *Suponha que uma função f seja duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e que tenha três raízes reais distintas. Mostre que f'' tem pelo menos uma raíz real. Em seguida, comprove que este fato ocorre, dando um exemplo.*

Se f é uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e possui 3 raízes reais distintas x_1, x_2 e x_3, tais que $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$.

Suponhamos que $x_1 < x_2 < x_3$. Como f é contínua e diferenciável $\mathbb{R}$, então f é contínua nos intervalos fechados $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$ e diferenciável nos intervalos abertos (x_1, x_2) e (x_2, x_3), e ainda, $f(x_1) = f(x_2)$ e $f(x_2) = f(x_3)$. Então, pelo Teorema de Rolle, existe algum $x_4 \in (x_1, x_2)$ e $x_5 \in (x_2, x_3)$ tais que $f'(x_4) = 0$ e $f'(x_5) = 0$.

Como f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, então f' é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, f' é contínua no intervalo fechado $[x_4, x_5]$ e contínua no intervalo aberto (x_4, x_5). E como $f'(x_4) = f'(x_5)$, pelo Teorema de Rolle, existe algum $x_6 \in (x_4, x_5)$ tal que $f''(x_6) = 0$. Ou seja, $f''(x)$ tem pelo menos uma raíz real.

Exemplo: Seja $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$
$$f''(x) = 6x - 4$$

Note que f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ uma vez que $D(f') = \mathbb{R}$ e $D(f'') = \mathbb{R}$. Aplicando o Teorema de Rolle entre duas raízes consecutivas de f, provamos que existe $x_4 \in (-1,1)$ e $x_5 \in (1,2)$ tais que $f'(x_4) = 0$ e $f'(x_5) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 0\,; \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} \Longrightarrow x_4 = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{6} \text{ e } x_5 = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{6}$$

Ainda considerando que f é duas vezes diferenciável, mostramos que existe algum $x_6 \in (x_4, x_5)$ tal que $f''(x_6) = 0$. Logo,

$$f''(x_6) = 0 \Longrightarrow 6x_6 - 4 = 0 \therefore x_6 = \frac{4}{6}$$

Onde, $\dfrac{4 - 2\sqrt{7}}{6} < \dfrac{4}{6} < \dfrac{4 + 2\sqrt{7}}{6}$. *Comprovando que f'' tem pelo menos 1 raíz.*

$b)$ *Mostre que* $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{\pi}{4}$.

Sejam f e g funções tais que $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ *e* $g(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ *onde $D(f) = \mathbb{R}$ e $D(g) = \mathbb{R} - \{1\}$. Então,*

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}.\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}}.\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-x.\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x)}{1+x^2}\right]$$

$$f'(x)=\sqrt{1+x^2}.\left[\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}.\frac{d}{dx}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$$

$$g'(x)=\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2}.\left[\frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\right]$$

$$g'(x)=\frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)}.\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

Logo, $f'(x)=g'(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

"*Se* $f'(x)=g'(x)$ *para todo* x *em um intervalo* (a,b) *então* $f-g$ *é constante em* (a,b); *isto é,* $f(x)=g(x)+C$, *em que* C *é uma constante*"

No caso em questão $f'(x)=g'(x)$ *para todo* $x\in(-\infty,+\infty)$ *então* $f-g$ *é constante em* $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. *Logo,* $f(x)=g(x)+C$, *onde* C *é uma constante a ser determinada. Note, que devido ao domínio da função* g *podemos ter valores distintos para* C *caso* $x\in(-\infty,1)$ *ou caso* $x\in(1,+\infty)$.

Calculando a expressão para $x=0$, *obtemos o valor de* C *caso* $x\in(-\infty,1)$.

$$f(0)=g(0)+C$$
$$\operatorname{arcsen}0=\operatorname{arctg}1+C$$
$$0=\frac{\pi}{4}+C\ \therefore C=-\frac{\pi}{4}$$

Logo, $f(x)=g(x)-\frac{\pi}{4}$ *e, portanto,*

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{\pi}{4}\ ,\forall x\in(-\infty,1)$$

Caso $x\in(1,+\infty)$, *calculando o valor da identidade para* $x=\sqrt{3}$, *temos:*

$$f(\sqrt{3})=g(\sqrt{3})+C$$
$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)+C$$

$$\frac{\pi}{3} = \text{arctg}\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}\right) + C$$
$$C = \frac{\pi}{3} - \text{arctg}\left(-2-\sqrt{3}\right)$$

$* \, Como \; a \; função \; \text{arctg}\, x \;\; é \; uma \; função \; ímpar, então:$

$$C = \frac{\pi}{3} + \text{arctg}\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$\text{tg}\,\theta = 2+\sqrt{3}; \;\; \text{tg}^2\,\theta + 1 = \sec^2\theta \therefore \sec^2\theta = 8+4\sqrt{3}$

$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1}{8+4\sqrt{3}}} = \sqrt{\dfrac{8-4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad e \quad \text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$Calculando \; a \; expressão \; \text{sen}\, 2\theta \;\; temos:$

$\text{sen}\, 2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 2.\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{1}{2} \therefore 2\theta = \dfrac{\pi}{6} \; ou \; 2\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

$Como \; \text{sen}\,\theta > \dfrac{1}{2} \; então \; \theta > \dfrac{\pi}{6}. Logo,$

$$2\theta = \frac{5\pi}{6} \therefore \theta = \frac{5\pi}{12}$$

$Portanto, C = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{9\pi}{12} = \dfrac{3\pi}{4}$

$Então, para \; x \in (1, +\infty), temos:$

$$f(x) = g(x) + \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \text{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{3\pi}{4} \;, \forall x \in (1, +\infty)$$

$* \, Poderíamos \; obter \; os \; mesmos \; resultados \; calculando \; o \; limite \; da \; expressão$
$f - g \; quando \; x \to 1^+ \; e \; quando \; x \to 1^-. Demonstrando:$

$$\lim_{x\to 1^-}\left[\text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \text{arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] = \lim_{x\to 1^-}\text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \lim_{x\to 1^-}\text{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$= \text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \text{arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] = \lim_{x\to 1^+}\text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \lim_{x\to 1^+}\text{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$= \text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

$* \, Portanto, a \; identidade \; exposta \; é \; válida \; somente \; para \; x \in (-\infty, 1).$

12.7 4ª Prova – 06 de Maio de 2016

Questão 1

$a)$ $Encontre\ a\ função\ em\ cujo\ gráfico\ a\ reta\ tangente\ possua\ coeficiente\ angular\ dado\ pela\ expressão\ x^3 - 2x^{-2} + 2, em\ cada\ valor\ de\ x, e\ de\ sorte\ que\ o\ citado\ gráfico\ passa\ pelo\ ponto\ (1,3).$

$b)$ $Sabe - se\ que\ f'(x) = \dfrac{2+x^2}{1+x^2}\ e\ que\ f(1) = \dfrac{\pi}{2}. Encontre\ f(x).$

Questão 2

$a)$ $Uma\ lata\ cilíndrica\ deve\ conter\ 27\ litros\ de\ líquido. O\ custo\ do\ material\ usado\ para\ o\ fundo\ e\ a\ tampa\ da\ lata\ é\ de\ 3\ centavos\ por\ centímetro\ quadrado\ e\ o\ custo\ do\ material\ usado\ para\ a\ lateral\ lata\ é\ de\ 2\ centavos\ por\ centímetro\ quadrado. Quais\ os\ valores\ do\ raio\ e\ da\ altura\ do\ cilindro\ para\ que\ o\ custo\ da\ matéria\ prima\ utilizada\ na\ lata\ seja\ o\ menor\ possível?$

$b)$ $Um\ triângulo\ isósceles\ tem\ um\ dos\ seus\ vértices\ na\ origem\ e\ sua\ base\ é\ paralela\ ao\ eixo - x, estando\ os\ vértices\ da\ base\ acima\ do\ eixo\ e\ sobre\ a\ curva\ y = 27 - x^2. Determine\ a\ maior\ área\ que\ o\ triângulo\ pode\ assumir.$

Questão 3

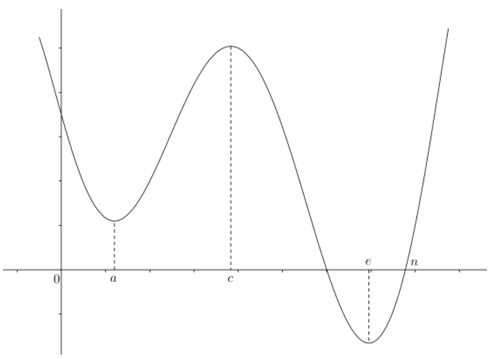
$a)$ $Calcule\ \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{2\left(e^{\cos\theta} + \frac{\theta}{2} - 1\right) - \frac{\pi}{2}}{\ln[\text{sen}(-3\theta)]};$

$b)$ $Use\ a\ Regra\ de\ L'Hôpital\ para\ calcular\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x.$

Questão 4

$a)$ $Para\ quais\ valores\ dos\ números$ a e b $a\ função\ f(x) = axe^{bx^2}\ tem\ valor\ máximo\ f(2) = 1?$

$b)$ $Sendo\ dado\ este\ gráfico\ da\ função\ f, esboce\ um\ gráfico\ possível\ para\ a\ função\ derivada\ de\ f, justificando\ sua\ construção\ e\ apontando\ seus\ pontos\ de\ inflexão, justificando\ sua\ resposta\ com\ argumentos\ matemáticos\ e\ não\ apenas\ apontando\ no\ gráfico.$



***Questão* 5**. *Considere a função* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ *e suas primeiras derivadas*:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \ \ e \ \ f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}.$$

Determine, então,

(i) *Seus pontos de máximos e mínimos relativos, se existirem*;
(ii) *Seus intervalos de crescimento e decrescimento*;
(iii) *Suas assíntotas, se existirem*;
(iv) *Seus pontos de inflexão, se existirem*;
(v) *Os intervalos onde a concavidade é para cima e onde é para baixo*.
(vi) *Onde ficam os pontos de inflexão*.

Questão 1

$a)$ *Encontre a função em cujo gráfico a reta tangente possua coeficiente angular dado pela expressão* $x^3 - 2x^{-2} + 2$, *em cada valor de* x, *e de sorte que o citado gráfico passa pelo ponto* $(1,3)$.

Pelo enunciado da questão, temos as seguintes informações:

$$f'(x) = x^3 - 2x^{-2} + 2 \quad e \quad f(1) = 3$$

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ é:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2x^{-1} + 2x + C$$

Utilizado a condição $f(1) = 3$, *temos*:

$$3 = \frac{1}{4} + 2 + 2 + C$$
$$C = 3 - \frac{1}{4} - 4$$
$$C = -\frac{5}{4}$$

Portanto, $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2x^{-1} + 2x - \frac{5}{4}$.

$b)$ *Sabe − se que* $f'(x) = \frac{2 + x^2}{1 + x^2}$ *e que* $f(1) = \frac{\pi}{2}$. *Encontre* $f(x)$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1 + x^2}$$

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ é:

$$f(x) = x + \operatorname{arctg} x + C$$

Utilizando a condição $f(1) = \frac{\pi}{2}$, *temos*:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \operatorname{arctg} 1 + C$$

$$C = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$C = \frac{\pi}{4} - 1$$

Portanto, $f(x) = x + \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4} - 1$

Questão 2

$a)$ *Uma lata cilíndrica deve conter 27 litros de líquido. O custo do material usado para o fundo e a tampa da lata é de 3 centavos por centímetro quadrado e o custo do material usado para a lateral lata é de 2 centavos por centímetro quadrado. Quais os valores do raio e da altura do cilindro para que o custo da matéria prima utilizada na lata seja o menor possível?*

Dados da questão: $V = 27l = 27.000cm^3$; $P_1 = 0,03\ R\$/cm^2$ *e* $P_2 = 0,02\ R\$/cm^2$

$$27.000 = \pi r^2 h \qquad (Eq. 1)$$

$$C(r,h) = P_1 \times \left(A_{fundo} + A_{tampa}\right) + P_2 \times A_{lateral}$$
$$C(r,h) = 0,03(\pi r^2 + \pi r^2) + 0,02(2\pi rh)$$
$$C(r,h) = 0,06\pi r^2 + 0,04\pi rh$$

Onde $C(r,h)$ *é o custo total que depende do raio* r *e da altura* h.

Pela Equação 1, tiramos h *em função do* r*, sendo* $h(r) = \dfrac{27.000}{\pi r^2}$.
Substituindo na expressão do custo total, temos:

$$C(r) = 0,06\pi r^2 + 0,04\pi r.\frac{27000}{\pi r^2}$$
$$C(r) = 0,06\pi r^2 + 0,04.\frac{27.000}{r}$$
$$C(r) = \frac{0,06\pi r^3 + 0,04 \times 27000}{r} \quad ; \quad D(C) = \{r \in \mathbb{R}; r > 0\}$$

$*$ *O domínio da função* $C(r)$ *definida acima leva em consideração que* r *é uma variável com unidade de comprimento!*

Para encontrar os valores de r *que maximizam ou minimizam a função* C*, procuramos os números críticos dessa função.*

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*"

$$C'(r) = \frac{0,18\pi r^3 - 0,06\pi r^3 - 0,04 \times 27.000}{r^2}$$
$$C'(r) = \frac{0,12\pi r^3 - 0,04 \times 27.000}{r^2}$$

$C'(r)$ *não existe para* $r = 0$*, porém,* $0 \notin D(C)$*. Logo,* $r = 0$ *não é número crítico!*

$C'(r) = 0 \Rightarrow 0,12\pi r^3 - 0,04 \times 27.000 = 0$

$$r^3 = \frac{0,04 \times 27.000}{0,12\pi} = \frac{27.000}{3\pi} = \frac{9.000}{\pi}$$

$$\therefore r = 10\sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}cm = \frac{10}{\pi}\sqrt[3]{9\pi^2}cm$$

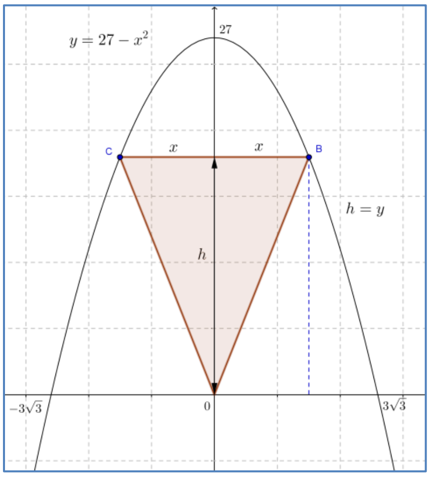
Analisando o sinal de $C'(r)$, *temos*:

$(0) - - - - - - \left(\frac{10}{\pi}\sqrt[3]{9\pi^2}\right) + + + + + + + \quad C'(r)\ ;$ *Teste da Primeira Derivada*

Com esse estudo, concluimos que $r = \frac{10}{\pi}\sqrt[3]{9\pi^2}cm$ *é um número crítico que está associado a um ponto de mínimo local e, considerando o intervalo acima esse valor é o mínimo absoluto da função do custo total. Logo, para este valor de* r *o custo será o menor possível.*

Para $r = \frac{10}{\pi}\sqrt[3]{9\pi^2}$, *temos* $h = \dfrac{27.000}{\pi.\frac{100}{\pi^2}\sqrt[3]{81\pi^4}} = \dfrac{27.000}{100\sqrt[3]{81\pi}} = \dfrac{2.700}{3\sqrt[3]{3\pi}} = \dfrac{300}{\pi}\sqrt[3]{9\pi^2}cm$

$b)$ *Um triângulo isósceles tem um dos seus vértices na origem e sua base é paralela ao eixo* $- x$, *estando os vértices da base acima do eixo e sobre a curva* $y = 27 - x^2$. *Determine a maior área que o triângulo pode assumir.*



$$A = \frac{2x.y}{2} = x.y = x(27 - x^2) = 27x - x^3$$
$$A(x) = 27x - x^3 \quad ; \quad D(A) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 3\sqrt{3}\}$$
$$A'(x) = 27 - 3x^2 = 3(9 - x^2)$$

Analisando o comportamento da função $A(x)$ *pela derivada, temos*:

$(0) + + + + (3) - - - - - (3\sqrt{3}) \quad A'(x) \ ;$ *Teste da Primeira Derivada*

Com isso, note que $x = 3$ *é um número crítico de* $A(x)$ *associado a um ponto de máximo local e, considerando o intervalo* $(0,3\sqrt{3})$, *esse ponto, além de máximo local, é o máximo absoluto de* $A(x)$.
Logo, $A(3) = 81 - 27 = 54\ u.$ *A é a maior área que o triângulo pode assumir.*

***Questão* 3**

$a)$ *Calcule* $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{2\left(e^{\cos\theta}+\frac{\theta}{2}-1\right)-\frac{\pi}{2}}{\ln[\operatorname{sen}(-3\theta)]}$; *Indeterminação do tipo* "$\dfrac{0}{0}$"

$*$ *Utilizando a Regra de L'Hôpital, obtemos*:

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{2\left(e^{\cos\theta}+\frac{\theta}{2}-1\right)-\frac{\pi}{2}}{\ln[\operatorname{sen}(-3\theta)]}\overset{L'H}{\Longrightarrow}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{2\left(-\operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}+\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3\cos(-3\theta)}{\operatorname{sen}(-3\theta)}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{2\left(-\operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}+\frac{1}{2}\right)}{-3\operatorname{cotg}(-3\theta)};$$

$*$ *Obs*: *Se* $\theta\to\dfrac{\pi}{2}^+$, *então* $\theta>\dfrac{\pi}{2}$ *e, portanto*, $-3\theta<-\dfrac{3\pi}{2}$.

$*$ Obs_2: $\operatorname{cotg}(-3\theta)=-\operatorname{cotg}(3\theta)$. *Se* $-3\theta\to-\dfrac{3\pi}{2}^-$ *então* $\operatorname{cotg}(3\theta)\to0^-$.

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{2\left(-\operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}+\frac{1}{2}\right)}{-3\operatorname{cotg}(-3\theta)}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\overbrace{2\left(-\operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}+\frac{1}{2}\right)}^{\to -1}}{\underbrace{3\operatorname{cotg}(3\theta)}_{\to 0^-}}=+\infty$$

$b)$ *Use a Regra de L'Hôpital para calcular* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\lim_{x\to\infty}e^{x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)};$$

Calculando o limite do expoente, temos:

$\lim\limits_{x\to\infty}x.\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$; *Indeterminação do tipo* "$\dfrac{0}{0}$"

Utilizando a Regra de L'Hôpital, obtemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1};$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2}=\lim_{x\to\infty}1=1.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^1=e.$$

***Questão* 4**

$a)$ *Para quais valores dos números* a *e* b *a função* $f(x) = axe^{bx^2}$ *tem valor máximo* $f(2) = 1$?

Como f *é uma função definida pelo produto de funções contínuas e diferenciáveis em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$. *Logo, se* f *tem valor máximo* 1 *em* $x = 2$, *então* 2 *é um número crítico de* f *e, como* f *é diferenciável em* $\mathbb{R}$, $f'(2)$ *existe e* $f'(2) = 0$. *(Teorema de Fermat)*

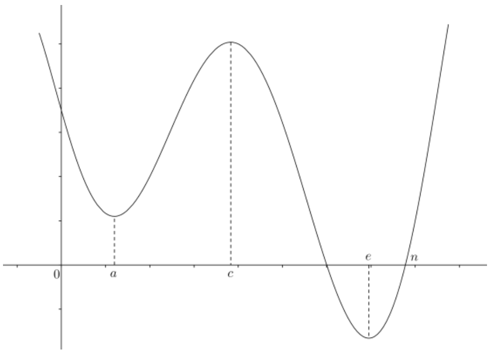
$$f'(x) = ae^{bx^2}(1 + 2bx^2)$$

$$f'(2) = 0 \Longrightarrow ae^{4b}(1 + 8b) = 0 \Longrightarrow 1 + 8b = 0 \therefore b = -\frac{1}{8}.$$

Como $f(2) = 1$, *temos*:

$$f(2) = 2ae^{-\frac{1}{8}(4)} = 2ae^{-\frac{1}{2}} = 1 \therefore a = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e}$$

$b)$ *Sendo dado este gráfico da função* f, *esboce um gráfico possível para a função derivada de* f, *justificando sua construção e apontando seus pontos de inflexão, justificando sua resposta com argumentos matemáticos e não apenas apontando no gráfico.*



Analisando o comportamento da função f *pelo gráfico, temos as seguintes informações*:

(i) *Intervalos de crescimento e decrescimento*:

f *é crescente em* $(a, c) \cup (\mathrm{e}, n)$
f *é decrescente em* $(b, a) \cup (c,\mathrm{e})$

(ii) *Concavidade*:

f *possui concavidade voltada para cima em* $(b, d) \cup (g, n)$
f *possui concavidade voltada para baixo em* (d, g)
Onde $d \in (a, c)$ *e* $g \in (c, e)$

Com essas informações, podemos representar intuitivamente as derivadas primeira e segunda da função f, *de tal modo que*:

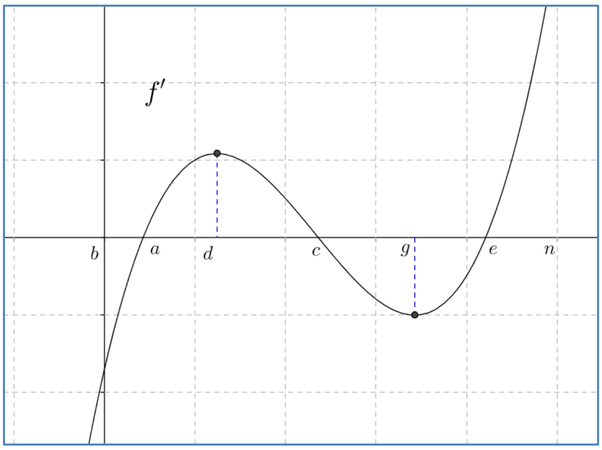
$(b) - - - (a) + + + + + (c) - - - - - - -(\mathrm{e}) + + + +(n) \quad f'$
$(b) + + + + + +(d) - - - - - (g) + + + + + + + + \ (n) \quad f''$

$Com\ isso, os\ pontos\ \big(d, f(d)\big)\ e\ \big(g, f(g)\big)\ são\ pontos\ de\ inflexão, visto\ que\ ocorre$
$a\ mudança\ na\ direção\ da\ concavidade\ da\ função\ f\ em\ x = d\ e\ em\ x = g.$
$Como\ f''\ nos\ dá\ a\ informação\ dos\ intervalos\ de\ crescimento\ e\ decrescimento\ de$
$f', então, concluimos\ que:$

f' é $crescente\ em\ (b, d) \cup (g, n)\ e\ decrescente\ em\ (d, g).$

$Onde\ x = d$ é $um\ número\ crítico\ de\ f'associado\ a\ um\ ponto\ de\ máximo\ local\ e$
$x = g$ é $um\ número\ crítico\ de\ f'associado\ a\ um\ ponto\ de\ mínimo\ local.$

$Esboçando\ uma\ representação\ intuitiva\ do\ gráfico\ de\ f', temos:$



$\boldsymbol{Questão\ 5}. Considere\ a\ função\ f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}\ e\ suas\ primeiras\ derivadas:$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}\ \ e\ \ f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}.$$

$Determine, então,$

$(i)\ Seus\ pontos\ de\ máximos\ e\ mínimos\ relativos, se\ existirem;$
$(ii)\ Seus\ intervalos\ de\ crescimento\ e\ decrescimento;$
$(iii)\ Suas\ assíntotas, se\ existirem;$
$(iv)\ Seus\ pontos\ de\ inflexão, se\ existirem;$
$(v)\ Os\ intervalos\ onde\ a\ concavidade$ é $para\ cima\ e\ onde$ é $para\ baixo.$
$(vi)\ Onde\ ficam\ os\ pontos\ de\ inflexão.$

$*\ Domínio\ da\ função\ f:\ \ D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 1\}$

$*\ Interseção\ com\ os\ eixos\ coordenados: A = (0, -5)$

$(i) Se\ f\ possui\ pontos\ de\ máximos\ ou\ mínimos\ relativos, estes\ ocorrem\ nos$
$números\ críticos\ de\ f.$

"$Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f$ é $um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde$
$ou\ f'(c) = 0\ ou\ onde\ f'(c)\ não\ existe$".

$Como\ f'(x)\ não\ existe\ em\ x = 1\ e\ 1 \notin D(f)\ então, 1\ não\ é\ número\ crítico\ de\ f.$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0\ ;\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 . x_2 = -3 \end{cases} \therefore x_1 = 3\ e\ x_2 = -1$$

$\{3, -1\} \in D(f)\ e\ f'(3) = f'(-1) = 0. Logo, 3\ e - 1\ são\ números\ críticos\ de\ f.$

$Pelo\ Teste\ da\ Segunda\ Derivada, temos:$

$f''(3) = \dfrac{8}{8} = 1\ ; f''(3) > 0. Logo, f(3)\ é\ um\ valor\ mínimo\ local.$

$f(3) = \dfrac{3^2 - 2 \times 3 + 5}{3 - 1} = \dfrac{9 - 6 + 5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4.\quad Ponto\ A = (3,4)$

$f''(-1) = \dfrac{8}{-8} = -1; f''(-1) < 0. Logo, f(-1)\ é\ um\ valor\ de\ máximo\ local.$

$f(-1) = \dfrac{(-1)^2 - 2(-1) + 5}{-1 - 1} = \dfrac{1 + 2 + 5}{-2} = \dfrac{8}{-2} = -4.\quad Ponto\ B = (-1, -4)$

$(ii)\ Os\ intervalos\ de\ crescimento\ e\ decrescimento\ da\ função\ f.$

$Estudando\ o\ sinal\ da\ primeira\ derivada, temos:$

$+ + + + + (-1) - - - - - - - - (3) + + + + + + + \qquad x^2 - 2x - 3$
$- - - - - - - - - - - (1) + + + + + + + + + + + \qquad x - 1$
$- - - - - (-1) + + + + (1) - - - (3) + + + + + + \qquad f'(x)$

$Dizemos\ que\ f\ é\ crescente\ onde\ f' > 0\ e\ decrescente\ onde\ f' < 0. Logo,$

$f\ é\ crescente\ em\ (-1,1) \cup (3, +\infty)\ e$
$f\ é\ decrescente\ em\ (-\infty) \cup (1,3)$

$(iii)\ Assíntotas:$

$*\ Vertical: dizemos\ que\ a\ reta\ x = a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ se\ \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ $ou\ \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$

$Pela\ definição\ de\ continuidade\ de\ uma\ função\ em\ um\ ponto\ x = a, conclui - se$ $que\ as\ assíntotas\ verticais\ ocorrem\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ função.$ $Logo, verificamos\ se\ a\ reta\ x = 1\ é\ a\ assíntota\ vertical\ de\ f.$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{x^2 - 2x + 5}^{\overset{4}{\uparrow}}}{\underbrace{x - 1}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\overbrace{x^2 - 2x + 5}^{\overset{4}{\uparrow}}}{\underbrace{x - 1}_{\underset{0^-}{\downarrow}}} = -\infty$$

$Portanto, a\ reta\ x = 1\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ da\ função\ f.$

$* \ Horizontal: Dizemos \ que \ a \ reta \ y = L$ é $uma \ assíntota \ horizontal \ se$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \ ou \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 2}{1} = \lim_{x \to +\infty} (2x - 2) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 2}{1} = \lim_{x \to -\infty} (2x - 2) = -\infty$$

$Logo, a \ função \ f \ não \ possui \ assíntota \ horizontal.$

$* \ Oblíqua: Dizemos \ que \ a \ reta \ y = ax + b$ é $uma \ assíntota \ oblíqua \ se,$
$somente \ se, \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = (x - 1) + \frac{4}{x - 1}$$
$$f(x) - (x - 1) = \frac{4}{x - 1}$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x - 1} = 0$$

$Logo, a \ reta \ y = x - 1$ é $a \ assíntota \ oblíqua \ do \ gráfico \ da \ função \ f.$

$(iv) \ e \ (vi) \ Pontos \ de \ inflexão.$

$Os \ pontos \ de \ inflexão \ ocorrem \ nos \ números \ do \ domínio \ de \ f \ onde \ ocorre \ a$
$mudança \ na \ direção \ da \ concavidade. Analisando \ a \ segunda \ derivada \ de \ f, temos:$

$$f''(x) = \frac{8}{(x - 1)^3}$$

$$- - - - - - - (1) + + + + + + \quad f''(x)$$

$Notamos \ que \ em \ x = 1 \ ocorre \ a \ mudança \ na \ direção \ de \ concavidade. Entretanto,$
$1 \notin D(f) \ e, portanto, não \ há \ pontos \ de \ inflexão \ na \ função \ f.$

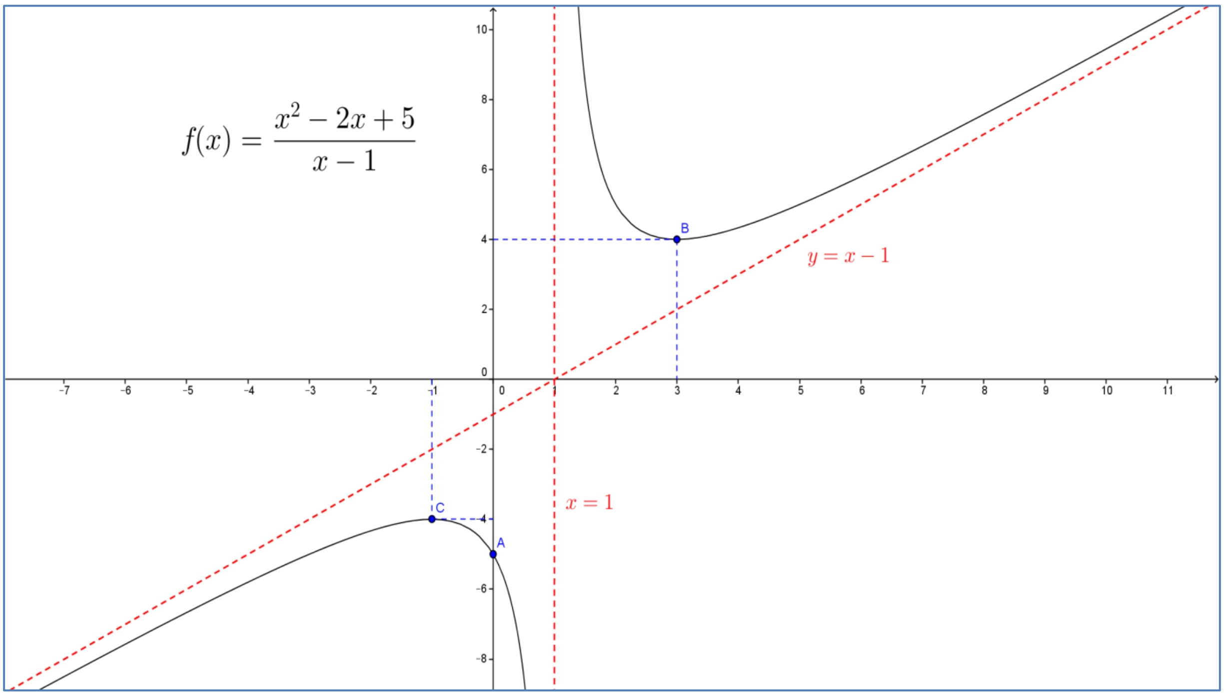
$(v) \ Estudo \ da \ concavidade:$

$Baseado \ na \ análise \ da \ segunda \ derivada \ feita \ no \ item \ anterior, temos:$

$Onde \ f'' > 0, f \ possui \ concavidade \ voltada \ para \ cima \ e \ onde \ f'' < 0, f \ possui$
$concavidade \ voltada \ para \ baixo. Com \ isso \ ...$

$f \ possui \ C.V.C \ (Concavidade \ Voltada \ para \ Cima) \ em \ (1, +\infty) \ e$
$f \ possui \ C.V.B \ (Concavidade \ Voltada \ para \ Baixo) \ em \ (-\infty, 1).$

Esboço Gráfico:



12.8 4ª Prova – 07 de Maio de 2016

Questão 1

a) Encontre o ponto sobre a curva $y = \sqrt{x}$ *que está mais próximo do ponto* $(3,0)$.

b) Determine as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito no triângulo retângulo de lados $3, 4$ *e* 5.

Questão 2. *Calcule*:

$a)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$;

$b)\ \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$;

Questão 3

a) Dado que o gráfico de f *passa pelo ponto* $\left(\frac{1}{2},1\right)$ *e que a inclinação de sua reta tangente em* $(x, f(x))$ é $\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$, *encontre a função* f.

b) Os gráficos de $f(x)$ *e* $g(x)$ *têm a mesma reta tangente no ponto* $(1,1)$. *Sabendo que* $g(x) = x^3$ *e* $f''(x) = x + x^2$, *determine* $f(x)$.

Questão 4

a) Ache os números críticos da função $f(x) = 4\operatorname{sen}^3 x + 3\sqrt{2}\cos^2 x$, *no intervalo* $(-\pi, \pi)$.

b) O que o Teste da 2ª Derivada nos diz sobre o comportamento da função $f(x) = x^4(x-1)^3$, *nos seus pontos críticos?*

Questão 5. *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \frac{-2x^2+x+2}{2x+1}$, *tendo*

$$f'(x) = \frac{-4x^2-4x-3}{(2x+1)^2} \quad e \quad f''(x) = \frac{8}{(2x+1)^3}$$

apontando:

(a) As assíntotas horizontais, verticais e oblíquas, se existirem.
(b) Os intervalos onde f é *crescente e onde* f é *decrescente, bem como os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*
(c) Os intervalos onde o gráfico de f é *côncavo para cima e onde* é *côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.*

***Questão* 1**

$a)$ *Encontre o ponto sobre a curva* $y = \sqrt{x}$ *que está mais próximo do ponto* $(3{,}0)$.

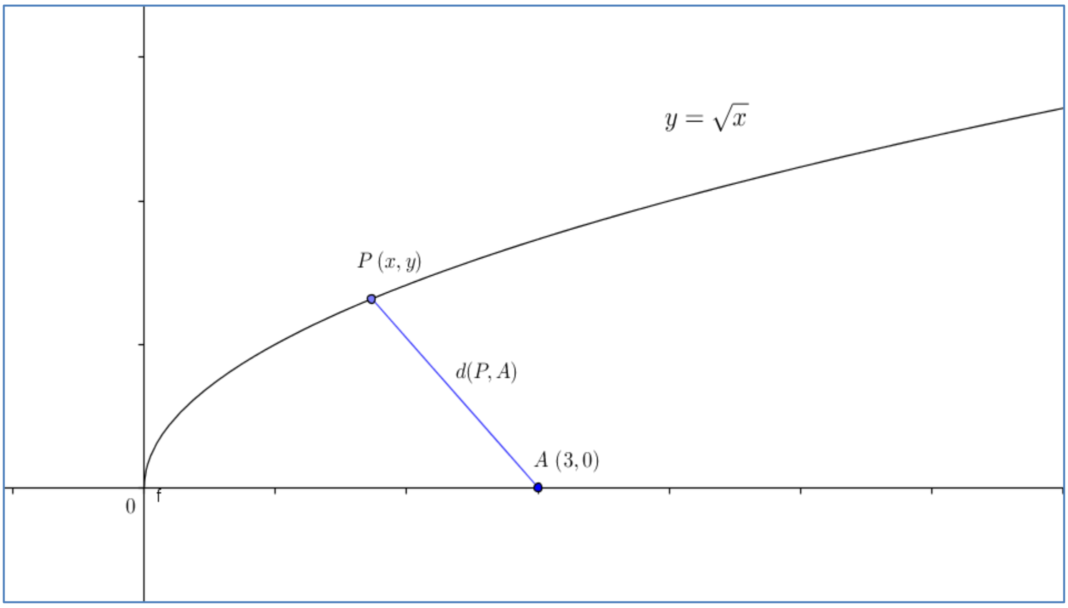


Ilustração do problema!

A distância entre os pontos $P(x, y)$ *e* $A(3{,}0)$ *sabendo* $-$ *se que* P *é um ponto da curva* $y = \sqrt{x}$, *então* $P\left(x, \sqrt{x}\right)$, *é dada por:*

$$d(P, A) = d = \sqrt{(x-3)^2 + \left(\sqrt{x} - 0\right)^2}$$
$$d(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + x}$$
$$d(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 9} \qquad D(d) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$$
$$d'(x) = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 9}} \qquad D(d') = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$$

Como d *é diferenciável* $\forall x \in D(d)$, *se* $d(x)$ *possui algum valor máximo ou mínimo local em* c, *então* $d'(c)$ *existe e* $d'(c) = 0$. *(Teorema de Fermat)*

$$d'(x) = 0 \Longrightarrow 2x - 5 = 0 \therefore x = \frac{5}{2}$$

Fazendo o estudo do sinal de $d'(x)$, *temos:*

$(0) - - - - - - (5/2) + + + + + + + \qquad d'(x)$

Com isso, concluimos que $5/2$ *é um número crítico associado a um ponto de mínimo local, que representa o ponto cuja distância em relação ao ponto* $(3{,}0)$ *é a menor. O ponto em questão é* $\left(5/2, \sqrt{5/2}\right)$ *ou* $\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

$b)$ *Determine as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito no triângulo retângulo de lados* $3, 4$ *e* 5.

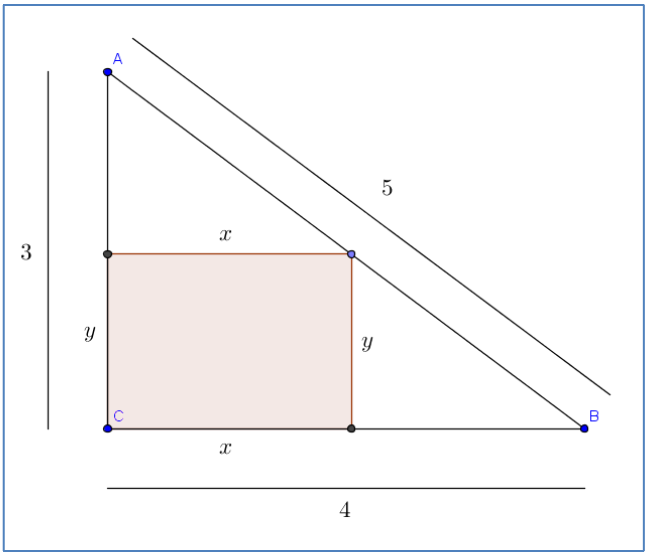


Ilustração do problema!

A área do retângulo inscrito no triângulo é dada pela expressão:

$$A(x, y) = x. y \quad ; \quad 0 < x < 4 \ \ e \quad 0 < y < 3$$

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{3}{4} = \frac{y}{4 - x} \therefore y = \frac{3}{4}(4 - x)$$

$$A(x) = x.\frac{3}{4}(4 - x) \qquad D(A) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 4\}$$

$$A(x) = \frac{3}{4}(4x - x^2)$$

$$A'(x) = \frac{3}{4}(4 - 2x)$$

Como a função $A(x)$ *é diferenciável em* $(0,4)$ *se* A *possui valor máximo ou mínimo local em algum* $c \in (0,4)$ *então* $A'(c)$ *existe e* $A'(c) = 0$.

$$A'(x) = 0 \Longrightarrow 4 - 2x = 0 \therefore x = 2\ ; \quad 2 \in (0,4)$$

Analisando o sinal de $A'(x)$*, temos:*

$$(0) + + + + + + + (2) - - - - - - - - -(4) \qquad A'(x)$$

Logo, 2 *é um número crítico associado a um ponto de máximo local e absoluto, uma vez que consideramos o intervalo* $(0,4)$ *como referência e* 2 *representa o valor de* x *para o qual a área do retângulo inscrito no triângulo retângulo de dimensões* $3, 4$ *e* 5 *é a maior possível. Dimensões do retângulo:* $2 \times (3/2)$

Obs: *Pelo Método do Intervalo Fechado também chegaríamos a mesma conclusão, porém, note que para* $x = 0$ *ou* $x = 4$ *não existe retângulo, apenas um segmento de reta e, por esta razão,* $x \in (0,4)$.

Questão 2. *Calcule*:

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$;

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x . \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x . \ln x};$$

Calculando o limite do expoente, temos:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x . \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cossec} x} \overset{L'H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cossec} x . \operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x . \cos x} \overset{L'H}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x - x . \operatorname{sen} x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} (-2 \operatorname{sen} x \cos x)}{\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x - x . \operatorname{sen} x)} = \frac{-2 \operatorname{sen} 0 \cos 0}{\cos 0 - 0 . \operatorname{sen} 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x . \ln x} = e^0 = 1$$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$;

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \overset{L'H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x . \ln x + (x-1)}{x}};$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x . \ln x + (x-1)}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x . \ln x + x - 1} \overset{L'H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{\ln x + 1 + 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{\ln x + 2} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 1^+} -1}{\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x + 2)} = \frac{-1}{\ln 1 + 2} = \frac{-1}{0+2} = -\frac{1}{2}.$$

Questão 3

$a)$ *Dado que o gráfico de* f *passa pelo ponto* $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *e que a inclinação de sua reta tangente em* $(x, f(x))$ é $\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$, *encontre a função* f.

Do enunciado temos que $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$, *ou ainda*, $f'(x) = 4 . \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Dessa forma, a antiderivada mais geral de $f'(x)$ é *dada por*:

$$f(x) = 4 \operatorname{arcsen} x + C$$

Como o ponto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *pertence ao gráfico da função* f, *então* $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) + C = 1$$
$$4.\frac{\pi}{6} + C = 1$$
$$C = 1 - \frac{2\pi}{3}$$

Portanto,

$$f(x) = 4\,\text{arcsen}\,x + 1 - \frac{2\pi}{3}$$

$b)$ *Os gráficos de* $f(x)$ *e* $g(x)$ *têm a mesma reta tangente no ponto* $(1{,}1)$. *Sabendo que* $g(x) = x^3$ *e* $f''(x) = x + x^2$, *determine* $f(x)$.

Do enunciado temos as seguintes informações, $f(1) = 1$ *e, uma vez que* f *e* g *possuem a mesma reta tangente no ponto* $(1{,}1)$ *então* $f'(1) = g'(1)$.
$*$ *Obs*: $g'(x) = 3x^2$ *e* $g'(1) = 3$.

A antiderivada mais geral de $f''(x)$ *é dada por*:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C_1$$

Utilizando a condição $f'(1) = g'(1) = 3$, *obtemos*:

$$3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + C_1$$

$$C_1 = 3 - \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{6}$$

A aniderivada mais geral de $f'(x)$ *é dada por*:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{13}{6}x + C_2$$

Utilizando a condição $f(1) = 1$, *obtemos*:

$$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{13}{6} + C_2$$

$$C_2 = 1 - \frac{29}{12} = -\frac{17}{12}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{13}{6}x - \frac{17}{12}$$

Questão 4

$a)$ *Ache os números críticos da função* $f(x) = 4\,\text{sen}^3 x + 3\sqrt{2}\cos^2 x$, *no intervalo* $(-\pi, \pi)$.

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe"*

$$f'(x) = 12\cos x\,\text{sen}^2 x - 6\sqrt{2}\cos x\,\text{sen}\,x \quad D(f') = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 6\cos x\,\text{sen}\,x\left(2\,\text{sen}\,x - \sqrt{2}\right)$$
$$f'(x) = 3\,\text{sen}\,2x\left(2\,\text{sen}\,x - \sqrt{2}\right)$$

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, *se f possui algum número crítico c então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,2x = 0 \\ \quad ou \\ \text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

A solução desse sistema considerando o intervalo $(-\pi, \pi)$ é $x = \left\{0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

$*$ *Obs: Embora* $x = -\pi$ *e* $x = \pi$ *satisfazem a equação* $\text{sen}\,2x = 0$, *estamos considerando o intervalo aberto* $(-\pi, \pi)$ *e, portanto, estes valores não são números críticos nessa situação!*

$b)$ *O que o Teste da 2ª Derivada nos diz sobre o comportamento da função* $f(x) = x^4(x-1)^3$, *nos seus pontos críticos?*

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe"*

$f'(x) = 4x^3(x-1)^3 + 3x^4(x-1)^2$
$f'(x) = x^3(x-1)^2[4(x-1) + 3x]$
$f'(x) = x^3(x-1)^2(7x-4)$

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, *então os números críticos ocorrem onde* $f'(x) = 0$.
Números críticos: $0, \dfrac{4}{7}$ *e* 1.

$f''(x) = 12x^2(x-1)^3 + 12x^3(x-1)^2 + 12x^3(x-1)^2 + 6x^4(x-1)$
$f''(x) = 12x^2(x-1)^3 + 24x^3(x-1)^2 + 6x^4(x-1)$
$f''(x) = 6x^2(x-1)[2(x-1)^2 + 4x(x-1) + x^2]$
$f''(x) = 6x^2(x-1)[7x^2 - 8x + 2]$

Notamos que $f''(0) = 0$ *e* $f''(1) = 0$, *portanto, o Teste da 2ª Derivada é inconclusivo nesse caso, em outras palavras, esses pontos podem ser de máximo ou mínimo local ou nenhum dos dois casos.*

$Por\ outro\ lado, f''\left(\frac{4}{7}\right) = 6\left(\frac{16}{49}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)\left[7\left(\frac{16}{49}\right) - \frac{32}{7} + 2\right] = \frac{96}{49}\left[-\frac{48}{49} + \frac{96}{49} - \frac{6}{7}\right] > 0$

$Logo, pelo\ Teste\ da\ 2^{\underline{a}}\ Derivada, f\left(\frac{4}{7}\right)$ é $um\ valor\ mínimo\ local\ de\ f.$

$Com\ relação\ aos\ números\ críticos\ 0\ e\ 1\ precisamos\ do\ Teste\ da\ Primeira\ Derivada$ $para\ tirarmos\ as\ devidas\ conclusões. Logo,$

$$f'(x) = x^3(x-1)^2(7x-4)$$

$- - - - (0) + + + + + + + + + + + + + + + + + + \quad x^3$
$+ + + + + + + + + + + + + + + + (1) + + + + + + + \quad (x-1)^2$
$- - - - - - - - - - (4/7) + + + + + + + + + + + + \quad (7x-4)$
$+ + + + (0) - - - (4/7) + + + + + (1) + + + + + + \quad f'(x)$

$Pelo\ Teste\ da\ 1^{\underline{a}}\ Derivada, concluímos\ que\ f(0)$ é $um\ valor\ máximo\ local\ e$ $f(1)$ não é $um\ valor\ extremo\ relativo\ da\ função.$

Questão 5. $Esboce\ o\ gráfico\ da\ função\ f(x) = \frac{-2x^2 + x + 2}{2x+1}, tendo$

$$f'(x) = \frac{-4x^2 - 4x - 3}{(2x+1)^2} \quad e \quad f''(x) = \frac{8}{(2x+1)^3}$$

$apontando$:

(a) $As\ assíntotas\ horizontais, verticais\ e\ oblíquas, se\ existirem.$
(b) $Os\ intervalos\ onde\ f$ é $crescente\ e\ onde\ f$ é $decrescente, bem\ como\ os\ pontos$ $de\ máximo\ e\ mínimo\ relativos, caso\ existam.$
(c) $Os\ intervalos\ onde\ o\ gráfico\ de\ f$ é $côncavo\ para\ cima\ e\ onde$ é $côncavo\ para$ $baixo, bem\ como\ os\ pontos\ de\ inflexão, caso\ existam.$

$Primeiramente, definamos\ o\ domínio\ da\ função\ f$:

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{2}\right\}$$

$Interseções\ com\ os\ eixos\ coordenados$:

$f(0) = 2\ ;\ \ Ponto\ A = (0,2)$

$f(x) = 0 \Longrightarrow -2x^2 + x + 2 = 0\ ; \Delta = 17$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{-4} \therefore x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \quad e\ x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

$Pontos\ B = \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, 0\right)\ \ e\ C = \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, 0\right)$

(a) *Assíntotas*:

$*$ *Vertical*: *dizemos que a reta* $x = a$ *é uma assíntota vertical se* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Pela definição de continuidade de uma função em um ponto $x = a$, *conclui-se que as assíntotas verticais ocorrem nos pontos de descontinuidade da função. Logo, verificamos se a reta* $x = -1/2$ *é a assíntota vertical de* f.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} \frac{\overbrace{-2x^2+x+2}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{2x+1}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} \frac{\overbrace{-2x^2+x+2}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{2x+1}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = -\infty$$

Logo, a reta $x = -1/2$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$*$ *Horizontal*: *Dizemos que a reta* $y = L$ *é uma assíntota horizontal se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+x+2}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x+1}{2} = \lim_{x\to+\infty}\left(-2x+\frac{1}{2}\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2+x+2}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+1}{2} = \lim_{x\to-\infty}\left(-2x+\frac{1}{2}\right) = +\infty$$

Logo, não há assíntotas horizontais ao gráfico de $f(x)$.
$*$ *Oblíqua*: *Dizemos que a reta* $y = ax + b$ *é uma assíntota oblíqua se, somente se,* $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

$$f(x) = \frac{-2x^2+x+2}{2x+1} = (-x+1) + \frac{1}{2x+1}$$

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1}{2x+1}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x+1} = 0$$

Logo, a reta $y = -x + 1$ *é uma assíntota oblíqua ao gráfico de* $f(x)$.

(b) *Crescimento e Decrescimento; pontos extremos relativos.*

$$f'(x) = \frac{-4x^2-4x-3}{(2x+1)^2}$$

$- \quad (-4x^2-4x-3)$
$+ + + + + + + + + + \; (-1/2) \; + + + + + + \quad (2x+1)^2$
$- - - - - - - - - - \; (-1/2) \; - - - - - - \quad f'(x)$

Pelo Teste da Primeira Derivada, concluimos que f é sempre decrescente, sendo o intervalo de decrescimento dado por $(-\infty, -1/2) \cup (-1/2\,, +\infty)$
E por essa análise, f não possui pontos de máximo ou mínimo locais (ou relativos) porque f não possui números críticos.

(c) Concavidade e Pontos de Inflexão:

$$f''(x) = \frac{8}{(2x+1)^3}$$

$+ \qquad 8$
$- - - - - - - - - - (-1/2) + + + + + + + + + \quad (2x+1)^3$
$- - - - - - - - - - (-1/2) + + + + + + + + + \quad f''(x)$

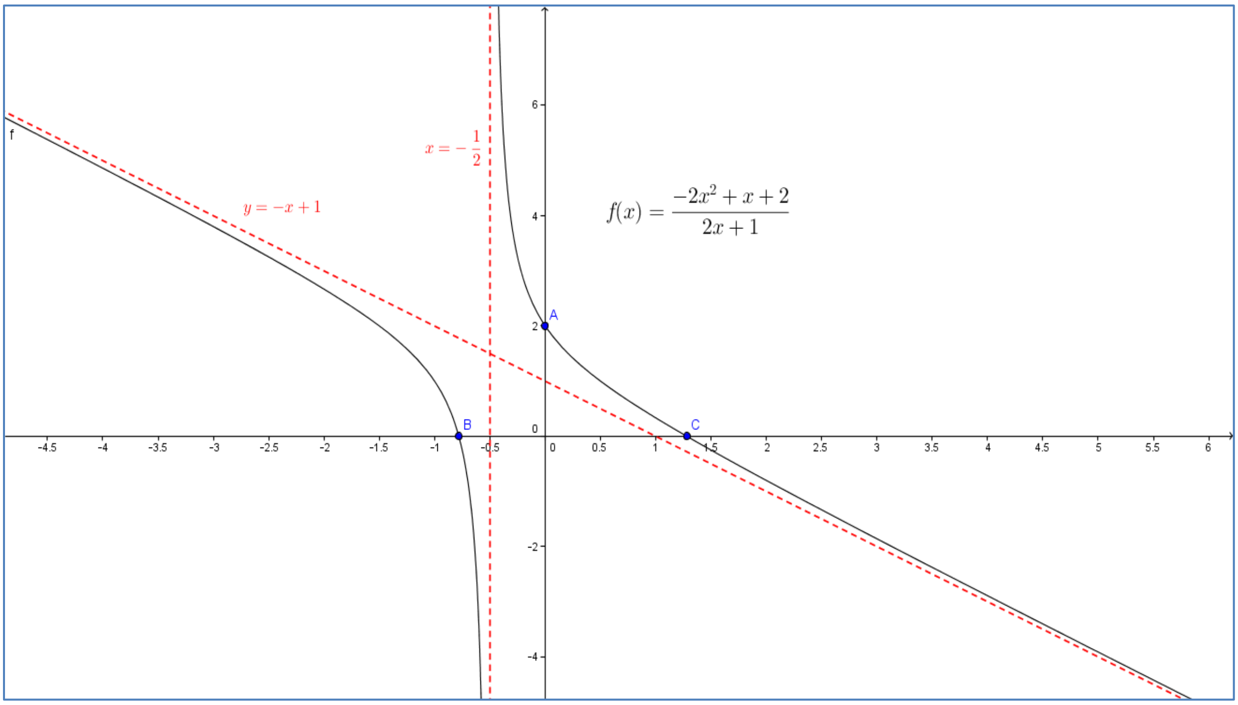
Pela análise da segunda derivada, temos:

Onde $f'' > 0$, f possui concavidade voltada para cima e onde $f'' < 0$, f possui concavidade voltada para baixo. Logo,

f possui C.V.C (Concavidade Voltada para Cima) em $(-1/2\,, +\infty)$ e
f possui C.V.B (Concavidade Voltada para Baixo) em $(-\infty, -1/2)$.

A mudança na direção da concavidade ocorre em $x = -1/2$, porém, $-1/2$ não pertence ao domínio da função f e, portanto, não é ponto de inflexão da função. Com isso, f não possui pontos de inflexão.

Esboço Gráfico:



12.9 Reavaliação da 1ª Média – 20 de Maio de 2016

Questão 1

a) Seja

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{7-(16)^{\frac{1}{x}}}{1+(16)^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 7, & x=0.\end{cases}$$

Determine se existe um número $c\in(2,4)$, *tal que* $f(c)=1$.

b) Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^4+9}}{-2x^2+1}$.

Questão 2

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} x.e^{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}$.

b) Assuma que $h(x)=[f(x)]^3$, *onde* f *é uma função diferenciável. Se* $f(0)=-\dfrac{1}{2}$ *e* $f'(0)=\dfrac{8}{3}$, *determine uma equação da reta tangente ao gráfico de* h *em* $x=0$.

Questão 3

a) A reta tangente à curva $y=\ln(x^2+e)-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ *em* $x=0$ *forma com os eixos coordenados um triângulo. Qual é a área desse triângulo?*

b) Determine o conjunto de pontos em f *é contínua:*

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 1\\ \dfrac{2(x^3-x)}{x^2-4x+3}, & x<1.\end{cases}$$

Questão 4.

a) Verifique se a função

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, & x>0\\ \dfrac{1}{2}x^2+3x-1, & x\leq 0\end{cases}$$

é derivável em $x=0$.

b) Determine a derivada da função $f(x)=x^2.e^{\operatorname{tg}(-2x)}$ *em* $x=-\dfrac{\pi}{6}$.

Questão 5

a) Mostre que a função $f(x) = |x^3 + 1|$ *possui um ponto onde a derivada é zero e um ponto onde a derivada não existe.*

b) Considere a curva $(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2 = 36$. *Calcule uma equação para a reta tangente a essa curva no ponto* $P(2, \sqrt{2})$.

***Questão* 1**

a) Seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{7-(16)^{\frac{1}{x}}}{1+(16)^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 7, & x = 0. \end{cases}$$

Determine se existe um número $c \in (2,4)$, *tal que* $f(c) = 1$.

f *é uma função sentencial definida por uma composição das funções racional, polinomial e exponencial na primeira sentença, e por uma função constante. Logo, a continuidade da função* f *é expressa pela continuidade das funções que a compõe. Portanto, a primeira sentença, dada por* $[7-16^{1/x}]/[1+16^{1/x}]$ *tem como domínio, enquanto função,* $D = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$ *e, por estar definida como sentença de* $f(x)$ *para* $x \neq 0$, *então* f *é contínua em* $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Calculando $f(2)$ *e* $f(4)$ *obtemos, respectivamente:*

$$f(2) = \frac{7-\sqrt{16}}{1+\sqrt{16}} = \frac{7-4}{1+4} = \frac{3}{5} \qquad e \qquad f(4) = \frac{7-\sqrt[4]{16}}{1+\sqrt[4]{16}} = \frac{7-2}{1+2} = \frac{5}{3}$$

Como f *é contínua em* $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, *então* f *é contínua no intervalo fechado* $[2,4]$.

Se f *é contínua no intervalo fechado* $[2,4]$ *e* 1 *é um número entre* $f(2)$ *e* $f(4)$, *então existe algum* $c \in (2,4)$ *tal que* $f(c) = 1$. *(Teorema do Valor Intermediário)*

Informação à parte, *podíamos determinar o valor de* c *da seguinte forma:*

$$f(c) = 1 \Longrightarrow \frac{7-(16)^{\frac{1}{c}}}{1+(16)^{\frac{1}{c}}} = 1 \Longrightarrow 7-(16)^{\frac{1}{c}} = 1+(16)^{\frac{1}{c}} \Longrightarrow 6 = 2(16)^{\frac{1}{c}}$$

$$(16)^{\frac{1}{c}} = 3 \Longrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln 3}{\ln 16} \therefore c = \frac{\ln 16}{\ln 3} = \log_3 16 \;\; onde\ 2 < \log_3 16 < 4$$

b) Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^4+9}}{-2x^2+1}.$$

Domínio da função f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ -2x^2+1 \neq 0\ e\ 2x^4+9 \geq 0\}$
Das condições temos,

$$-2x^2+1 \neq 0 \Longrightarrow 2x^2 \neq 1 \therefore x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x^4+9 \geq 0\ ;\ como\ x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, então\ 2x^4+9 \geq 9, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$Logo, D(f) = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\ e\ x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Dizemos que a reta $x = a$ *é uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad ou \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Pela definição de continuidade concluimos que as assíntotas verticais ocorrem nos pontos de descontinuidade da função. Logo, verificamos se as retas $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *são assíntotas verticais.*

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^+} \frac{\overbrace{\sqrt{2x^4+9}}^{\sqrt{19/2}}}{\underbrace{-2x^2+1}_{0^-}} = -\infty$$

Logo, a reta $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *é uma assíntota vertical do gráfico de* $f(x)$.

$$\lim_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^+} \frac{\overbrace{\sqrt{2x^4+9}}^{\sqrt{19/2}}}{\underbrace{-2x^2+1}_{0^+}} = +\infty$$

Logo, a reta $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *é uma assíntota vertical do gráfico de* $f(x)$.

Dizemos que a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal se ocorrer um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad ou \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^4+9}}{-2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4\left(2+\frac{9}{x^4}\right)}}{-2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x^2|\sqrt{2+\frac{9}{x^4}}}{x^2\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)};$$

$*$ *Obs*: $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *Portanto*, $|x^2| = x^2$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x^2|\sqrt{2+\frac{9}{x^4}}}{x^2\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{2+\frac{9}{x^4}}}{x^2\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{9}{x^4}}}{-2+\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{9}{x^4}}}{\lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)};$$

$$\frac{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{9}{x^4}}}{\lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to+\infty} 2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{9}{x^4}}}{\lim_{x\to+\infty} -2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{2+0}}{-2+0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$*$ *Obs*: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, *porque para* $x \to \pm\infty$, $|x^2| = x^2$, *não havendo qualquer alteração no cálculo do limite acima.*

$Logo, a\ reta\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ é a única assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$.

Questão 2

a) Calcule $\lim_{x \to 0} x . e^{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}$.

Pela desigualdade trigonométrica, temos:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1$$
$$e^{-1} \leq e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq e^{1}$$
$$\frac{1}{e} \leq e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq e$$

$*$ *Para* $x > 0$, *temos*:

$$\frac{x}{e} \leq x . e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq x . e$$

Se $\frac{x}{e} \leq x . e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq xe$ *quando* x *está próximo a* 0 *pela direta de* 0 (*exceto possivelmente em* 0) *e*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e} = \lim_{x \to 0^+} xe = 0$$

então $\lim_{x \to 0^+} xe^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} = 0.$ (*Teorema do Confronto*)

$*$ *Para* $x < 0$, *temos*:

$$\frac{x}{e} \geq x . e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \geq x . e$$
$$xe \leq x . e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq \frac{x}{e}$$

Se $xe \leq x . e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq \frac{x}{e}$ *quando* x *está próximo a* 0 *pela esquerda de* 0 (*exceto possivelmente em* 0) *e*

$$\lim_{x \to 0^-} xe = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{e} = 0$$

então $\lim_{x \to 0^-} xe^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} = 0.$ (*Teorema do Confronto*)

Como $\lim_{x \to 0^+} xe^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} = \lim_{x \to 0^-} xe^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}$, *então* $\lim_{x \to 0} xe^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}$ *existe e* $\lim_{x \to 0} xe^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} = 0.$

b) *Assuma que* $h(x) = [f(x)]^3$, *onde* f é *uma função diferenciável. Se* $f(0) = -\frac{1}{2}$ *e* $f'(0) = \frac{8}{3}$, *determine uma equação da reta tangente ao gráfico de* h *em* $x = 0$.

$h(0) = [f(0)]^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$. *Ponto* $P\left(0, -\frac{1}{8}\right)$.

Pela Regra da Cadeia,

$$h'(x) = 3[f(x)]^2 . f'(x)$$

O *coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* h *em* $x = 0$ é $h'(0)$. *Logo,*

$m = h'(0) = 3[f(0)]^2 . f'(0) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{8}{3}\right) = 3 . \frac{1}{4} . \frac{8}{3} = 2.$

Equação da reta tangente ao gráfico de h *em* $x = 0$, *no ponto* $P\left(0, -\frac{1}{8}\right)$:

$$y - \left(-\frac{1}{8}\right) = m(x - 0)$$
$$y + \frac{1}{8} = 2x$$
$$y = 2x - \frac{1}{8}$$

Questão 3

$a)$ *A reta tangente à curva* $y = \ln(x^2 + e) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$ *em* $x = 0$ *forma com os eixos coordenados um triângulo. Qual é a área desse triângulo?*

$y = f(x) = \ln(x^2 + e) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$; $f(0) = \ln e - \operatorname{arctg} 0 = 1 - 0 = 1$. *Ponto* $P(0,1)$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + e} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} . \left(\frac{1}{2}\right)$; $f'(0) = \frac{0}{e} - \frac{1}{1+0} . \left(\frac{1}{2}\right) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ *no ponto* $P(0,1)$:

$$y - 1 = f'(0)(x - 0)$$
$$y - 1 = -\frac{1}{2}x$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Interseções com os eixos coordenados: $P(0,1)$ *e* $A(2,0)$.

A área do triângulo delimitado pela reta e os eixos coordenados é:

$$A_{\Delta AOP} = \frac{1}{2}(2).(1) = 1 u.A$$

$b)$ *Determine o conjunto de pontos em* f é *contínua:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ \dfrac{2(x^3 - x)}{x^2 - 4x + 3}, & x < 1. \end{cases}$$

f é *uma função sentencial formada por uma função raíz e uma função racional polinomial e, portanto, será contínua onde essas funções forem contínuas considerando o intervalo de validade de cada uma delas de acordo com* $f(x)$.

$A\ função\ g(x) = \sqrt{x}\ está\ definida\ para\ x \geq 0\ e, como\ esta\ função\ é\ válida\ para$
$x \geq 1\ em\ f(x), então\ f\ é\ contínua\ em\ (1, +\infty).$

$A\ função\ racional\ polinomial\ h(x) = \dfrac{2(x^3 - x)}{x^2 - 4x + 3}\ está\ definida\ para\ a\ condição$
$x^2 - 4x + 3 \neq 0\ e, portanto, x \neq 1\ e\ x \neq 3. Como\ esta\ função\ é\ válida\ para\ x < 1$
$em\ f(x), então\ f\ é\ contínua\ em\ (-\infty, 1). Contudo, podemos\ reescrever\ esta$
$função\ racional, uma\ vez\ que\ x \neq 1\ e\ x < 1\ para\ esta\ sentença.$

$$\frac{2(x^3 - x)}{x^2 - 4x + 3} = \frac{2x(x^2 - 1)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{2x(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{2x(x + 1)}{x - 3}$$

$Logo,$
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ \dfrac{2x(x + 1)}{x - 3}, & x < 1 \end{cases}$$

$Verificando\ a\ continuidade\ de\ f\ em\ x = 1, temos:$

$$1)\ f(1)\ deve\ existir\ ;\ \ 2)\ \lim_{x \to 1} f(x)\ \ deve\ existir\ \ \ e\ \ \ 3)\ \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$f(1) = \sqrt{1} = 1.$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \to 1^+} x} = \sqrt{1} = 1.$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x(x + 1)}{x - 3} = \frac{\lim_{x \to 1^-} [2x(x + 1)]}{\lim_{x \to 1^-} (x - 3)} = \frac{2(1 + 1)}{(1 - 3)} = \frac{4}{-2} = -2$$

$Como\ \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)\ \ dizemos\ que\ \lim_{x \to 1} f(x)\ \nexists\ e, portanto, f\ não\ é\ contínua$
$em\ x = 1.$

$Portanto, f\ é\ contínua\ em\ (-\infty, 1) \cup (1, +\infty), ou\ ainda, \mathbb{R} - \{1\}.$

Questão 4.

$a)\ Verifique\ se\ a\ função$

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1)^3, & x > 0 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

$é\ derivável\ em\ x = 0.$

$Primeiramente, devemos\ verificar\ se\ f\ é\ contínua\ em\ x = 0. Logo,$

$$f(0) = \frac{1}{2}0^2 + 3.0 - 1 = 0 + 0 - 1 = -1 \therefore f(0) = -1.$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x-1)^3 = \left[\lim_{x\to0^+}(x-1)\right]^3 = [-1]^3 = -1.$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{2}x^2+3x-1\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to0^-} x^2 + 3\lim_{x\to0^-} x - \lim_{x\to0^-} 1 = \frac{1}{2}0^2 + 3.0 - 1 = -1.$$

$Como \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x)\ dizemos\ que \lim_{x\to0} f(x)\ \exists\ e\ \lim_{x\to0} f(x) = -1. E\ ainda,$
$f(0) = \lim_{x\to0} f(x)\ e, portanto, f\ \text{é}\ contínua\ em\ x = 0.$
$Analisando\ a\ diferenciavbilidade\ em\ x = 0, temos:$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{(x-1)^3-(-1)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{(x-1)^3+1}{x};$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{(x-1)^3+1}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^3-3x^2+3x-1+1}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^3-3x^2+3x}{x};$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^3-3x^2+3x}{x} = \lim_{x\to0^+}(x^2-3x+3) = \lim_{x\to0^+} x^2 - \lim_{x\to0^+} 3x + \lim_{x\to0^+} 3 = 0-0+3 = 3.$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2+3x-1-(-1)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2+3x}{x};$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2+3x}{x} = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{2}x+3\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to0^-} x + \lim_{x\to0^-} 3 = \frac{1}{2}0+3 = 0+3 = 3.$$

$Como\ f\ \text{é}\ contínua\ em\ x = 0\ \left(f(0) = \lim_{x\to0} f(x)\right)\ e\ a\ derivadas\ laterais\ em\ 0$
$são\ iguais\ \left(f'_+(0) = f'_-(0)\right), então\ f\ \text{é}\ diferenciável\ ou\ derivável\ em\ x = 0.$

$b)\ Determine\ a\ derivada\ da\ função\ f(x) = x^2.e^{\operatorname{tg}(-2x)}\ em\ x = -\frac{\pi}{6}.$

$Domínio\ de\ f\colon\ D(f) = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}\right\};$

$$\ln f(x) = \ln x^2.e^{\operatorname{tg}(-2x)}$$
$$\ln f(x) = \ln x^2 + \ln e^{\operatorname{tg}(-2x)}$$
$$\ln f(x) = \ln x^2 + \operatorname{tg}(-2x)$$

$Por\ diferenciação\ logarítmica, obtemos:$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x^2} - 2\sec^2(-2x)$$
$$f'(x) = 2f(x)\left[\frac{1}{x} - \sec^2(-2x)\right];$$
$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\left[-\frac{6}{\pi} - \sec^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\pi}{6}\right)^2 e^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)}\left[-\frac{6}{\pi} - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right]$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{18} e^{\sqrt{3}} \left[-\frac{6}{\pi} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} \right]$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{18} e^{\sqrt{3}} \left[-\frac{6}{\pi} - 4 \right] = -\frac{\pi e^{\sqrt{3}}}{18} [4\pi + 6] = -\frac{\pi e^{\sqrt{3}}}{9} [2\pi + 3]$$

***Questão* 5**

$a)$ *Mostre que a função* $f(x) = |x^3 + 1|$ *possui um ponto onde a derivada é zero e um ponto onde a derivada não existe.*

Analisando a função modular $|x^3 + 1|$, *temos*:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \geq -1 \\ -(x^3 + 1), & x < -1 \end{cases}$$

Seja $x + \Delta x > -1$, *então*:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 + 1 - (x^3 + 1)}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 1 - x^3 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Seja $x + \Delta x < -1$, *então*:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-[(x + \Delta x)^3 + 1] - [-(x^3 + 1)]}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 1] + x^3 + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3)}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-3x^2 - 3x\Delta x - \Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-3x^2 - 3x\Delta x - \Delta x^2) = -3x^2.$$

Uma expressão para $f'(x)$ *pode ser dada por*:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > -1 \\ -3x^2, & x < -1 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 0 \therefore x = 0.$ *Porém*, $x = 0$ *não pertence à esta sentença!*
$f'(x) = 0 \Longrightarrow -3x^2 = 0 \therefore x = 0$ *e* $0 \in (-\infty, -1)$.

Logo, $f'(x) = 0$ *em* $x = 0$.

Como f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *e diferenciável em* $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, *nos resta saber se* f *é diferenciável em* $x = -1$. *Portanto*,

$$f'_+(-1) = 3(-1)^2 = 3 \quad e \quad f'_-(-1) = -3(-1)^2 = -3$$

Como f *é contínua em* $x = -1$ *e as derivadas laterais existem*, *porém*, *são diferentes*, *então* f *não é derivável em* $x = -1$.

$b)$ *Considere a curva* $(x^2+y^2+4)^2-16x^2=36$. *Calcule uma equação para a reta tangente a essa curva no ponto* $P(2,\sqrt{2})$.

Verificar se o ponto P pertence à curva da implicitamente pela expressão

$$(x^2+y^2+4)^2-16x^2=36$$
$$\left(2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+4\right)^2-16\times 2^2=36$$
$$(4+2+4)^2-16\times 4=36$$
$$(10)^2-64=36$$
$$100-64=36$$
$$36=36$$

Logo, P pertence à curva. Derivando implicitamente a expressão, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2+4)^2-16.\frac{d}{dx}(x^2)=\frac{d}{dx}(36)$$
$$2(x^2+y^2+4).\frac{d}{dx}(x^2+y^2+4)-16.\frac{d}{dx}(x^2)=\frac{d}{dx}(36)$$
$$2(x^2+y^2+4)\left[\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)+\frac{d}{dx}(4)\right]-16.\frac{d}{dx}(x^2)=\frac{d}{dx}(36)$$
$$2(x^2+y^2+4)(2x+2y.y')-32x=0$$
$$4yy'(x^2+y^2+4)=32x-4x(x^2+y^2+4)$$
$$y'=\frac{-4x(x^2+y^2-4)}{4y(x^2+y^2+4)}=-\frac{x(x^2+y^2-4)}{y(x^2+y^2+4)}$$

No ponto P, temos:

$$y'=-\frac{2(4+2-4)}{\sqrt{2}(4+2+4)}=-\frac{4}{10\sqrt{2}}=-\frac{4\sqrt{2}}{20}=-\frac{\sqrt{2}}{5}$$

Equação da reta tangente à curva no ponto $P(2,\sqrt{2})$:

$$y-\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}}{5}(x-2)$$
$$y=-\frac{\sqrt{2}}{5}x+\frac{2\sqrt{2}}{5}+\sqrt{2}$$
$$y=-\frac{\sqrt{2}}{5}x+\frac{7\sqrt{2}}{5}$$

12.10 Reavaliação da 1ª Média – 21 de Maio de 2016

Questão 1

$a)$ *Uma das assíntotas da função* $f(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ *(a que fica abaixo do eixo* x*) intercepta o gráfico de* $g(x) = -\dfrac{1}{2} + \operatorname{sen} x$ *em dois pontos, no intervalo* $[0,2\pi]$. *Estes dois pontos, juntamente com a origem do sistema cartesiano determinam um triângulo. Qual é sua área?*

$b)$ *Dada a função* $y = (a+e)^x$, *sabemos que* $a = \lim\limits_{w \to 4^-} ([\![w^2]\!] - 4)$ *e também que* $y = \lim\limits_{w \to 2} \dfrac{2\operatorname{sen}(3w-6)}{\operatorname{sen}(2w-4)}$. *Descubra o valor de* x.

Questão 2

$a)$ *O coeficiente angular da reta normal à curva* $2xy + \pi.\operatorname{sen} y = 2\pi$ *em um ponto* (x_0, y_0) *é* $\dfrac{x_0}{y_0}$. *Encontre* x_0 *e* y_0, *sabendo que* y_0 *pertence ao intervalo* $(0, \pi)$.

$b)$ *Se* $f(x) = x^{\cos x}.(\operatorname{sen} x)^{x+1}$, *encontre* $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Questão 3

$a)$ *A função* $f(x) = \begin{cases} (x-\pi)^{10} \operatorname{sen}\left(\dfrac{100}{x-\pi}\right), & x \neq \pi \\ 0, \quad x = \pi \end{cases}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$? *Justifique sua resposta.*

$b)$ *Determine a derivada da função* $f(x) = \ln\sqrt{(3x^2+2).\sqrt{6x-7}}$.

Questão 4

$a)$ *Mostre que a equação* $x.2^x = 1$ *tem solução real.*

$b)$ *Determine a abscissa de cada um dos pontos do gráfico de* $f(x) = 4^x x^4$ *onde a reta tangente é horizontal.*

Questão 5

$a)$ *Analise a diferenciabilidade da função* $f(x) = |x^2 - 9|$ *em* $x = 3$.

$$f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9, & x \leq -3 \quad ou \quad x \geq 3 \\ -(x^2 - 9), & -3 < x < 3 \end{cases}$$

$b)$ *Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $f(x) = [\operatorname{tg} x]^{\operatorname{arctg} x}$, *em* $x = \dfrac{\pi}{4}$.

***Questão* 1**

$a)$ *Uma das assíntotas da função* $f(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ *(a que fica abaixo do eixo* x*) intercepta o gráfico de* $g(x) = -\dfrac{1}{2} + \operatorname{sen} x$ *em dois pontos, no intervalo* $[0,2\pi]$. *Estes dois pontos, juntamente com a origem do sistema cartesiano determinam um triângulo. Qual é sua área?* $* \; D(f) = \mathbb{R}$

Assíntota que fica abaixo do eixo x é uma assíntota horizontal. Logo,

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L; \; L < 0 \text{ é a assíntota em questão.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^{2x}\left(1 - \frac{1}{3^{2x}}\right)}{3^{2x}\left(1 + \frac{1}{3^{2x}}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{3^{2x}}}{1 + \frac{1}{3^{2x}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3^{2x}}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3^{2x}}} = \frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1. \text{ Assíntota Horizontal } y = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3^x - \frac{1}{3^x}}{3^x + \frac{1}{3^x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{3^x}(3^{2x} - 1)}{\frac{1}{3^x}(3^{2x} + 1)} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{2x} - \lim\limits_{x\to-\infty} 1}{\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{2x} + \lim\limits_{x\to-\infty} 1} = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1. \text{ Assíntota Horizontal } y = -1.$$

$*$ *A assíntota que intercepta o gráfico de* $g(x)$ *é a assíntota horizontal* $y = -1$.

$$-1 = -\frac{1}{2} + \operatorname{sen} x \Longrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \therefore x_1 = \frac{7\pi}{6} \text{ e } x_2 = \frac{11\pi}{6}$$

Os pontos $A\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right), B\left(\frac{11\pi}{6}, -1\right)$ *e* $O(0,0)$ *delimitam um triângulo* ΔAOB *tal que:*

$$A_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}|-1|.\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \; u.A$$

$b)$ *Dada a função* $y = (a + e)^x$, *sabemos que* $a = \lim\limits_{w\to4^-} ([\![w^2]\!] - 4)$ *e também que* $y = \lim\limits_{w\to2} \dfrac{2\operatorname{sen}(3w-6)}{\operatorname{sen}(2w-4)}$. *Descubra o valor de* x.

$*$ *Se* $w \to 4^-$, *então* $w < 4$ *e, portanto,* $w^2 < 16$. *Dessa forma,* $[\![w^2]\!] = 15$.

$$a = \lim_{w\to4^-} ([\![w^2]\!] - 4) = \lim_{w\to4^-} [\![w^2]\!] - \lim_{w\to4^-} 4 = 15 - 4 = 11.$$

$$y = \lim_{w \to 2} \frac{2\,\text{sen}(3w-6)}{\text{sen}(2w-4)} = \lim_{w \to 2} \frac{2\,\text{sen}\big(3(w-2)\big)}{\text{sen}\big(2(w-2)\big)}\ ;$$

$Seja\ \theta = w - 2. Se\ w \to 2, então\ \theta \to 0. Ajustando\ o\ limite, temos:$

$$y = \lim_{w \to 2} \frac{2\,\text{sen}\big(3(w-2)\big)}{\text{sen}\big(2(w-2)\big)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{2\,\text{sen}(3\theta)}{\text{sen}(2\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \left[\frac{2\,\text{sen}(3\theta)}{\text{sen}(2\theta)} \cdot \frac{3\theta}{3\theta} \cdot \frac{2\theta}{2\theta}\right] =$$
$$2 \times \lim_{\theta \to 0} \left[\frac{\text{sen}(3\theta)}{3\theta} \cdot \frac{2\theta}{\text{sen}(2\theta)} \cdot \frac{3\theta}{2\theta}\right] = 2 \times \left[\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}(3\theta)}{3\theta} \times \lim_{\theta \to 0} \frac{2\theta}{\text{sen}(2\theta)} \times \lim_{\theta \to 0} \frac{3\theta}{2\theta}\right] =$$

$* Obs: \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(kx)}{kx} = 1\ (Limite\ Fundamental\ Trigonométrico)$

$$2 \times \left[\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}(3\theta)}{3\theta} \times \lim_{\theta \to 0} \frac{2\theta}{\text{sen}(2\theta)} \times \lim_{\theta \to 0} \frac{3\theta}{2\theta}\right] = 2 \times \left[1 \times 1 \times \frac{3}{2}\right] = 3\ \therefore y = 3.$$

$y = (a+e)^x\ ; com\ a = 11\ e\ y = 3, temos:$

$$3 = (11+e)^x \therefore x = \frac{\ln 3}{\ln(11+e)}$$

Questão 2

$a)\ O\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal$ à $curva\ 2xy + \pi.\text{sen}\, y = 2\pi$ $em\ um\ ponto\ (x_0, y_0)$ é $\frac{x_0}{y_0}. Encontre\ x_0\ e\ y_0, sabendo\ que\ y_0\ pertence\ ao$ $intervalo\ (0, \pi).$

$Derivando\ a\ expressão\ da\ curva\ implicitamente, obtemos:$

$$\frac{d}{dx}(2xy) + \pi \frac{d}{dx}(\text{sen}\, y) = \frac{d}{dx}(2\pi)$$
$$2(y + xy') + \pi \cos y \,.\, y' = 0$$
$$y'(2x + \pi \cos y) = -2y$$
$$y' = -\frac{2y}{2x + \pi \cos y}$$

$O\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal$ é $m_N = -\frac{1}{y'}. Logo,$

$$m_N = \frac{2x + \pi \cos y}{2y}$$

$No\ ponto\ (x_0, y_0)\ o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal\ dito\ no\ enunciado$ é $\frac{x_0}{y_0}.$

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{2x_0 + \pi \cos y_0}{2y_0}$$
$$2x_0 = 2x_0 + \pi \cos y_0$$
$$\pi \cos y_0 = 0$$

$$\cos y_0 = 0 \therefore y_0 = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi).$$

Com o valor de y_0, voltamos à expressão da curva:

$$\begin{gathered} 2x_0y_0 + \pi \operatorname{sen} y_0 = 2\pi \\ 2x_0.\frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 2\pi \\ x_0\pi + \pi = 2\pi \\ x_0\pi = \pi \therefore x_o = 1. \end{gathered}$$

O ponto em questão é $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Se $f(x) = x^{\cos x}.(\operatorname{sen} x)^{x+1}$, *encontre* $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; 2k\pi < x < \pi(2k+1), com\ k \in \mathbb{N}\}$$

$$\ln f(x) = \ln[x^{\cos x}.(\operatorname{sen} x)^{x+1}]$$
$$\ln f(x) = \ln x^{\cos x} + \ln(\operatorname{sen} x)^{x+1}$$
$$\ln f(x) = \cos x . \ln x + (x+1)\ln(\operatorname{sen} x)$$

Por diferenciação logarítmica, obtemos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\operatorname{sen} x . \ln x + \frac{\cos x}{x} + \ln(\operatorname{sen} x) + (x+1)\operatorname{cotg} x$$
$$f'(x) = f(x)\left[-\operatorname{sen} x . \ln x + \frac{\cos x}{x} + \ln(\operatorname{sen} x) + (x+1)\operatorname{cotg} x\right]$$
$$f'(x) = x^{\cos x}.(\operatorname{sen} x)^{x+1}\left[-\operatorname{sen} x . \ln x + \frac{\cos x}{x} + \ln(\operatorname{sen} x) + (x+1)\operatorname{cotg} x\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cos\frac{\pi}{2}}.\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\pi}{2}+1}\left[-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}.\ln\frac{\pi}{2} + \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} + \ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^0}{2}.(1)^{\frac{\pi+2}{2}}\left[-1.\ln\frac{\pi}{2} + \frac{0}{\frac{\pi}{2}} + \ln 1 + \left(\frac{\pi+2}{2}\right).0\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln\frac{\pi}{2} = \ln\frac{2}{\pi}.$$

Questão 3

a) A função $f(x) = \begin{cases} (x-\pi)^{10}\operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right), & x \neq \pi \\ 0, \quad x = \pi \end{cases}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$?
Justifique sua resposta.

f é uma função sentencial e, portanto, será contínua onde as funções que a compõe são contínuas, considerando os intervalos de validade da cada uma de acordo com a função f.

$* \ (x-\pi)^{10}$ *é uma função polinomial e, portanto, contínua em* $\mathbb{R}$.

$* \ \operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right)$ *é uma composição de função trigonométrica e racional polinomial.*

Logo, esta função é contínua onde seu argumento estiver definido, ou seja, para $x \neq \pi$.

Como $(x-\pi)^{10}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$, *e então,* $(x-\pi)$ *é contínua em qualquer intervalo definido em* $\mathbb{R}$. *Logo, o produto das duas funções* $(x-\pi)^{10}.\operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right)$ *é contínua em* $(-\infty,\pi)\cup(\pi,+\infty)$.

Analisando a continuidade de f *em* $x=\pi$, *temos:*

1) $f(\pi)=0$

2) $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)^{10}.\operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right);$

Pela desigualdade trigonométrica, temos:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right) \leq 1$$

Como $(x-\pi)^{10} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *temos:*

$$-(x-\pi)^{10} \leq (x-\pi)^{10}.\operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right) \leq (x-\pi)^{10}$$

Se $-(x-\pi)^{10} \leq (x-\pi)^{10}.\operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right) \leq (x-\pi)^{10}$ *quando* x *está próximo a* π *(exceto possivelmente em* π*) e* $\lim\limits_{x\to\pi} -(x-\pi)^{10} = \lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)^{10} = 0$, *então*

$$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)^{10}.\operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right) = 0 \quad (\textit{Teorema do Confronto})$$

3) *Como* $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = f(\pi)$, *então* f *é contínua em* $x=\pi$ *e, juntamente com o intervalo de continuidade determinado anteriormente, concluimos que* f *é contínua em* $\mathbb{R}$.

b) Determine a derivada da função $f(x) = \ln\sqrt{(3x^2+2).\sqrt{6x-7}}$.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 7/6\}$$

$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left[(3x^2+2)\sqrt{6x-7}\right]$

$f(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(3x^2+2) + \ln\sqrt{6x-7}\right]$

$f(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(3x^2+2) + \frac{1}{2}\ln(6x-7)\right]$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{6x}{3x^2+2} + \frac{1}{2}.\frac{6}{6x-7}\right]$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{6x}{3x^2+2} + \frac{3}{6x-7}\right]$$
$$f'(x) = \frac{3x}{3x^2+2} + \frac{3}{12x-14}$$

Questão 4

$a)$ *Mostre que a equação* $x.2^x = 1$ *tem solução real.*

Seja $f(x) = x.2^x$. f *é uma função formada pelo produto de duas funções contínuas em* $\mathbb{R}$ *e, portanto,* f *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Sabemos que* $f(0) = 0$ *e* $f(1) = 2$. *Como* f *é contínua em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua no intervalo fechado* $[0,1]$ *e* 1 *é um número entre* $f(0)$ *e* $f(1)$. *Então existe algum* $c \in (0,1)$ *tal que* $f(c) = 1$.

(Teorema do Valor Intermediário)

Onde $f(c) = 1$ *é a solução da equação* $x.2^x = 1$. *Com isso, mostramos que a equação possui solução real no intervalo para algum* $x \in (0,1)$.

$b)$ *Determine a abscissa de cada um dos pontos do gráfico de* $f(x) = 4^x x^4$ *onde a reta tangente é horizontal.*

Em outras palavras, determinar os valores de x *tal que* $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 4^x \ln 4\, x^4 + 4^{x+1}.x^3$$
$$f'(x) = 4^x x^3[x.\ln 4 + 4]$$
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x^3 = 0 \quad ou \quad x.\ln 4 + 4 = 0$$

Portanto, $x = 0$ *e* $x = -\dfrac{4}{\ln 4}$ *são as abscissas onde a reta tangente ao gráfico de* $f(x)$ *é horizontal.*

Questão 5

$a)$ *Analise a diferenciabilidade da função* $f(x) = |x^2 - 9|$ *em* $x = 3$.

$$f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9, & x \leq -3 \quad ou \quad x \geq 3 \\ -(x^2 - 9), & -3 < x < 3 \end{cases}$$

Primeiramente verificamos se f *é contínua em* $x = 3$.

$$f(3) = |3^2 - 9| = |9 - 9| = |0| = 0.$$

$$\lim_{x\to 3} f(x);$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(x^2 - 9) = \lim_{x\to 3^+} x^2 - \lim_{x\to 3^+} 9 = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0.$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(-x^2 + 9) = \lim_{x\to 3^-} -x^2 + \lim_{x\to 3^-} 9 = -3^2 + 9 = -9 + 9 = 0.$$
$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) = 0.$$

Como $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$, *então* f *é contínua em* $x = 3$.

$Analisando\ a\ diferenciabilidade\ de\ f\ em\ x = 3, temos$:

$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2 - 9) - 0}{x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)};$$
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)} = \lim_{x\to 3^+} (x + 3) = \lim_{x\to 3^+} x + \lim_{x\to 3^+} 3 = 3 + 3 = 6.$$

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x^2 - 9) - 0}{x - 3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-x^2 + 9}{x - 3};$$
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{-x^2 + 9}{x - 3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)} = \lim_{x\to 3^-} (-x - 3) = \lim_{x\to 3^-} (-x) - \lim_{x\to 3^-} 3 = -6.$$

$Como\ as\ derivadas\ laterais\ existem, mas\ são\ diferentes, então\ f\ não\ é\ derivável$ $em\ x = 3.$

$b)\ Determine\ uma\ equação\ para\ a\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de$ $f(x) = [\operatorname{tg} x]^{\operatorname{arctg} x}, em\ x = \frac{\pi}{4}.$

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R}; 2k\pi < x < \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\ ou\ \pi(2k + 1) < x < \pi\left(\frac{3}{2} + 2k\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$Ponto\ de\ abscissa\ x = \frac{\pi}{4} : P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right).$

$$\ln f(x) = \operatorname{arctg} x \,.\, \ln(\operatorname{tg} x)$$

$Por\ diferenciação\ logarítmica, obtemos$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1 + x^2} . \ln(\operatorname{tg} x) + \operatorname{arctg} x \,.\, \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{1 + x^2} . \ln(\operatorname{tg} x) + \operatorname{arctg} x \,.\, \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2} \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) . \frac{\sec^2 \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\left[\frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}} . \ln(1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) . \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{1}\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$$

$Equação\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ f(x)\ em\ x = \frac{\pi}{4}$:

$$y - 1 = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) . \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$y = 2x . \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1$$

12.11 Reavaliação da 2ª Média – 20 de Maio de 2016

Questão 1

a) *Um triângulo retângulo isósceles tem catetos com medidas* $\sqrt{2}cm$. *Determine, usando diferenciais, a variação em sua área, se um de seus ângulos agudos aumenta* $1°$.

b) *Determine, sem o uso de funções trigonométricas inversas, as abscissas dos pontos nos quais a equação* $4\cosh^2 x = 7 \operatorname{senh} x + 1$ é *satisfeita*.

Questão 2

a) *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função* $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$ *no intervalo* $[-4,3]$.

b) *Prove que para qualquer valor de* m, *a função* $f(x) = x^3 - 3x + m$ *não pode ter duas raízes reais no intervalo* $[0,1]$.

Questão 3

a) *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^2} - 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$.

b) *Ache, analiticamente, os pontos de inflexão do gráfico da função* $f(x) = \operatorname{tg} x$, *no intervalo* $(-2\pi, 2\pi)$. *Ache também as equações das retas tangentes ao gráfico de* f *nos pontos de inflexão*.

Questão 4

a) *O raio de um cilindro circular reto está crescendo a* $4\,cm/s$, *mas sua área total permanece constante e medindo* $600\pi\ cm^2$. *A que taxa a altura varia quando o raio tem* $10cm$?

b) *Um cilindro circular reto* é *gerado pela rotação de um retângulo de perímetro* P, *em torno de um de seus lados. Que dimensões deve ter o retângulo para gerar o cilindro de volume máximo?*

Questão 5

a) *O volume de água num tanque* é $V\ m^3$, *quando a profundidade* é h *metros. Se a taxa de variação do volume em relação* à *altura for* $\dfrac{dV}{dh} = \pi[4h^2 + 12h + 9]$, *ache o volume de água no tanque quando a profundidade for de* $3m$.

$$b)\ Se\ f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}, então\ f'(x) = \frac{2}{(x^2+1)^{3/2}}\ e\ f''(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^{5/2}}.$$

Com base nisto, determine os extremos relativos de f, as assíntotas do gráfico, os intervalos onde a função cresce e onde ela decresce, os pontos de inflexão e os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo. Depois destas análises, faça o gráfico de f.

***Questão* 1**

$a)$ *Um triângulo retângulo isósceles tem catetos com medidas* $\sqrt{2}cm$. *Determine, usando diferenciais, a variação em sua área, se um de seus ângulos agudos aumenta* $1°$.

A hipotenusa desse triângulo é $a = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2cm.$

Dado dois lados de um triângulo e o ângulo adjacente entre eles, a área deste triângulo é expressa por

$$A = \frac{1}{2}ab.\operatorname{sen}\theta$$
$$A(\theta) = \frac{1}{2}(2)\left(\sqrt{2}\right)\operatorname{sen}\theta$$
$$A(\theta) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$$

Para pequenas variações no ângulo θ, *temos*:

$$\Delta A \approx dA$$
$$\Delta A \approx A'(\theta)d\theta = \sqrt{2}\cos\theta\,.\frac{\pi}{180}$$

Onde $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$. *Então ...*

$$\Delta A \approx \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}cm^2$$

$b)$ *Determine, sem o uso de funções trigonométricas inversas, as abscissas dos pontos nos quais a equação* $4\cosh^2 x = 7\operatorname{senh} x + 1$ *é satisfeita.*

$*$ *Identidade trigonométrica hiperbólica*: $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

$$4(1 + \operatorname{senh}^2 x) = 7\operatorname{senh} x + 1$$
$$4\operatorname{senh}^2 x - 7\operatorname{senh} x + 3 = 0$$
$$\operatorname{senh} x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(4)(3)}}{2(4)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{8} = \frac{7 \pm 1}{8}$$
$$\operatorname{senh} x_1 = 1 \quad e \quad \operatorname{senh} x_2 = \frac{3}{4}$$

Cálculo de x_1:

$$\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} = 1$$
$$e^{x_1} - e^{-x_1} = 2$$
$$e^{2x_1} - 1 = 2e^{x_1}$$
$$(e^{x_1})^2 - 2(e^{x_1}) - 1 = 0$$
$$y_1^2 - 2y_1 - 1 = 0 \quad ; y_1 = e^{x_1} > 0$$
$$y_1 = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$
$$y_1 = 1 + \sqrt{2}.$$
$$y_1 = e^{x_1} \therefore x_1 = \ln y_1 = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \qquad e$$

Cálculo de x_2:

$$\frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} = \frac{3}{4}$$
$$e^{x_2} - e^{-x_2} = \frac{3}{2}$$
$$2e^{2x_2} - 2 = 3e^{x_2}$$
$$2(e^{x_2})^2 - 3(e^{x_2}) - 2 = 0$$
$$2y_2^2 - 3y_2 - 2 = 0 \; ; y_2 = e^{x_2} > 0$$
$$y_2 = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$
$$y_2 = 2.$$
$$y_2 = e^{x_2} \therefore x_2 = \ln y_2 = \ln 2$$

As abscissas dos pontos que satisfaz a equação são $x_1 = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$ *e* $x_2 = \ln 2.$

Questão 2

$a)$ *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função* $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$ *no intervalo* $[-4,3]$.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x + 4 > 0\}$$

$\Delta = 2^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12.$

Logo, o logaritmando é uma função ou estritamente positiva ou estritamente negativa. Observando o termo indepentente $+4$, *concluimos que* $x^2 + 2x + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Como* f *é contínua onde está definida, então* f *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Portanto,* f *é contínua no intervalo fechado* $[-4,3]$ *e podemos utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores máximos e mínimos absolutos do intervalo.*

1) *Valores de* f *nos extremos do intervalo*:
$f(-4) - \ln((-4)^2 + 2(-4) + 4) = \ln(16 - 8 + 4) = \ln 12$
$f(3) = \ln(3^2 + 2(3) + 4) = \ln(9 + 6 + 4) = \ln 19$

2) *Valores de* f *nos números críticos em* $(-4,3)$.

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*"

$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 4}\ ;\ \ D(f') = \mathbb{R}$$

Como f *é diferenciável em* $\mathbb{R}$, *se* f *admite algum número critico* c, *então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 4} = 0 \Longrightarrow 2(x+1) = 0 \therefore x = -1;\ -1 \in (-4,3)$$

Logo, -1 *é um número crítico no intervalo* $(-4,3)$.

$f(-1) = \ln((-1)^2 + 2(-1) + 4) = \ln(1 - 2 + 4) = \ln 3$

Comparando os valores obtidos, concluimos que $\ln 19$ *é o valor máximo absoluto e* $\ln 3$ *é o valor mínimo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[-4,3]$.

$b)$ *Prove que para qualquer valor de* m, *a função* $f(x) = x^3 - 3x + m$ *não pode ter duas raízes reais no intervalo* $[0,1]$.

Suponhamos que f *possui duas raízes reais* a *e* b, *tais que* $0 < a < b < 1$ *e* $f(a) = f(b) = 0$. *Como* f *é uma função polinomial e, portanto, contínua no intervalo fechado* $[a,b]$, *diferenciável em* (a,b) *e* $f(a) = f(b)$, *pelo Teorema de Rolle, existe algum* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 - 3\ ;\ \ f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \therefore x = \pm 1.$

Como $x=-1$ e $x=1$ não pertence ao intervalo (a,b), uma vez que, $(a,b)\subset[0,1]$, por contradição, f não pode ter duas raízes reais no intervalo $[0,1]$.

Questão 3

a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}-2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. *Indeterminação do tipo* "$\dfrac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{L'H}{\Longrightarrow}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}-\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2}{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}=0-\frac{2}{1+0}=0-2=-2.$$

b) Ache, analiticamente, os pontos de inflexão do gráfico da função $f(x)=\operatorname{tg}x$, no intervalo $(-2\pi,2\pi)$. Ache também as equações das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de inflexão.

Considerado o intervalo $(-2\pi,2\pi)$ a função $f(x)=\operatorname{tg}x$ está definida para $x\neq\left\{-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$.

$f'(x)=\sec^2 x$
$f''(x)=2\sec^2 x\operatorname{tg}x\ ;\ \ \sec^2 x\geq 1$

Analisando o sinal de $f''(x)$, temos:

$$(0)+++\left(\frac{\pi}{2}\right)---(\pi)+++\left(\frac{3\pi}{2}\right)---(2\pi)$$

Como f é uma função ímpar, isto é, $f(-x)=-f(x)$, analogamente ao estudo anterior, temos:

$$(-2\pi)+++\left(-\frac{3\pi}{2}\right)---(-\pi)+++\left(-\frac{\pi}{2}\right)---(0)$$

Os pontos em destaque não são pontos de inflexão embora haja mudança na direção da concavidade da função, estes números não pertencem ao domínio de f. Por outro lado, ocorre a mudança na direção da concavidade nos números $x=\{-\pi,0,\pi\}$ que pertencem ao domínio de f e ao intervalo $(-2\pi,2\pi)$. Logo, temos pontos de inflexão em $-\pi, 0$ e π.

$f(-\pi)=\operatorname{tg}(-\pi)=0 \quad PI_1=(-\pi,0) \quad f'(-\pi)=\sec^2(-\pi)=(-1)^2=1$
$f(0)=\operatorname{tg}0=0 \quad PI_2=(0,0) \quad f'(0)=\sec^2 0=1^2=1$
$f(\pi)=\operatorname{tg}\pi=0 \quad PI_3=(\pi,0) \quad f'(\pi)=\sec^2\pi=(-1)^2=1$

Equação das retas tangentes nos pontos de inflexão PI_1, PI_2 e PI_3:

$y-0=f'(-\pi)(x+\pi)\ ;\quad y-0=f'(0)(x-0)\quad ;\quad y-0=f'(\pi)(x-\pi)$
$y=x+\pi \qquad y=x \qquad y=x-\pi$

Questão 4

$a)$ *O raio de um cilindro circular reto está crescendo a* $4\,cm/s$ *, mas sua área total permanece constante e medindo* $600\pi\ cm^2$. *A que taxa a altura varia quando o raio tem* $10cm$?

$A_T = 2\pi r(r+h) = 600\pi \therefore r(r+h) = 300 \implies h = \frac{300}{r} - r$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dr}.\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = \left(-\frac{300}{r^2} - 1\right).4$$
$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{r=10cm} = \left(-\frac{300}{100} - 1\right)4 = -16\,cm/s$$

Portanto, a altura está decrescendo à taxa de $16\,cm/s$.

$b)$ *Um cilindro circular reto é gerado pela rotação de um retângulo de perímetro* P, *em torno de um de seus lados. Que dimensões deve ter o retângulo para gerar o cilindro de volume máximo?*

$$P = 2(b+l) \implies l = \frac{P}{2} - b$$

Girando em torno do lado de medida l, *temos:*

$V(b,l) = \pi b^2.l$

$V(b) = \pi b^2.\left(\frac{P}{2} - b\right)$

$V(b) = \pi\left(\frac{Pb^2}{2} - b^3\right)$

$V'(b) = \pi(Pb - 3b^2)$

Analisando o sinal de $V'(b)$, *temos:*

$$-----(0)++++\left(\frac{P}{3}\right)----- \quad V'(b)$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, $b = \frac{P}{3}$ *é um número crítico associado a um ponto de máximo local e absoluto de* $V(b)$, *uma vez que,* $V(b) \leq V\left(\frac{P}{3}\right)$ *para* $b > 0$. *Logo, para as dimensões* $b = \frac{P}{3}$ *e* $l = \frac{P}{6}$ *teremos o cilindro de volume máximo.*

***Questão* 5**

$a)\ O\ volume\ de\ água\ num\ tanque\ é\ V\ m^3, quando\ a\ profundidade\ é\ h\ metros.$
$Se\ a\ taxa\ de\ variação\ do\ volume\ em\ relação\ à\ altura\ for\ \dfrac{dV}{dh} = \pi[4h^2 + 12h + 9],$
$ache\ o\ volume\ de\ água\ no\ tanque\ quando\ a\ profundidade\ for\ de\ 3m.$

$$\frac{dV}{dh} = V'(h) = \pi[4h^2 + 12h + 9]$$

$A\ antiderivada\ ou\ primitiva\ mais\ geral\ de\ V'(h)\ é:$

$$V(h) = \pi\left[\frac{4}{3}h^3 + 6h^2 + 9h\right] + C$$

$Se\ a\ profundidade\ da\ coluna\ de\ água\ no\ tanque\ é\ 0, então\ nao\ há\ volume\ de\ água\ no\ tanque, ou\ seja, V(0) = 0. Portanto, C = 0. Logo,$

$$V(h) = \pi\left[\frac{4}{3}h^3 + 6h^2 + 9h\right]$$

$Quando\ a\ profundidadefor\ de\ 3m, teremos:$

$$V(3) = \pi\left[\frac{4}{3}3^3 + 6(3)^2 + 9(3)\right] = \pi[36 + 54 + 27] = 117\pi\ m^3\ de\ água.$$

$b)\ Se\ f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}, então\ f'(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)^{3/2}}\ e\ f''(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^{5/2}}.$
$Com\ base\ nisto, determine\ os\ extremos\ relativos\ de\ f, as\ assíntotas\ do\ gráfico,$
$os\ intervalos\ onde\ a\ função\ cresce\ e\ onde\ ela\ decresce, os\ pontos\ de\ inflexão\ e$
$os\ intervalos\ onde\ a\ concavidade\ é\ voltada\ para\ cima\ ou\ para\ baixo. Depois$
$destas\ análises, faça\ o\ gráfico\ de\ f.$

$1)\ Domínio\ da\ função\ f: D(f) = \mathbb{R}.$

$2)\ Interseções\ com\ os\ eixos\ coordenados: O(0,0).$

$3)\ Assíntotas:$

$*\ Não\ há\ assíntotas\ verticais\ em\ f\ porque\ a\ função\ f\ é\ contínua\ em\ \mathbb{R}\ e, portanto,$
$\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{x\to a} f(x) = f(a). E\ pela\ definição\ de\ assíntota\ vertical\ \left(\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty\right)$
$estas\ ocorrem\ em\ pontos\ de\ descontinuidade, porém, f\ é\ contínua\ em\ \mathbb{R}.$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ y = L\ é\ uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ casos$
$a\ seguir:$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad ou \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}};$$

$Obs: se\ x \to +\infty, então\ |x| = x.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$
$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}}=\frac{2}{1}=2.$$

Portanto, a reta $y=2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}};$$

$*$ *Obs: se $x\to-\infty$, então $|x|=-x$.*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}-2}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$
$$\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}-2}{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}=\frac{-2}{\sqrt{1+0}}=\frac{-2}{1}=-2.$$

Portanto, a reta $y=-2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $f(x)$.

$*$ *Oblíqua: Dizemos que a reta $y=ax+b$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de uma função f se, somente se, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.*

Onde $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$; $a\neq0$ e $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$;

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\downarrow\atop+\infty}}=0$$

Portanto, f não possui assíntota oblíqua.

3) *Crescimento, decrescimento e pontos extremos relativos:*

$$f'(x)=\frac{2}{(x^2+1)^{3/2}}>0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

$*$ *Como $f'(x)>0,\forall x\in D(f)$, então f é sempre crescente.*
$*$ *Na ausência de números críticos de f, sendo f contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, então f não possui pontos extremos relativos.*

4) *Concavidade e pontos de inflexão:*

$$f''(x)=-\frac{6x}{(x^2+1)^{5/2}}$$

$Estudo\ da\ concavidade\ da\ função\ f\ pelo\ sinal\ de\ f''(x)$:

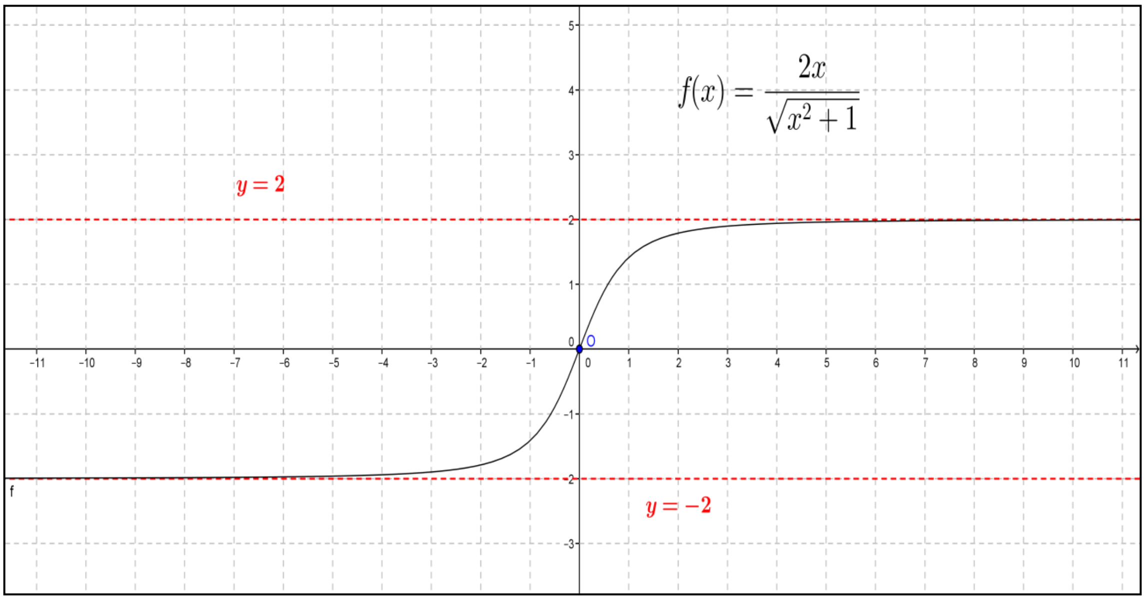
$$+ + + + + + + + (0) - - - - - - - - \qquad f''(x)$$

$Pelo\ estudo\ do\ sinal\ da\ segunda\ derivada\ de\ f, concluimos\ que$:

$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ em\ (-\infty, 0)\ e$
$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ baixo\ em\ (0, +\infty)$

$E\ como\ ocorre\ mudannça\ na\ direção\ da\ concavidade\ em\ x = 0\ e\ 0 \in D(f)\ então,$
$o\ ponto\ \big(0, f(0)\big)$ é $um\ ponto\ de\ inflexão\ de\ f.\ \ Ponto\ O(0,0)$

$Esboço\ Gráfico$:



12.12 Reavaliação da 2ª Média – 21 de Maio de 2016

***Questão* 1**

a) Use aproximação linear para estimar o raio do cilindro de altura $100m$ *e volume* $401\pi m^3$.

b) Seja C *a curva dada pela equação* $y = \cosh x - 3 \operatorname{senh} x$. *Determine o coeficiete angular da reta tangente à curva* C *no ponto em que* $y = 1$.

***Questão* 2.**

a) Determine os pontos de máximo e mínimo absolutos de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 4 - x^2, & x > 1, \end{cases}$$

no intervalo $[-1,2]$.

b) Seja $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 x - \cosh^2 x$. *Use consequência do Teorema do Valor Médio para mostrar que* $f(x) = 0$ *para qualquer* $x \in \mathbb{R}$.

***Questão* 3**

a) Calcule o seguinte limite: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

b)Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *determine* a, b, c *e* d, *de forma que* f *tenha um extremo relativo no ponto* $(0,3)$ *e que o gráfico de* f *tenha uma inflexão no ponto* $(1,-1)$. *Obs: Como* f *é polinomial, se* f *tem um ponto de inflexão quando* $x = n$, *então* $f''(n) = 0$.

***Questão* 4**

a) Para construir uma taça em forma de cone circular reto, remove − se um setor de uma folha circular de cartolina de raio $\sqrt{3}$, *e unem − se as duas margens retilíneas do corte. Determine o volume da maior taça que pode ser construída.*

b) Areia é derramada em uma superfície, formando uma pilha cônica cujo diâmetro da base é igual a sua altura. Determine quão rápido a altura da pilha cresce quando sua altura é $3m$. (***ANULADA!***)

***Questão* 5**

a) Encontre f, *sabendo que* $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x^3 . e^x + x^2 + x^3 . \cosh x}{x^3}$ *e que* $f(1) = -e$.

$b)\ Dados\ f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}\ e\ f''(x) = \dfrac{6x^3 - 18x}{(x^2+1)^3}, encontre\ as\ abscissas\ dos\ pontos\ de\ inflexão\ da\ curva\ .$

Questão 1

$a)$ *Use aproximação linear para estimar o raio do cilindro de altura* $100m$ *e volume* $401\pi m^3$.

$$V(r) = \pi r^2 . h = 100\pi r^2$$
$$r(V) = \sqrt{\frac{V}{100\pi}} = \frac{1}{10\pi}\sqrt{\pi . V}$$
$$r'(V) = \frac{1}{20\sqrt{\pi . V}} \ ; \ r'(400\pi) = \frac{1}{400\pi}$$

Supondo que o volume inicial era $400\pi m^3$, *então*:

$$r = \frac{1}{10\pi}\sqrt{400\pi^2}$$
$$r = \frac{1}{10\pi} . 20\pi = 2m$$

Por aproximação linear ou linearização da função $r(V)$ *em* $V = 400\pi$, *temos*:

$$L(V) = r(400\pi) + r'(400\pi).(V - 400\pi)$$
$$L(V) = 2 + \frac{1}{400\pi}(V - 400\pi)$$

Quando $V = 401\pi m^3$, *temos*:

$$L(401\pi) = 2 + \frac{1}{400\pi}(401\pi - 400\pi)$$
$$L(401\pi) = \left(2 + \frac{1}{400}\right) m$$

Pela aproximação linear, o raio r do cilindro é $r = L(401\pi)$.

$$r = \left(2 + \frac{1}{400}\right) m = 2{,}0025m$$
$$r = \left(200 + \frac{1}{4}\right) cm = 200{,}25cm$$

$b)$ *Seja C a curva dada pela equação* $y = \cosh x - 3 \operatorname{senh} x$. *Determine o coeficiete angular da reta tangente à curva C no ponto em que* $y = 1$.

$$\cosh x - 3 \operatorname{senh} x = 1$$
$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{3e^x - 3e^{-x}}{2} = 1$$
$$e^x + e^{-x} - 3e^x + 3e^{-x} = 2$$
$$-2e^x + 4e^{-x} = 2$$
$$-2e^{2x} + 4 = 2e^x$$
$$2e^{2x} + 2e^x - 4 = 0$$
$$e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

$$(e^x)^2 + (e^x) - 2 = 0$$

Seja $y = e^x\,; y > 0.$ *Então,*

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm 3}{2} \therefore \quad \boldsymbol{y_1 = 1} \quad ou \quad y_2 = -2\ (não\ satisfaz\ a\ condição)$$

$$y_1 = e^{x_1} \therefore x_1 = \ln y_1 = \ln 1 = 0.$$

Determinando o coeficiente angular da reta tangente em $x = 0$, *temos*:

$$y = f(x) = \cosh x - 3\,\text{senh}\, x$$
$$f'(x) = \text{senh}\, x - 3\cosh x$$
$$f'(0) = \text{senh}\, 0 - 3\cosh 0$$
$$f'(0) = 0 - 3(1)$$
$$f'(0) = -3$$

O coeficiente angular da reta tangente em $x = 0$ é -3.

***Questão* 2.**

$a)$ *Determine os pontos de máximo e mínimo absolutos de*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 4 - x^2, & x > 1, \end{cases}$$

no intervalo $[-1,2]$.

Para utilizamos o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos absolutos de f *no intervalo* $[-1,2]$ f *deve ser contínua em* $[-1,2]$.

Como f é *sentencial e formada por funções polinomiais, então* f é *contínua em* $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. *Como* $1 \in [-1,2]$, *devemos verificar a continuidade de* f *em* 1. *Logo,*

$f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3.$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (4 - x^2) = \lim_{x\to1^+} 4 - \lim_{x\to1^+} x^2 = 4 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (x^2 + 2) = \lim_{x\to1^-} x^2 + \lim_{x\to1^-} 2 = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$
$$\therefore \lim_{x\to1} f(x) = 3.$$

Como $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$, *então* f é *contínua em* $x = 1$ *e, portanto, contínua no intervalo fechado* $[-1,2]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado:

1) *Valores de* f *nos extremos do intervalo*:

$f(-1) = (-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3 \qquad e \qquad f(2) = 4 - 2^2 = 4 - 4 = 0.$

2) *Valores de* f *nos números críticos de* f *em* $(-1,2)$.

$"Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f$ é $um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde$
$ou\ f'(c) = 0\ ou\ onde\ f'(c)\ não\ existe"$

$Uma\ expressão\ para\ a\ função\ derivada\ de\ f$ é:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ -2x, & x > 1 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x = 0\,; x < 1 \quad ou \quad -2x = 0; x > 1$

$Das\ duas\ equações\ tiramos\ x = 0, porém, 0\ satisfaz\ apenas\ a\ primeira\ equação$
$cuja\ condição$ é $x < 1.\ Logo, 0$ é $um\ número\ crítico\ de\ f\ no\ intervao\ (-1,2).$

$Analisando\ a\ diferenciabilidade\ em\ x = 1, temos:$

$$f'_+(1) = -2 \quad e \quad f'_-(1) = 2$$

$Como\ as\ derivadas\ laterais\ existem, porém\ são\ diferentes, então\ f\ não$ é
$derivável\ em\ x = 1\ e, portanto, 1$ é $um\ número\ crítico\ de\ f\ no\ intervalo\ (-1,2).$

$$f(0) = 0^2 + 2 = 2 \qquad e \qquad f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$Comparando\ os\ valores\ obtidos\ temos:$

3 é $o\ valor\ máximo\ absoluto\ de\ f\ no\ intervalo\ fechado\ [-1,2]\ e\ corresponde$
$aos\ pontos\ (-1,3)\ e\ (1,3).$

0 é $o\ valor\ mínimo\ absoluto\ de\ f\ no\ intervalo\ fechado\ [-1,2]\ e\ corresponde$
$ao\ ponto\ (2,0).$

$Pontos\ de\ máximo\ absoluto: (-1,3)\ e\ (1,3)$
$Ponto\ de\ mínimo\ absoluto: (2,0)$

$b)\ Seja\ f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 x - \cosh^2 x\,.\ Use\ consequência\ do\ Teorema$
$do\ Valor\ Médio\ para\ mostrar\ que\ f(x) = 0\ para\ qualquer\ x \in \mathbb{R}.$

$Domínio\ da\ função\ f: D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x + 2 \operatorname{senh} x \cosh x - 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
$f'(x) = 0$

$Como\ consequência\ do\ Teorema\ do\ Valor\ Médio, se\ f'(x) = 0\ para\ todo\ x \in \mathbb{R},$
$então\ f$ é $constante\ em\ \mathbb{R}\,. Ou\ seja, f(x) = C\ para\ qualquer\ x \in \mathbb{R}, onde\ C$ é uma
$constante. Para\ determinar\ o\ valor\ de\ C\ temos:$

$f(0) = \operatorname{sen}^2 0 + \cos^2 0 + \operatorname{senh}^2 0 - \cosh^2 0$
$f(0) = 0 + 1 + 0 - 1 \;\Longrightarrow f(0) = 0\ \therefore C = 0.$

$Portanto, f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

***Questão* 3**

$a)\ Calcule\ o\ seguinte\ limite\!:\ \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{x.\operatorname{tg}\frac{x}{2}}_{\substack{\downarrow\\ \pm\infty}}} = 0$$

$*\ Obs\!:$ *A julgar pelo conteúdo referente à reavalição da 2ª média, só seria possível aplicar a Regra de L'Hôspital caso o limite se apresentasse da seguinte forma ...*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{2}{x}}$$

Neste formato, temos a indeterminação do tipo $"\frac{0}{0}"$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^2}\sec^2\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sec^2\frac{2}{x}} = \frac{1}{2\sec^2 0} = \frac{1}{2}$$

b) Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *determine* a, b, c *e* d, *de forma que* f *tenha um extremo relativo no ponto* $(0,3)$ *e que o gráfico de* f *tenha uma inflexão no ponto* $(1,-1)$. *Obs: Como* f *é polinomial, se* f *tem um ponto de inflexão quando* $x = n$, *então* $f''(n) = 0$.

Como o ponto $(0,3)$ *pertence ao gráfico da função* $f(x)$, *então* $f(0) = 3$. *Logo,* $f(0) = d$. *Portanto,* $d = 3$.

Como f *possui um extremo relativo em* $x = 0$, *então* 0 *é um número crítico da função* f *e, por* f *ser contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$, $f'(0)$ *existe e* $f'(0) = 0$.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f'(0) = c \therefore c = 0.$$

Como f *é polinomial, se* f *tem um ponto de inflexão quando* $x = 1$, *então* $f''(1)$ *existe e* $f''(1) = 0$.

$$f''(x) = 6ax + 2b$$
$$f''(1) = 6a + 2b$$
$$6a + 2b = 0$$
$$3a + b = 0 \quad (Eq.1)$$

Como o ponto $(1,-1)$ *pertence ao gráfico da função* $f(x)$, *então* $f(1) = -1$. *Logo,*

$$f(1) = a + b + 3$$
$$a + b + 3 = -1$$
$$a + b = -4 \quad (Eq.2)$$

$Resolvendo\ o\ sistema\ de\ equações$: $\begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + b = -4 \end{cases}$, $temos\ a = 2\ e\ b = -6.$
$Portanto, f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3.$

Questão 4

$a)$ $Para\ construir\ uma\ taça\ em\ forma\ de\ cone\ circular\ reto, remove - se$ $um\ setor\ de\ uma\ folha\ circular\ de\ cartolina\ de\ raio\ \sqrt{3}, e\ unem - se\ as\ duas$ $margens\ retilíneas\ do\ corte. Determine\ o\ volume\ da\ maior\ taça\ que\ pode\ ser$ $construída.$

$O\ raio\ do\ setor\ circular\ é\ a\ geratriz\ g\ do\ cone\ circular\ reto. Sendo\ r\ o\ raio$ $da\ base\ do\ cone\ e\ h\ a\ altura, temos$:

$$g^2 = h^2 + r^2 \therefore r^2 = g^2 - h^2$$

$Onde\ \ 0 < h < g, ou\ seja, 0 < h < \sqrt{3}.$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(g^2 - h^2)h$$
$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(g^2 h - h^3)$$
$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(g^2 - 3h^2)$$

$Estudo\ do\ sinal\ da\ derivada\ da\ função\ V(h), temos$:

$$(0) + + + + \left(\frac{g\sqrt{3}}{3}\right) - - - - - - (\sqrt{3})\quad V'(h)$$

$Pelo\ Teste\ da\ Primeira\ Derivada, h = \dfrac{g\sqrt{3}}{3}\ é\ o\ número\ crítico\ associado\ ao$ $valor\ máximo\ local\ e, considerando\ o\ intervalo\ (0, \sqrt{3}), máximo\ absoluto\ da$ $função. Portanto, para\ h = \dfrac{g\sqrt{3}}{3}\ teremos\ a\ taça\ de\ maior\ volume.$
$Como\ g = \sqrt{3}, temos\ h = 1. Logo,$

$$V(1) = V_{máx} = \frac{1}{3}\pi(3 - 1) = \frac{2}{3}\pi\ u.V$$

$b)$ $Areia\ é\ derramada\ em\ uma\ superfície, formando\ uma\ pilha\ cônica\ cujo$ $diâmetro\ da\ base\ é\ igual\ a\ sua\ altura. Determine\ quão\ rápido\ a\ altura\ da$ $pilha\ cresce\ quando\ sua\ altura\ é\ 3m.$ (***ANULADA!***)

$Método\ de\ resolução\ para\ este\ item$:

$Taxa\ com\ a\ qual\ a\ areia\ é\ derramada\ é\ constante\ \dfrac{dV}{dt} = k(m^3/unidade\ de\ tempo)$
$Volume\ da\ pilha\ de\ areia$:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 . h$$

$Informação\ da\ questão: 2r = h \therefore r = \frac{h}{2}.$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 .h$$
$$V(h) = \frac{\pi h^3}{12}$$

Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}.\frac{dh}{dt}$$
$$k = \frac{\pi h^2}{4}.\frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{4k}{\pi h^2}$$

$Quando\ h = 3m, temos:$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4k}{9\pi}\ m/unidade\ de\ tempo$$

Questão 5

$a)\ Encontre\ f, sabendo\ que\ f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x^3.e^x + x^2 + x^3.\cosh x}{x^3}\ \ e\ que$
$f(1) = -e.$

$$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3} - e^x + \frac{1}{x} + \cosh x$$
$$f'(x) = x^{-\frac{5}{2}} - e^x + \frac{1}{x} + \cosh x$$

A antiderivada ou primitiva mais geral de $f'(x)$ é

$$f(x) = \frac{1}{-\frac{5}{2}+1}x^{-\frac{5}{2}+1} - e^x + \ln x + \operatorname{senh} x + C$$
$$f(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln x + \operatorname{senh} x + C$$

$Utilizando\ a\ condição\ f(1) = -e, obtemos:$

$$-e = -\frac{2}{3} - e + \ln 1 + \operatorname{senh} 1 + C$$

$$C = \frac{2}{3} - \operatorname{senh} 1 \quad , ou\ ainda, C = \frac{2}{3} - \frac{e - \frac{1}{e}}{2} = \frac{2}{3} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2e}$$

$$Portanto, f(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln x + \operatorname{senh} x + \frac{2}{3} - \operatorname{senh}(1).$$

$b)\ Dados\ f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}\ e\ f''(x) = \dfrac{6x^3-18x}{(x^2+1)^3}, encontre\ as\ abscissas\ dos\ pontos\ de\ inflexão\ da\ curva\ .$

$Domínio\ da\ função\ f{:}\ D(f) = \mathbb{R}.$

$$f''(x) = \frac{6x^3-18x}{(x^2+1)^3}$$
$$f''(x) = \frac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$Estudo\ da\ concavidade\ da\ função\ f{:}$

$- - - - - - - - - -(0) + + + + + + + + + +$ $\quad 6x$
$+ + +(-\sqrt{3}) - - - - - - - - -(\sqrt{3}) + + + +$ $\quad (x^2-3)$
$+ +$ $\quad (x^2+1)^3$
$- - -(-\sqrt{3}) + + + (0) - - - (\sqrt{3}) + + + +$ $\quad f''(x)$

$Como\ ocorre\ a\ mudança\ na\ direção\ da\ concavidade\ da\ função\ f\ nas\ abscissas\ x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0\ e\ x_3 = \sqrt{3}\ e\ estes\ números\ pertencem\ ao\ domínio\ da\ função\ f,\ então\ x_1, x_2\ e\ x_3\ são\ as\ abscissas\ dos\ pontos\ de\ inflexão\ da\ curva.$

$$PI_1\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\ ;\quad PI_2(0{,}0)\quad e\quad PI_3\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

12.13 Avaliação Final – 27 de Maio de 2016

Questão 1

$a)$ *Seja* $f(x) = x^2$. *Mostre que para qualquer intervalo* $[a, b]$, *o ponto c referido no Teorema do Valor Médio é sempre igual a* $\frac{a+b}{2}$.

$b)$ *Mostre que a reta normal ao círculo* $x^2 + y^2 = R^2$, *em qualquer ponto, passa pela origem. Dê especial atenção aos casos em que uma das coordenadas é nula.*

Questão 2

$a)$ *Estime, usando aproximações lineares, o valor de* $\operatorname{arctg}(0{,}1) + e^{0,9}$.

$b)$ *Use derivação logarítmica para encontrar a derivada da função*
$f(x) = \dfrac{\left[\sqrt[3]{\ln^2 x}\right] x^3}{\cos^2 x}$.

Questão 3

$a)$ *Determine uma equação para a reta que passa pelo ponto* $(2{,}3)$ *e delimita com os eixos coordenados o triângulo de menor área.*

$b)$ *Ache as assíntotas horizontais da função* $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x - 2}$.

Questão 4

$a)$ *Sendo* $4\left(x - \sqrt{2}\right)^6 \geq |f(x) - e^2|$, *calcule* $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f(x)$.

$b)$ *Sendo* $f(x) = \operatorname{arcsen}(\log_2 x)$, *determine* $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.* *Correção posterior* $f'(1)$.

Questão 5

$a)$ *Uma partícula está se movendo ao longo da curva* $y = \sqrt{x}$. *Quando a partícula passa pelo ponto* $(4{,}2)$ *sua coordenada x cresce a uma taxa de* $3\ cm/s$. *Se* θ *é o ângulo formado pelo eixo x e o segmento de reta que une a partícula à origem, determine a que taxa está variando* θ, *no instante em que a partícula passa pelo ponto* $(4{,}2)$.

$b)$ *Sabendo que* $f'(x) = \sec x \,.\, \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + e^{2x}$, *e que* $f(0) = \dfrac{3}{2}$, *determine* $f(x)$.

Questão 6

$a)$ *Calcule a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e pela reta tangente à curva* $y = \operatorname{sen}^7[e^x.x]^{10} + \dfrac{2^x}{\ln 2}$, *no ponto em que* $x = 0$.

$b)$ *Se for possível, determine* a *e* b $\in \mathbb{R}$, *de modo que a função* $f(x) = \begin{cases} ax+b, & se\ |x| \leq 2 \\ |x-1|, & se\ |x| > 2 \end{cases}$ *seja contínua em todos os reais.*

Questão 7

$a)$ *Determine o coeficiente angular da reta que contém os pontos de máximo e mínimo absolutos da função* $f(x) = \ln x - x$, *com* $e \leq x \leq e^2$.

$b)$ *Use a definição de derivada para calcular o coeficiente anngular da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, *no ponto em que* $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Questão 8

$a)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}}$.

$b)$ *Analise a concavidade do gráfico da função* $f(x) = \log_2 x + x^2$.

Questão 9

$a)$ *Determine o valor de c sabendo que o coeficiente angular da reta tangente à curva dada por* $y = \dfrac{\pi}{2}.(\ln x)^2 + e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2(2x)$ *no ponto em que* $x = \pi$ é $-1 + c$.

$b)$ *Sabemos que g* é *a inversa da função f e que o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de f no ponto* $(2,3)$ é $-\dfrac{1}{3}$, *determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g em* $x = 3$.

Questão 10

$a)$ *Mostre que a equação* $\ln x - e^{-x} = 0$ *possui uma raiz no intervalo* $(1/2, 3)$.

$b)$ *Mostre que existem números* α *e* β *tais que* $2.e^x - 5.e^{-x} = \alpha \operatorname{senh}(x + \beta)$.

$\boldsymbol{Questão\ 1}$

(a) $Seja\ f(x) = x^2. Mostre\ que\ para\ qualquer\ intervalo\ [a, b], o\ ponto\ c\ referido$ $no\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ é\ sempre\ igual\ a\ \dfrac{a+b}{2}.$

f é $uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ e\ diferenciável\ em\ \mathbb{R}. Logo,$ f é $contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [a, b]\ e\ f$ é $diferenciável\ no\ intervalo\ aberto$ $(a, b), então\ existe\ algum\ c \in (a, b)\ tal\ que$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ , \qquad a \neq b$$

$Temos, portanto, f(b) = b^2\ e\ f(a) = a^2\ e\ f'(x) = 2x, então\ f'(c) = 2c.\ \ Logo,$

$$2c = \frac{b^2 - a^2}{b - a}$$

$$2c = \frac{(b-a)(b+a)}{b - a}\ , a \neq b \Longrightarrow b - a \neq 0$$

$$2c = b + a$$

$$c = \frac{b+a}{2}$$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

$Logo, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ a\ abscissa\ do\ ponto\ onde\ a\ reta\ tangente$ é $paralela\ a\ reta\ secante\ que\ passa\ pelos\ pontos\ \big(a, f(a)\big)\ e\ \big(b, f(b)\big)$ é $c = \dfrac{a+b}{2}.$

$Questão\ 1$

(b) *Mostre que a reta normal ao círculo* $x^2 + y^2 = R^2$, *em qualquer ponto, passa pela origem. Dê especial atenção aos casos em que uma das coordenadas é nula.*

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(R^2)$$
$$2x + 2yy' = 0$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$

Dado um ponto pertencente ao círculo (x_0, y_0) *tal que* $x_0 \neq 0$ *e* $y_0 \neq 0$, *temos que o coeficiente angular da reta tangente nesse ponto é* $m = -x_0/y_0$. *Logo, o coeficiente angular da reta normal é* $m_n = y_0/x_0$.

Equação da reta normal em (x_0, y_0):

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$
$$y = \frac{y_0}{x_0}x$$

Para $x = 0$, *temos* $y = 0$ *e, portanto, a reta normal em qualquer ponto* (x_0, y_0) *tal que* $x_0 \neq 0$ *e* $y_0 \neq 0$ *passa pela origem* $(0,0)$.

1º *caso: quando a abscissa é nula. Pontos* $(0, R)$ *e* $(0, -R)$.

Quando $x_0 = 0$, *o coeficiente angular da reta tangente é nulo, isto é,* $m = 0$ *e, portanto, a reta tangente nos pontos* $(0, R)$ *e* $(0, -R)$ *é horizontal. Logo, a reta normal nestes pontos, é uma reta normal vertical cuja equação é* $x = x_0 = 0$.

2º *caso: quando a ordenada é nula. Pontos* $(R, 0)$ *e* $(-R, 0)$.

Quando $y = 0$ *o coeficiente angular da reta normal dado é nulo, isto é,* $m_n = 0$ *e, portanto, a reta normal nos pontos* $(R, 0)$ *e* $(-R, 0)$ *é horizontal, cuja equação é* $y = y_0 = 0$.

Em ambos os casos 1 *e* 2, *a reta normal* $x = 0$ *e a reta* $y = 0$ *passam pela origem do sistema cartesiano e, portanto, para todo ponto* (x, y) *tal que* $x^2 + y^2 = R^2$ *a reta normal passa pela origem.*

Questão 2

(a) *Estime, usando aproximações lineares, o valor de* $\operatorname{arctg}(0{,}1) + e^{0{,}9}$.

Seja $f(x) = \operatorname{arctg} x + e^{1-x}$, *tal que* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - e^{1-x}$. *Sabendo-se que* $f(0) = e$ *e* $f'(0) = 1 - e$. *Por aproximação linear ou linearização da função* f *em* $x = 0$, *temos*:

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$
$$L(x) = e + (1 - e)x$$

Quando x *estiver próximo a* 0, *temos*:

$$f(x) \approx L(x)$$
$$f(x) \approx e + (1 - e)x$$

Em particular, temos

$$f(0{,}1) \approx e + (1 - e).0{,}1 = 0{,}9e + 0{,}1 = \frac{9e + 1}{10}.$$

$* \; f(0{,}1) = \operatorname{arctg}(0{,}1) + e^{0{,}9}$.

Logo,

$$\operatorname{arctg}(0{,}1) + e^{0{,}9} \approx \frac{9e + 1}{10}$$

$Questão\ 2$

(b) *Use derivação logarítmica para encontrar a derivada da função*
$f(x) = \dfrac{\left[\sqrt[3]{\ln^2 x}\right]x^3}{\cos^2 x}$.

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R}; x > 0, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}\right\} \ \ e \ \ Im(f) = \{y \in \mathbb{R}; y \geq 0\}$$

$$f(x) = \frac{(\ln x)^{\frac{2}{3}} . x^3}{(\cos x)^2}$$

$$\ln f(x) = \ln\left[\frac{(\ln x)^{\frac{2}{3}} . x^3}{(\cos x)^2}\right]$$

$$\ln f(x) = \ln(\ln x)^{\frac{2}{3}} + \ln x^3 - \ln(\cos x)^2$$

$$\ln f(x) = \frac{2}{3}\ln(\ln x) + 3\ln x - 2\ln(\cos x)$$

$Por\ diferenciação\ logarítmica, obtemos$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{3} . \frac{1}{\ln x} . \frac{1}{x} + 3 . \frac{1}{x} + 2 . \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{3x . \ln x} + \frac{3}{x} + 2\operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{2}{3x . \ln x} + \frac{3}{x} + 2\operatorname{tg} x\right]$$

$$f'(x) = \frac{\left[\sqrt[3]{\ln^2 x}\right]x^3}{\cos^2 x}\left[\frac{2}{3x . \ln x} + \frac{3}{x} + 2\operatorname{tg} x\right]$$

Questão 3

(a) *Determine uma equação para a reta que passa pelo ponto* $(2{,}3)$ *e delimita com os eixos coordenados o triângulo de menor área.*

Equação de uma reta que passa pelo ponto $(2{,}3)$:

$$y - 3 = m(x - 2)$$

Para delimitar um triângulo no primeiro quadrante devemos ter $m < 0$ *e* $-2m + 3 > 0$.

As dimensões desse triângulo são x_0 *e* y_0 *que são os valores da abscissa e ordenada respectivamente, onde a reta intercepta os eixos coordenados.*

Para $x = 0$, *temos* $y = y_0 = -2m + 3$

Para $y = 0$, *temos* $x = x_0 = 2 - \frac{3}{m}$

Área do triângulo delimitado pela reta e os eixos coordenados:

$$A = \frac{x_0 . y_0}{2} = \frac{\left(2 - \frac{3}{m}\right)(-2m+3)}{2} = \frac{(2m-3)(-2m+3)}{2m} = -\frac{(2m-3)^2}{2m}$$

$$A(m) = -\frac{4m^2 - 12m + 9}{2m} \quad ; \quad D(A) = \{m \in \mathbb{R}; m < 0\}$$

$$A'(m) = -\frac{(8m-12)(2m) - (4m^2 - 12m + 9)(2)}{(2m)^2}$$

$$A'(m) = -\frac{16m^2 - 24m - 8m^2 + 24m - 18}{4m^2} = -\frac{8m^2 - 18}{4m^2} = \frac{18 - 8m^2}{4m^2}$$

Estudo da função derivada $A'(m)$:

$- - - - -(-3/2) + +(0) + + + (3/2) - - - - -$ $\quad 18 - 8m^2$

$+ + + + + + + + + + (0) + + + + + + + + + + +$ $\quad 4m^2$

$- - - - -(-3/2) + +(0) + + + (3/2) - - - - -$ $\quad A'(m)$

$*$ *A parte em destaque não faz parte do intervalo de análise do domínio da função.*

$*$ *Notamos que* $m = -3/2$ *é um número crítico da função* $A(m)$ *associado à um ponto de mínimo local e, considerando o domínio da função, pelo Teste da Primeira Derivada, temos que* $A(m) \geq A(-3/2)$ *e, portanto,* $A(-3/2)$ *é o valor mínimo absoluto da funçao* A. *Logo, para* $m = -3/2$ *temos o triângulo de menor área e a equação da reta em questão é*:

$$y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 6$$

Questão 3

(b) *Ache as assíntotas horizontais da função* $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x - 2}$.

Dizemos que a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+4x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+4x-2}\right).\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}\right)}\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+3-(x^2+4x-2)}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6x+5}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6x+5}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-6x+5}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6x+5}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6+\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}} = \frac{-6+0}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1+0-0}} = \frac{-6}{2} = -3$$

— —

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+4x-2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+4x-2}\right).\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}\right)}\right] =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+3-(x^2+4x-2)}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-6x+5}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-6x+5}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x+5}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-6x+5}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}} = \frac{6-0}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1+0-0}} = \frac{6}{2} = 3$$

Logo, as retas $y = -3$ *e* $y = 3$ *são as assíntotas horizontais da função* $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x - 2}$.

Questão 4

(a) *Sendo* $4\left(x-\sqrt{2}\right)^{6} \geq |f(x)-e^{2}|$, *calcule* $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)$.

Pela desigualdade modular $|f(x)-e^{2}| \leq 4\left(x-\sqrt{2}\right)^{6}$, *temos*:

$$-4\left(x-\sqrt{2}\right)^{6} \leq f(x)-e^{2} \leq 4\left(x-\sqrt{2}\right)^{6}$$
$$e^{2}-4\left(x-\sqrt{2}\right)^{6} \leq f(x) \leq e^{2}+4\left(x-\sqrt{2}\right)^{6}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(e^{2}-4\left(x-\sqrt{2}\right)^{6}\right) = \lim_{x\to\sqrt{2}} e^{2} - 4\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(x-\sqrt{2}\right)^{6} = e^{2}-4(0)^{6} = e^{2}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(e^{2}+4\left(x-\sqrt{2}\right)^{6}\right) = \lim_{x\to\sqrt{2}} e^{2} + 4\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(x-\sqrt{2}\right)^{6} = e^{2}+4(0)^{6} = e^{2}$$

Se $e^{2}-4\left(x-\sqrt{2}\right)^{6} \leq f(x) \leq e^{2}+4\left(x-\sqrt{2}\right)^{6}$ *quando* x *está próximo a* $\sqrt{2}$ $($*exceto possivelmente em* $\sqrt{2})$ *e* $\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(e^{2}-4\left(x-\sqrt{2}\right)^{6}\right) = \lim_{x\to\sqrt{2}}\left(e^{2}+4\left(x-\sqrt{2}\right)^{6}\right) = e^{2}$ *então, pelo Teorema do Confronto,* $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) = e^{2}$.

$\boldsymbol{Questão\ 4}$

(b) *Sendo* $f(x) = \operatorname{arcsen}(\log_2 x)$, *determine* $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.* *Correção posterior* $f'(1)$.

Domínio da função $f: D(f) = \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

Como f *é uma função composta, esta será contínua onde estiver definida, isto é, em seu domínio. Logo,* f *é contínua em* $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Obs: Uma função ser contínua num intervalo fechado $[a, b]$ *implica dizer que* f *é contínua em* (a, b) *e que* $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ *e* $f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$.

Note que, embora $f\left(\frac{1}{2}\right)$ *esteja definido e* $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x)$ *existe, por outro lado,*

$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) \nexists$ *e, portanto,* $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) \nexists$. *Logo,* f *não é contínua em* $\frac{1}{2}$ *e, consequentemente, não é derivável em* $\frac{1}{2}$. *Por esta razão,* $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ *não existe!*

... após a correção. Determine $f'(1)$.

Pelo estudo da continuidade de f, *temos que* f *é contínua em* 1. *Analisando a diferenciabilidade em* $x = 1$, *temos:*

$$f'(x) = \frac{1}{x.\ln 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\log_2 x)^2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\log_2 1)^2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 0^2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{\ln 2}$$

Questão 5

(a) *Uma partícula está se movendo ao longo da curva* $y = \sqrt{x}$. *Quando a partícula passa pelo ponto* $(4{,}2)$ *sua coordenada* x *cresce a uma taxa de* $3\,cm/s$. *Se* θ *é o ângulo formado pelo eixo* x *e o segmento de reta que une a partícula à origem, determine a que taxa está variando* θ, *no instante em que a partícula passa pelo ponto* $(4{,}2)$.

Do segmento de reta tiramos a relação entre θ *e a coordenada* x *dada pela expressão*:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{x}}{x}$$
$$\operatorname{tg}\theta = x^{-\frac{1}{2}}$$

Derivando implicitamente toda a expressão em relação ao tempo, temos:

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{tg}\theta) = \frac{d}{dt}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$\sec^2\theta\,.\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.\frac{dx}{dt}$$

Quando a partícula passa pelo ponto $(4{,}2)$ *temos* $\frac{dx}{dt} = 3\,cm/s$ *e* $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$.

Logo, $\sec^2\theta = \operatorname{tg}^2\theta + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$. *Com isso*,

$$\frac{5}{4}.\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}(4)^{-\frac{3}{2}}.3$$
$$\frac{5}{4}.\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{8}.3$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{20}rad/s$$

Portanto, o ângulo θ *está decrescendo a taxa de* $\frac{3}{20}rad/s$ *quando a partícula passa pelo ponto* $(4{,}2)$.

Questão 5

(b) *Sabendo que* $f'(x) = \sec x \,.\, \text{tg}\, x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + e^{2x}$*, e que* $f(0) = \dfrac{3}{2}$*, determine* $f(x)$.

A antiderivada ou primitiva mais geral de $f'(x)$ é

$$f(x) = \sec x + \text{arcsen}\, x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Utilizando a condição $f(0) = \dfrac{3}{2}$*, obtemos:*

$$\begin{gathered} \frac{3}{2} = \sec 0 + \text{arcsen}\, 0 + \frac{1}{2}e^{0} + C \\ \frac{3}{2} = 1 + 0 + \frac{1}{2} + C \\ \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + C \\ C = 0 \end{gathered}$$

Logo, $f(x) = \sec x + \text{arcsen}\, x + \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

Questão 6

(a) *Calcule a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e pela reta tangente à curva* $y = \operatorname{sen}^7[e^x.x]^{10} + \dfrac{2^x}{\ln 2}$, *no ponto em que* $x = 0$.

Ponto $P\left(0, \dfrac{1}{\ln 2}\right)$.

$y' = 7\operatorname{sen}^6[e^x.x]^{10}.\cos[e^x.x]^{10}.10[e^x.x]^9.(e^x + xe^x) + \dfrac{1}{\ln 2}.2^x.\ln 2$
$y' = 70[e^x.x]^9(e^x + xe^x).\cos[e^x.x]^{10}.\operatorname{sen}[e^x.x]^{10} + 2^x$

No ponto em que $x = 0$, *temos* $y' = 1$.

Equação da reta tangente a curva no ponto $P\left(0, \dfrac{1}{\ln 2}\right)$:

$$y - \frac{1}{\ln 2} = 1(x - 0)$$
$$y = x + \frac{1}{\ln 2}$$

Interseções com os eixos coordenados:

Interseção com o eixo x: $A\left(-\dfrac{1}{\ln 2}, 0\right)$
Interseção com o eixo y: $B\left(0, \dfrac{1}{\ln 2}\right)$

Área do triângulo delimitado pela reta tangente e os eixos coordenados:

$$A_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\ln 2}\right) \times \left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{2(\ln 2)^2}\ u.A$$

$\textit{Questão 6}$

(b) *Se for possível, determine* a *e* b $\in \mathbb{R}$, *de modo que a função*
$f(x) = \begin{cases} ax+b, & se\ |x| \le 2 \\ |x-1|, & se\ |x| > 2 \end{cases}$ *seja contínua em todos os reais.*

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & se -2 \le x \le 2 \\ |x-1|, & se\ x < -2\ ou\ x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1), & se\ x < -2 \\ ax+b, & se -2 \le x \le 2 \\ x-1, & se\ x > 2 \end{cases}$$

Como f é uma função sentencial formada por funções polinomiais e, portanto, contínuas em $\mathbb{R}$, considerando o intervalo onde esta funções estão definidas em $f(x)$, sobre a continuidade da função f podemos afirmar que f é contínua em $(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$.

Se f for contínua em -2 e 2 chegamos à conclusão de que f é contínua em todos os reais. Analisando a continuidade em -2 e 2, temos:

$f(-2) = -2a + b$
$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (ax+b) = -2a + b$
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} -(x-1) = -(-2-1) = -(-3) = 3.$

Para que f seja contínua em $x = -2$, devemos ter

$$f(-2) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^-} f(x)$$
$$-2a + b = 3$$

Analisando a continuidade de f em 2, temos:

$f(2) = 2a + b$
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (ax+b) = 2a + b$
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x-1) = 2 - 1 = 1.$

Para que f seja contínua em $x = 2$, devemos ter

$$f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$
$$2a + b = 1$$

$\begin{cases} -2a + b = 3 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \therefore b = 2$ *e* $a = -\dfrac{1}{2}$ *é a solução do sistema de equações e, portanto, para esses valores de a e b, f é contínua em -2 e 2. Juntamente com o intervalo de continuidade definido anteriormente, f é contínua em todos os reais.*

Questão 7

(a) *Determine o coeficiente angular da reta que contém os pontos de máximo e mínimo absolutos da função* $f(x) = \ln x - x$, *com* $e \leq x \leq e^2$.

Domínio da função f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

f *é contínua onde está definida e, portanto,* f *é contínua em* $(0, +\infty)$. *Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[e, e^2]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1) *Os valores de* f *nos extremos do intervalo;*

$f(e) = \ln e - e = 1 - e \quad$ e $\quad f(e^2) = \ln e^2 - e^2 = 2 - e^2$

2) *Os valores de* f *nos números críticos de* f *em* (e, e^2);

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*"

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$$

$f'(x) \nexists \Longrightarrow x = 0$ *e* $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$, *entretanto,* 0 *não pertence ao domínio de* f *e* 1 *não pertence ao intervalo* (e, e^2) *e, portanto,* f *não possui números críticos em* (e, e^2).

Comparando os valores obtidos, temos $(2 - e^2)$ *é o valor mínimo absoluto e* $(1 - e)$ *é o valor máximo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[e, e^2]$.

O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(e, 1 - e)$ *e* $(e^2, 2 - e^2)$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 - e^2) - (1 - e)}{e^2 - e} = \frac{1 - e^2 + e}{e^2 - e} = -1 + \frac{1}{e^2 - e}$$

Questão 7

(b) *Use a definição de derivada para calcular o coeficiente anngular da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, *no ponto em que* $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \sqrt[3]{x+1} = 2 \Longrightarrow x + 1 = 8 \therefore x = 7.$$

Pela definição de derivada, o coeficiente angular m *da reta tangente no ponto de abscissa* $x = 7$ *é dado pela expresão:*

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(7 + \Delta x) - f(7)}{\Delta x}$$

Sendo $\Delta x = x - 7$, *se* $\Delta x \to 0$, *então* $x \to 7$. *Logo,*

$$m = \lim_{x \to 7} \frac{f(x) - f(7)}{x - 7}$$

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \to 7} \frac{f(x) - f(7)}{x - 7} = \lim_{x \to 7} \frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}} - \dfrac{1}{2}}{x - 7} = \lim_{x \to 7} \frac{2 - \sqrt[3]{x+1}}{2(x-7)\sqrt[3]{x+1}} \\
&= \lim_{x \to 7} \left[\frac{2 - \sqrt[3]{x+1}}{2(x-7)\sqrt[3]{x+1}} \frac{\left(4 + 2\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}{\left(4 + 2\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)} \right] \\
&= \lim_{x \to 7} \frac{8 - (x+1)}{2(x-7)\sqrt[3]{x+1}\left(4 + 2\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)} \\
&= \lim_{x \to 7} \frac{7 - x}{2(x-7)\sqrt[3]{x+1}\left(4 + 2\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)} \\
&= \lim_{x \to 7} \frac{-(x-7)}{2(x-7)\sqrt[3]{x+1}\left(4 + 2\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)} \\
&= \lim_{x \to 7} \frac{-1}{2\sqrt[3]{x+1}\left(4 + 2\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{x \to 7}(-1)}{\lim\limits_{x \to 7}\left[2\sqrt[3]{x+1}\left(4 + 2\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)\right]} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt[3]{8}\left(4 + 2\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{64}\right)} \\
&= \frac{-1}{4(4 + 4 + 4)} \\
&= -\frac{1}{48}
\end{aligned}$$

Portanto, o coeficiente angular m *da reta tangente no ponto* $\left(7, \dfrac{1}{2}\right)$ é $-\dfrac{1}{48}$.

Questão 8

(a) *Calcule* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}}$; *indeterminação do tipo* "∞^0"

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\ln x^{\left(\frac{\ln 2}{1+\ln x}\right)}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\left(\frac{\ln 2}{1+\ln x}\right).\ln x} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln 2.\ln x}{1+\ln x}};$$

Calculando o limite do expoente, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 2 \,.\, \ln x}{1 + \ln x}; \quad \textit{indeterminação do tipo } "\frac{\infty}{\infty}"$$

Aplicando a Regra de L'Hôspital, obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 2 \,.\, \ln x}{1 + \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 2 \,.\, \frac{1}{x}}{0 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 2 \,.\, \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \ln 2 = \ln 2.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln 2.\ln x}{1+\ln x}} = e^{\ln 2} = 2.$$

$\boldsymbol{Questão\ 8}$

$(b) Analise\ a\ concavidade\ do\ gráfico\ da\ função\ f(x) = \log_2 x + x^2.$

$Domínio\ da\ função\ f\colon\ D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}.$

$$f'(x) = \frac{1}{x.\ln 2} + 2x$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2.\ln 2} + 2 = \frac{2x^2.\ln 2 - 1}{x^2.\ln 2}$$

$Estudando\ o\ sinal\ da\ segunda\ derivada\ de\ f, temos:$

$(0) - - - - - \left(1/\sqrt{\ln 4}\right) + + + + + + + + + + \qquad (2x^2.\ln 2 - 1)$
$(0) + + + + + + + + + + + + + + + + + + + \qquad x^2.\ln 2$
$(0) - - - - - \left(1/\sqrt{\ln 4}\right) + + + + + + + + + + \qquad f''(x)$

$Com\ a\ análise\ da\ segunda\ derivada\ de\ f, concluimos\ que$

$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ em\ \left(\frac{1}{\sqrt{\ln 4}}, +\infty\right)\ e$

$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ baixo\ em\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{\ln 4}}\right).$

$\boldsymbol{Questão\ 9}$

(a) *Determine o valor de c sabendo que o coeficiente angular da reta tangente* à *curva dada por* $y = \frac{\pi}{2}.(\ln x)^2 + e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2(2x)$ *no ponto em que* $x = \pi$ é $-1 + c$.

$$y' = \frac{\pi}{2}.2.\ln x.\frac{1}{x} + \cos x.e^{\operatorname{sen} x} + 2.\cos(2x).[-\operatorname{sen}(2x)]$$
$$y' = \frac{\pi.\ln x}{x} + \cos x.e^{\operatorname{sen} x} - 2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)$$
$$y' = \frac{\pi.\ln x}{x} + \cos x.e^{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen}(4x)$$

No ponto em que $x = \pi$, *temos*:

$$y' = \frac{\pi.\ln \pi}{\pi} + \cos \pi.e^{\operatorname{sen} \pi} - \operatorname{sen}(4\pi)$$
$$y' = \ln \pi - 1 - 0$$
$$y' = \ln \pi - 1$$

Como o coeficiente angular da reta tangente à *curva no ponto em que* $x = \pi$ é $-1 + c$, *então* $y' = -1 + c$ *em* $x = \pi$. *Portanto*,

$$\ln \pi - 1 = -1 + c$$

$$c = \ln \pi$$

Questão 9

(b) *Sabemos que* g é *a inversa da função* f *e que o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de* f *no ponto* $(2,3)$ é $-\frac{1}{3}$, *determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* g *em* $x = 3$.

Como g é *a inversa da função* f, *então* $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

Como o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de f *no ponto* $(2,3)$ é $-\frac{1}{3}$ *então o coeficiente angular da reta tangente neste ponto* é 3. *Logo,* $f'(2) = 3$.

$$g(f(x)) = x$$

Derivando implicitamente e usando a Regra da Cadeia, temos:

$$g'(f(x)).f'(x) = 1$$
$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$g'(f(x)) = g'(3) \Longrightarrow f(x) = 3 \therefore x = 2.$ *Logo,*

$$g'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$g'(3) = \frac{1}{3}$$

Onde, $g'(3)$ é *o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* g *em* $x = 3$.

$\boldsymbol{Questão\ 10}$

(a) *Mostre que a equação* $\ln x - e^{-x} = 0$ *possui uma raiz no intervalo* $(1/2\,,3)$.

Seja $f(x) = \ln x - e^{-x}$.

Domínio da função $f: D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$.

Como f é *uma função definida pela subtração de duas funções contínuas em* $(0, +\infty)$ *então* f é *contínua em* $(0, +\infty)$. *Logo,* f é *contínua no intervalo fechado* $[1/2\,,3]$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} = -\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{e}} < 0$$

$$f(3) = \ln 3 - e^{-3} = \ln 3 - \frac{1}{e^3} > 0$$

Como f é *contínua no intervalo fechado* $[1/2\,,3]$ *e* 0 é *um número entre* $f(1/2)$ *e* $f(3)$, *pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum* $c \in (1/2\,,3)$ *tal que* $f(c) = 0$.

$$f(x) = 0 \Longrightarrow \ln x - e^{-x} = 0$$

Desse modo provamos pelo Teorema do Valor Intermediário que a equação acima possui uma raíz real no intervalo $(1/2\,,3)$.

Questão 10

(b) *Mostre que existem números* α *e* β *tais que* $2.e^x - 5.e^{-x} = \alpha\,\mathrm{senh}(x+\beta)$.

$$2.e^x - 5.e^{-x} = \alpha.\frac{e^{x+\beta} - e^{-(x+\beta)}}{2}$$
$$2.e^x - 5.e^{-x} = \frac{\alpha}{2}e^{\beta}.e^x - \frac{\alpha}{2}e^{-\beta}.e^{-x}$$

Igualando os coeficiente de mesma complexidade exponencial, temos:

$$\frac{\alpha}{2}e^{\beta} = 2 \Longrightarrow \alpha e^{\beta} = 4 \quad (I)$$

$$\frac{\alpha}{2}e^{-\beta} = 5 \Longrightarrow \alpha e^{-\beta} = 10 \Longrightarrow \alpha = 10e^{\beta} \quad (II)$$

Substituindo a expressão (II) $\alpha = 10e^{\beta}$ *na expressão* (I) $\alpha e^{\beta} = 4$, *obtemos:*

$$\alpha.e^{\beta} = 4$$
$$10e^{\beta}.e^{\beta} = 4$$
$$10e^{2\beta} = 4$$
$$e^{2\beta} = \frac{2}{5}$$
$$2\beta = \ln\left(\frac{2}{5}\right)$$
$$\beta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{5}\right) = \ln\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Com o valor de β, *substituimos na expressão* (I):

$$\alpha = 10e^{\beta}$$
$$\alpha = 10e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$$
$$\alpha = 10\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\alpha = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{10}$$

Com isso mostramos que existem α *e* β *que satisfaz a equação*

$$2e^x - 5e^{-x} = \alpha\,\mathrm{senh}(x+\beta)$$
$$2e^x - 5e^{-x} = 2\sqrt{10}.\mathrm{senh}\left(x + \ln\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Capítulo 13 2016.1

13.1 1ª Prova – 22 de Julho de 2016

***Questão* 1.**

$a)$ *Mostre que o limite* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-kx+k-1}{x^2+x-2}$ *existe para qualquer que seja o número* k *e determine seu valor em função de* k.

$b)$ *Assuma que* $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ *existe e* $\dfrac{x^2+5x+6}{x+3}\le\dfrac{f(x)}{x^2}\le\dfrac{2x^2+11x+15}{x+3}$. *Encontre* $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

***Questão* 2.**

$a)$ *Mostre que a equação* $2^x - x = 1{,}6$ *admite pelo menos duas raízes reais.*

$b)$ *Determine as assíntotas horizontais, caso existam, do gráfico da função definida por*

$$f(x)=2^{\left(\frac{3x-5}{\sqrt[4]{x^4-x^3}}\right)}$$

***Questão* 3.**

$a)$ *Em quais pontos do intervalo* $[0,2\pi]$, *a função* $f(x)=[\![\cos x]\!]$ *é descontínua?*

$b)$ *Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de* $f(x)=\sqrt[3]{x}$, *no ponto em que* $x=8$?

***Questão* 4.** *Estude a continuidade da função* $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{4-\sqrt{x^2+7}}$.

***Questão* 5.** *Calcule*:

$a)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{12+\sqrt[3]{x}}-4}{x-64}$

***Questão* 1.**

$a)$ *Mostre que o limite* $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-kx+k-1}{x^2+x-2}$ *existe para qualquer que seja o número* k *e determine seu valor em função de* k.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-kx+k-1}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)-k(x-1)}{(x-1)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)-k(x-1)}{(x-1)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1-k)}{(x-1)(x+2)}\ ;\ \begin{array}{l} se\ x\to 1, então\ x\neq 1\\ \therefore\ x-1\neq 0.\end{array}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-k}{x+2}\ ;\end{aligned}$$

$*$ *Como o limite* $\lim_{x\to 1}(x^2+x+1-k)$ *existe e* $\lim_{x-1}(x+2)$ *existe, com* $\lim_{x-1}(x+2)\neq 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-k}{x+2} &= \frac{\lim_{x\to 1}(x^2+x+1-k)}{\lim_{x\to 1}(x+2)}\\ &= \frac{1^2+1+1-k}{1+2}\\ &= \frac{3-k}{3} = 1-\frac{k}{3}.\end{aligned}$$

Portanto, o limite em questão existe qualquer que seja o valor de k *e seu valor é dado por* $\left(1-\dfrac{k}{3}\right)$.

$b)$ *Assuma que* $\lim_{x\to -3} f(x)$ *existe e* $\dfrac{x^2+5x+6}{x+3}\leq\dfrac{f(x)}{x^2}\leq\dfrac{2x^2+11x+15}{x+3}$. *Encontre* $\lim_{x\to 3} f(x)$.

Seja $g(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x+3}$ *e* $h(x)=\dfrac{2x^2+11x+15}{x+3}$, *então*

$$g(x)\leq\frac{f(x)}{x^2}\leq h(x)$$

$$\lim_{x\to -3} g(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+3)}=\lim_{x\to -3}(x+2)=-3+2=-1$$

$$\lim_{x\to -3} h(x)=\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+11x+15}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(2x+5)}{(x+3)}=\lim_{x\to -3}(2x+5)=-6+5=-1$$

Pelo Teorema do Confronto, se $g(x)\leq\dfrac{f(x)}{x^2}\leq h(x)$ *quando* x *está próximo a* -3 *(exceto possivelmente em* -3*) e* $\lim_{x\to -3} g(x)=\lim_{x\to -3} h(x)=-1$, *então*

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{x^2}=-1$$

Assumindo que $\lim_{x\to-3} f(x)$ *existe e* $\lim_{x\to-3} x^2$ *existe, com* $\lim_{x\to-3} x^2 \neq 0$, *temos*:

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\lim_{x\to-3} f(x)}{\lim_{x\to-3} x^2}$$
$$\frac{\lim_{x\to-3} f(x)}{\lim_{x\to-3} x^2}=-1$$
$$\lim_{x\to-3} f(x)=-\lim_{x\to-3} x^2$$
$$\lim_{x\to-3} f(x)=-9$$

***Questão* 2.**

$a)$ *Mostre que a equação* $2^x - x = 1{,}6$ *admite pelo menos duas raízes reais.*

Seja $f(x)=2^x-x$, *definida como uma diferença de funções contínuas em* $\mathbb{R}$, *logo* f *é contínua em* $\mathbb{R}$.

$f(-2)=2^{-2}-(-2)=\frac{1}{4}+2=2{,}25>1{,}6$
$f(0)=2^0-0=1-0=1<1{,}6$
$f(2)=2^2-2=4-2=2>1{,}6$

Como f *é contínua em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua nos intervalos fechados* $[-2{,}0]$ *e* $[0{,}2]$, *e* $1{,}6$ *é um número entre* $f(-2)$ *e* $f(0)$, *como também é um número entre* $f(0)$ *e* $f(2)$, *então existem números* c *e* d, *com* $c\in(-2{,}0)$ *e* $d\in(0{,}2)$ *tais que* $f(c)=f(d)=1{,}6$.

Logo, a equação $2^x-x=1{,}6$ *admite pelo menos duas raízes reais.*

$b)$ *Determine as assíntotas horizontais, caso existam, do gráfico da função definida por*

$$f(x)=2^{\left(\frac{3x-5}{\sqrt[4]{x^4-x^3}}\right)}$$

Domínio da função f: $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\ \ e\ x>1\}$

Seja $g(x)=2^x$ *e* $h(x)=\dfrac{3x-5}{\sqrt[4]{x^4-x^3}}$, *então* $f(x)=g\big(h(x)\big)$.

Dizemos que a reta $y=L$ *é uma assíntota horizontal da curva* $y=f(x)$ *se* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ *ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Como f *é uma função composta, temos*:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{\sqrt[4]{x^4-x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt[4]{x^4\left(1-\frac{1}{x}\right)}} \;;\; \sqrt[4]{x^4} = |x|$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}} \;;\; se\ x \to +\infty, então\ |x| = x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{5}{x}}{\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty} 3 - \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x}}{\sqrt[4]{\lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}} = \frac{3-0}{\sqrt[4]{1-0}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Como a função g é contínua em $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ e $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 3$, então $\lim_{x\to+\infty} g(h(x)) = g\left(\lim_{x\to+\infty} h(x)\right)$. Sendo $f(x) = g(h(x))$, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(h(x)) = g\left(\lim_{x\to+\infty} h(x)\right) = g(3) = 2^3 = 8.$$

Portanto, a reta $y = 8$ é uma assíntota horizontal do gráfico da curva $y = f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{\sqrt[4]{x^4-x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt[4]{x^4\left(1-\frac{1}{x}\right)}} \;;\; \sqrt[4]{x^4} = |x|$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}} \;;\; se\ x \to -\infty, então\ |x| = -x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{-x\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{3-\frac{5}{x}}{\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}}$$

$$= -\frac{\lim_{x\to-\infty} 3 - \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x}}{\sqrt[4]{\lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}}} = -\frac{3-0}{\sqrt[4]{1-0}} = \frac{3}{1} = -3.$$

Utilizando a propriedade já mencionada anteriormente, obtemos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g\big(h(x)\big) = g\left(\lim_{x\to-\infty} h(x)\right) = g(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

$Portanto, a\ reta\ y = \frac{1}{8}$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ do\ gráfico\ da\ curva\ y = f(x).$

Questão 3.

$a)\ Em\ quais\ pontos\ do\ intervalo\ [0,2\pi], a\ função\ f(x) = [\![\cos x]\!]$ é $descontínua?$

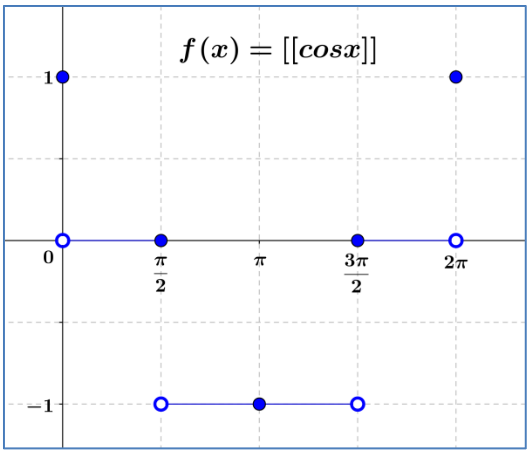
$Analisando\ a\ função \cos x\ no\ intervalo\ (0,2\pi), temos:$

$Se\ x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), então\ 0 < \cos x < 1\ e, portanto, [\![\cos x]\!] = 0.$
$Se\ x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \cup \left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right), então -1 < \cos x < 0\ e, portanto, [\![\cos x]\!] = -1.$

$Com\ essa\ análise, já\ temos\ que\ f$ é $contínua\ em\ \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \cup \left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right).$

$Analisando\ a\ continuidade\ de\ f\ em\ x = \left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\right\}, temos:$
$1)\ f(0) = 1\ \ e\ \ \lim_{x\to0^+} f(x) = 0. Portanto, f$ é $descontínua$ à $direita\ de\ 0.$
$2) f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ ;\ \ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -1\ e\ \ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0. Portanto, \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\ \nexists.$
$Logo, f$ é $descontínua\ em\ \frac{\pi}{2}.$
$3)\ f(\pi) = -1\ e\ \lim_{x\to\pi} f(x) = -1. Logo, f$ é $contínua\ em\ \pi.$
$4)\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0;\ \ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+} f(x) = 0\ e\ \ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} f(x) = -1. Portanto,\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} f(x)\ \nexists.$
$Logo, f$ é $descontínua\ em\ \frac{3\pi}{2}.$
$5)\ f(2\pi) = 1\ e\ \ \lim_{x\to2\pi^-} f(x) = 0. Portanto, f$ é $descontínua$ à $esquerda\ de\ 2\pi.$

$Concluimos\ que\ f$ é $descontínua\ em\ x = \left\{0,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},2\pi\right\}.$



$b)$ *Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de* $f(x) = \sqrt[3]{x}$, *no ponto em que* $x = 8$?

Ponto $P\big(8, f(8)\big) = (8,2)$.

Equação da reta tangente ao gráfico de f *no ponto* P:

$$y - 2 = m(x - 8)$$

Onde m é o coeficiente angular da reta tangente, dado pelo valor numérico da função derivada de f *no ponto* $x = 8$. *Pela definição de derivada de uma função num ponto* $x = a$, *temos*:

$$m = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Fazendo $x = a + h$, *se* $h \to 0$, *então* $x \to a$. *Ajustando o limite, temos*:

$$m = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

No ponto de abscissa $x = 8$ ...

$$\begin{aligned} m = f'(8) = \lim_{x \to 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} &= \lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} \;;\quad x - 8 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - (2)^3 \\ &= \lim_{x \to 8} \frac{\left(\sqrt[3]{x} - 2\right)}{\left(\sqrt[3]{x} - 2\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right)} \\ &= \lim_{x \to 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} \\ &= \frac{\lim_{x \to 8} 1}{\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x^2} + 2\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x} + \lim_{x \to 8} 4} = \frac{1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Logo, a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ *no ponto em que* $x = 8$ é:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{1}{12}(x - 8) \\ y &= \frac{1}{12}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Questão 4. *Estude a continuidade da função* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{4 - \sqrt{x^2 + 7}}$.

Considerações iniciais: $\sqrt{x^2 + 7} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{x^2 + 16} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 4 - \sqrt{x^2 + 7} &\neq 0 \\ \sqrt{x^2 + 7} &\neq 4 \\ x^2 + 7 &\neq 16 \end{aligned}$$

$$x^2 \neq 9$$
$$\therefore x \neq \pm 3$$

Domínio da função f:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3 \; e \; x \neq 3\}$$

f é uma função racional e, portanto, f é contínua onde estiver definida, ou seja, f é contínua em seu domínio.

Portanto, f é contínua em $(-\infty, -3) \cup (-3,3) \cup (3, +\infty)$.

Analisando as descontinuidades que ocorrem em -3 e 3, uma vez que a função f não está definida nesses valores.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{4-\sqrt{x^2+7}} &= \lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{4-\sqrt{x^2+7}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+16}+5}{\sqrt{x^2+16}+5} \\
&= \lim_{x \to -3} \frac{x^2+16-25}{\left(4-\sqrt{x^2+7}\right)\left(\sqrt{x^2+16}+5\right)} \\
&= \lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{\left(4-\sqrt{x^2+7}\right)\left(\sqrt{x^2+16}+5\right)} \\
&= \lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{\left(4-\sqrt{x^2+7}\right)\left(\sqrt{x^2+16}+5\right)} \cdot \frac{4+\sqrt{x^2+7}}{4+\sqrt{x^2+7}} \\
&= \lim_{x \to -3} \frac{(x^2-9)\left(4+\sqrt{x^2+7}\right)}{(16-x^2-7)\left(\sqrt{x^2+16}+5\right)} \\
&= \lim_{x \to -3} \frac{(x^2-9)\left(4+\sqrt{x^2+7}\right)}{-(x^2-9)\left(\sqrt{x^2+16}+5\right)} \\
&= \lim_{x \to -3} -\frac{4+\sqrt{x^2+7}}{\sqrt{x^2+16}+5} \\
&= -\frac{\lim_{x \to -3} 4 + \lim_{x \to -3} \sqrt{x^2+7}}{\lim_{x \to -3} \sqrt{x^2+16} + \lim_{x \to -3} 5} \\
&= -\frac{4+4}{5+5} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

$*$ *Obs: se $x \to -3$, então $x \neq -3$. Logo, $x^2 \neq 9 \therefore x^2 - 9 \neq 0$.*

A observação acima também é válida se $x \to 3$ e, portanto, $\lim_{x \to 3} f(x) = -\frac{4}{5}$.

Uma vez que $\lim_{x \to 3} f(x)$ e $\lim_{x \to -3} f(x)$ existem, embora a função não esteja definida em -3 e 3, concluimos que a função f possui descontinuidade removível nesses pontos.

***Questão* 5.** *Calcule*:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}_{\downarrow\ +\infty}}=0.$$

$$b)\ \lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{12+\sqrt[3]{x}}-4}{x-64}=\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{12+\sqrt[3]{x}}-4}{x-64}\cdot\frac{\sqrt{12+\sqrt[3]{x}}+4}{\sqrt{12+\sqrt[3]{x}}+4}$$

$$=\lim_{x\to 64}\frac{12+\sqrt[3]{x}-16}{(x-64)\left(\sqrt{12+\sqrt[3]{x}}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{(x-64)\left(\sqrt{12+\sqrt[3]{x}}+4\right)};\quad x-64=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-(4)^3$$

$$=\lim_{x\to 64}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-4\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-4\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)\left(\sqrt{12+\sqrt[3]{x}}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 64}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16\right)\left(\sqrt{12+\sqrt[3]{x}}+4\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{64^2}+4\sqrt[3]{64}+16\right)\left(\sqrt{12+\sqrt[3]{64}}+4\right)}$$

$$=\frac{1}{(16+16+16)(4+4)}=\frac{1}{(48)(8)}=\frac{1}{384}$$

13.2 1ª Prova – 23 de Julho de 2016

$\boldsymbol{Quest}$ão $\mathbf{1}$.

$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$;

$b)\ \lim_{x\to 0}\left[x.\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)}\right]$.

$\boldsymbol{Quest}$ão $\mathbf{2}$.

$a)$ *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que* $x^5-6x^4+8=0$ *tem pelo menos duas raízes em* $(-2,2)$.

$b)$ *Encontre as assíntotas verticais e horizontais, caso existam, do gráfico da função*

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$\boldsymbol{Quest}$ão $\mathbf{3}$.

$a)$ *Determine se a função* $f(x)=[\![2^x]\!]$ é *contínua em* $x=1$.

$b)$ *Encontre uma equação para a reta que tangencia o gráfico de* $f(x)=\sqrt{|x|}$, *no ponto em que* $x=-4$.

$\boldsymbol{Quest}$ão $\mathbf{4}$. *Considere a função* $f(x)=\dfrac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^3-1}$.

$a)$ *Estude a continuidade de* f.

$b)$ *A descontinuidade, por acaso encontrada na função* f, é *removível? Em caso positivo, redefina* f *para que a mesma se torne contínua em* $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{Quest}$ão $\mathbf{5}$. *Calcule*:

$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{4x-5}$

$b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x\sqrt{1+x}}-\frac{2}{x}\right)$

***Questão* 1.**

$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1};\ \textit{Indeterminação do tipo}\ "\frac{0}{0}"$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}.\frac{\sqrt{6-x}+2}{\sqrt{6-x}+2}\right]$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{6-x-4}{(\sqrt{3-x}-1)(\sqrt{6-x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)}{(\sqrt{3-x}-1)(\sqrt{6-x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{(2-x)}{(\sqrt{3-x}-1)(\sqrt{6-x}+2)}.\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{3-x}+1}\right]$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(\sqrt{3-x}+1)}{(3-x-1)(\sqrt{6-x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(\sqrt{3-x}+1)}{(2-x)(\sqrt{6-x}+2)};\ \textit{se}\ x\to 2,\textit{então}\ x\neq 2\ \therefore x-2\neq 0.$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 2}\sqrt{3-x}+\lim_{x\to 2}1}{\lim_{x\to 2}\sqrt{6-x}+\lim_{x\to 2}2}$$
$$=\frac{\sqrt{3-2}+1}{\sqrt{6-2}+2}=\frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\left[x.\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)}\right].$$

$\forall x\in\mathbb{R}^*,\textit{temos}:$

$$0\leq \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1$$

Como a base da função exponencial acima é tal que $0<\frac{1}{2}<1$, *então esta função é decrescente e, portanto, invertemos o sentido da desigualdade. Logo,*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$$

Reescrevendo a desigualdade ...

$$\frac{1}{2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)}\leq 1$$

Se $x\to 0^+$, *então* $x>0$ *e, portanto,*

$$\frac{x}{2} \leq x.\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\right)} \leq x$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} = 0 \;\; e \;\; \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Pelo Teorema do Confronto, se $\frac{x}{2} \leq x.\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\right)} \leq x$ *quando* x *está próximo a* 0 *pela direita de* 0 *e* $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$*, então* $\lim_{x\to 0^+} \left[x.\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\right)}\right] = 0.$

Se $x \to 0^-$*, então* $x < 0$ *e, portanto,*

$$x \leq x.\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{2} = 0 \;\; e \;\; \lim_{x\to 0^-} x = 0.$$

Pelo Teorema do Confronto, se $x \leq x.\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{x}{2}$ *quando* x *está próximo a* 0 *pela esquerda de* 0 *e* $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{2} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$*, então* $\lim_{x\to 0^-} \left[x.\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\right)}\right] = 0.$

Como os limites laterais existem e são iguais, então o limite existe e

$$\lim_{x\to 0} \left[x.\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)}\right] = 0$$

***Questão* 2.**

a) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que $x^5 - 6x^4 + 8 = 0$ *tem pelo menos duas raízes em* $(-2,2)$.

Seja $f(x) = x^5 - 6x^4 + 8$*, uma função polinomial e, portanto, contínua em* $\mathbb{R}$.
$\cdot\, f(-2) = (-2)^5 - 6(-2)^4 + 8 = -32 - 6 \times 16 + 8 = -32 - 96 + 8 = -120.$
$\cdot\, f(0) = 0^5 - 6(0)^4 + 8 = 0 - 0 + 8 = 8.$
$\cdot\, f(2) = 2^5 - 6(2)^4 + 8 = 32 - 6 \times 16 + 8 = 32 - 96 + 8 = -46.$

Como f *é uma função contínua em* $\mathbb{R}$*, então* f *é contínua nos intervalos fechados* $[-2,0]$ *e* $[0,2]$.

Pelo Teorema do Valor Intermediário, se f *é uma função contínua nos intervalos fechados* $[-2,0]$ *e* $[0,2]$ *e* 0 *é um número entre* $f(-2)$ *e* $f(0)$*, assim como* 0 *é um número entre* $f(0)$ *e* $f(2)$*, então existem números* c *e* d*, com* $c \in (-2,0)$ *e* $d \in (0,2)$ *tais que* $f(c) = f(d) = 0$*. Logo, a equação* $x^5 - 6x^4 + 8 = 0$ *tem pelo menos duas raízes reais em* $(-2,2)$.

$b)$ *Encontre as assíntotas verticais e horizontais, caso existam, do gráfico da função*

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Domínio da função f:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \ e \ x \neq 1\}$$

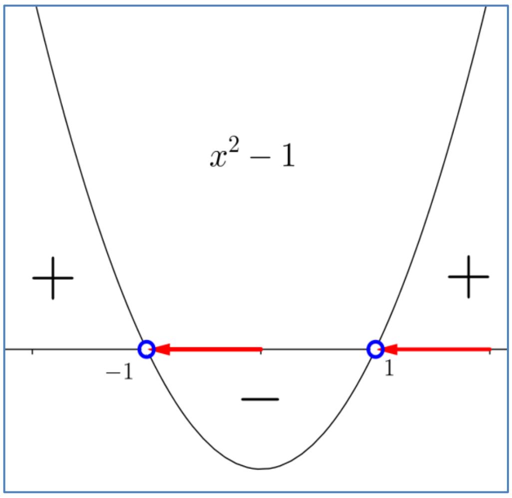
Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da curva $y = f(x)$ se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Pela definição de continuidade de uma função f em um número a, estas assíntotas ocorrem nas descontinuidades da função f. Pela análise do domínio da função, f é descontínua em -1 e 1. Logo,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\overbrace{x}^{\to -1}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2 - 1}}_{\to 0^-}} = +\infty$$

Portanto, a reta $x = -1$ é assíntota vertical do gráfico da curva $y = f(x)$.



$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{x}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2 - 1}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

Portanto, a reta $x = -1$ é assíntota vertical do gráfico da curva $y = f(x)$.

Dizemos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \ ; \quad \sqrt[n]{x^n} = x \ (n \ ímpar)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{1 - \frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

pois $\sqrt[3]{x} \to +\infty$ *e* $\sqrt[3]{1 - 1/x^2} \to 1$ *quando* $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \ ; \quad \sqrt[n]{x^n} = x \ (n \ ímpar)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{1-\frac{1}{x^2}}}=-\infty$$

$pois\ \sqrt[3]{x}\to-\infty\ \ e\ \sqrt[3]{1-1/x^2}\to 1\ quando\ x\to-\infty$

$Logo, o\ gráfico\ da\ curva\ y=f(x)\ não\ possui\ assíntotas\ horizontais.$

***Questão* 3.**

$a)\ Determine\ se\ a\ função\ f(x)=[\![2^x]\!]$ é $contínua\ em\ x=1.$

$Uma\ função\ f$ é $contínua\ no\ número\ a\ se, somente\ se, \lim_{x\to a}f(x)=f(a).$
$Para\ tal\ afirmação, f(a)\ e\ \lim_{x\to a}f(x)\ \ devem\ existir.$

$Analisando\ a\ continuidade\ da\ função\ f\ em\ x=1, temos:$

$f(1)=[\![2^1]\!]=[\![2]\!]=2.$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}[\![2^x]\!]=\lim_{x\to1^+}2=2.$
$*\ Se\ x\to1^+, então\ 2^x\to2^+\ e, portanto, [\![2^x]\!]=2.$

$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}[\![2^x]\!]=\lim_{x\to1^-}1=1.$
$*\ Se\ x\to1^-, então\ 2^x\to2^-\ e, portanto, [\![2^x]\!]=1.$

$Como\ \ \lim_{x\to1^+}f(x)\neq\lim_{x\to1^-}f(x)\ , então\ \lim_{x\to1}f(x)\ \nexists.$

$Portanto, f$ é $descontínua\ em\ x=1. A\ saber, f\ tem\ descontinuidade\ de\ salto$
$(1^{\text{a}}\ espécie)\ em\ x=1\ , uma\ vez\ que\ os\ limites\ laterais\ de\ f\ em\ 1\ existem$
$e\ são\ distintos.$

$b)\ Encontre\ uma\ equação\ para\ a\ reta\ que\ tangencia\ o\ gráfico\ de\ f(x)=\sqrt{|x|},$
$no\ ponto\ em\ que\ x=-4.$

$Ponto\ P\big(-4, f(-4)\big)\ ;\quad P(-4,2)$

$Verifica-se\ que\ o\ ponto\ P=(-4,2)\ pertence$ à $curva\ f(x)=\sqrt{|x|}. Logo, o$
$coeficiente\ angular\ \mathrm{m}\ da\ reta\ tangente$ à $curva\ no\ ponto\ de\ abscissa\ x=-4$
é $dado\ por:$

$$m=\lim_{x\to-4}\frac{f(x)-f(-4)}{x-(-4)}=\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{|x|}-2}{x+4}$$
$$=\lim_{x\to-4}\left[\frac{\sqrt{|x|}-2}{x+4}.\frac{\sqrt{|x|}+2}{\sqrt{|x|}+2}\right]$$

$$= \lim_{x\to -4} \frac{|x|-4}{(x+4)\left(\sqrt{|x|}+2\right)}\ ; se\ x \to -4, então\ |x| = -x.$$

$$= \lim_{x\to -4} \frac{-x-4}{(x+4)\left(\sqrt{|x|}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to -4} \frac{-(x+4)}{(x+4)\left(\sqrt{|x|}+2\right)}\ ; se\ x \to -4, então\ x \neq -4\ \therefore x+4 \neq 0.$$

$$= \lim_{x\to -4} \frac{-1}{\sqrt{|x|}+2} = \frac{-1}{\sqrt{|-4|}+2} = \frac{-1}{\sqrt{4}+2} = \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

Equação da reta tangente no ponto $P(-4,2)$ *e coeficiente angular* $m = -\frac{1}{4}$:

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x+4)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 1$$

***Questão* 4.** *Considere a função* $f(x) = \dfrac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^3-1}$.

$a)$ *Estude a continuidade de* f.

f *é uma função a priori racional, cujo numerador é uma diferença de funções constante e raiz, e o denominador é uma função polinomial. Logo,* f *será dita contínua onde estiver definida, ou seja, em seu domínio.*

Domínio de f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 \neq 0\}$
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

Logo, f *é contínua em* $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, *ou ainda,* f *é contínua em* $\mathbb{R} - \{1\}$.
Com isso, concluímos que f *é descontínua apenas em* $x = 1$.

$b)$ *A descontinuidade, por acaso encontrada na função* f, *é removível? Em caso positivo, redefina* f *para que a mesma se torne contínua em* $\mathbb{R}$.

A descontinuidade é dita removível se a função f *é descontínua em um ponto* a *mas* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe. Neste caso podemos obter uma função* f^* *contínua em* a, *definindo* f *de modo que sejam satisfeitas as três condições da definição:*

1ª) $f(a)$ *deve existir*;
2ª) $\lim_{x\to a} f(x)$ *deve existir*;
3ª) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Analisando a descontinuidade em $x = 1$, *temos*:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^3-1}\cdot\frac{4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}}{4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{8-(x^2+7)}{(x^3-1)\left(4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{(x^3-1)\left(4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)\left(4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}\right)}$$

Se $x \to 1$, *então* $x \neq 1$
$\therefore x-1 \neq 0$ $\Rightarrow$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-(x+1)}{(x^2+x+1)\left(4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}\right)}$$

$$= \frac{-\lim_{x\to 1}(x+1)}{\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)\times\lim_{x\to 1}\left(4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}\right)}$$

$$= \frac{-2}{(1^2+1+1)\left(4+2\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8^2}\right)} = \frac{-2}{(3)(12)} = -\frac{1}{18}.$$

Como a função f *não está definida em* 1 *e* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *existe, então a descontinuidade em* 1 *é removível. Neste caso, podemos redefinir a função* f *de tal modo que, considerando que* f *é descontínua apenas em* 1, f *seja contínua em* $\mathbb{R}$. *Logo,*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^3-1}, & se\ x \neq 1 \\ -\dfrac{1}{18} & , se\ x = 1 \end{cases}$$

***Questão* 5.** *Calcule*:

$a)$ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{4x-5}$; *Indeterminação* "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{4x-5} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(4-\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{x\left(4-\frac{5}{x}\right)}$$; *se* $x\to\infty$, *então* $|x| = x$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{x\left(4-\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{x\left(4-\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{4-\frac{5}{x}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}\left(4-\frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty}3+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}4-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}};$$

$$\frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty}3+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}4-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{3+0}}{4-0} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$b) \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x\sqrt{1+x}}-\dfrac{2}{x}\right)$; $Indeterminação\ "\infty-\infty"$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x\sqrt{1+x}}-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1+x}}\ ;Indeterminação\ "\frac{0}{0}"$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1+x}}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2-2\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1+x}}\cdot\frac{2+2\sqrt{1+x}}{2+2\sqrt{1+x}}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\frac{4-4(1+x)}{x\sqrt{1+x}\left(2+2\sqrt{1+x}\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-4x}{2x\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{1+x}\right)}\ ;\ \ se\ x\to 0, então\ x\neq 0.\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{1+x}\right)}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(-2)}{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x}\times\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1+x}\right)}\\&=\frac{-2}{\sqrt{1+0}\times\left(1+\sqrt{1+0}\right)}=\frac{-2}{\sqrt{1}\times\left(1+\sqrt{1}\right)}=\frac{-2}{2}=-1.\end{aligned}$$

13.3 2ª Prova – 19 de Agosto de 2016

Questão 1

$a)$ *Use a definição para estudar a diferenciabilidade da função*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{tg} x\,, & x \geq 0 \\ -\operatorname{tg} x\,, & x < 0 \end{cases}$$

em $x = 0.$

$b)$ *Se* f', g', f'' *e* g'' *existem e se* $h = f \circ g$, *determine* $h''(2)$ *sabendo que* $g(2) = 4$, $g'(2) = 6, g''(2) = 3, f'(4) = 8$ *e* $f''(4) = 1.$

Questão 2

$a)$ *Determine a equação da reta normal à curva* $y = 2^x.(x^2 - 1)$ *no ponto em que* $x = 1.$

$b)$ *Enuncie e demonstre a regra da derivada do quociente de duas funções.*

Questão 3.

$a)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(3x)}{x.e^{\operatorname{tg} x}}.$

$b)$ *Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$, *no ponto* $\left(\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{2}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Questão 4

$a)$ *Dada a curva* $\sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\cos y} = 1$, *determine em que ponto(s) do intervalo* $[0, \pi]$ *a reta tangente é horizontal.*

$b)$ *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável tal que* $f'(1) = 2$ *e* $f(1) = 3.$ *Sabendo que* $F(x) = f(3^x)$, *encontre uma equação da reta normal à curva* $y = F(x)$ *no ponto em que* $x = 0.$

Questão 5. *Estude a diferenciabilidade da função* $f(x) = |x^2 - 9|.$

Questão 1

a) Use a definição para estudar a diferenciabilidade da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ -\operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$$

em $x = 0$.

Para estudar a diferenciabilidade da função f em $x = 0$, primeiramente analisamos a continuidade de f em 0. Logo,

$f(0) = 1 + \operatorname{tg} 0 = 1 + 0 = 1.$
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 + \operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg} 0 = 1 + 0 = 1.$
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-\operatorname{tg} x) = -\operatorname{tg} 0 = 0.$

Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$ então dizemos que $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe e, portanto, f não é contínua em $x = 0$. Consequentemente, f não é diferenciável em $x = 0$.

Análise complementar

Caso analisássemos a diferenciabilidade por definição de derivadas laterais, teríamos:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \operatorname{tg} x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos x}$$

$*$ *Limite Fundamental Trigonométrico*: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\operatorname{tg} x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\overbrace{-\operatorname{tg} x - 1}^{-1}}{\underbrace{x}_{0^-}} = +\infty$$

Como $f'_-(0)$ não existe, então f não é diferenciável em $x = 0$.

Informação complementar

Caso as derivadas laterais existissem e fossem iguais, ainda sim, a verificação da continuidade seria necessária, caso não verificássemos logo de início.

$b)$ *Se* f', g', f'' *e* g'' *existem e se* $h = f \circ g$*, determine* $h''(2)$ *sabendo que* $g(2) = 4$, $g'(2) = 6, g''(2) = 3, f'(4) = 8$ *e* $f''(4) = 1$.

$$h(x) = (f \circ g)(x) \Rightarrow h(x) = f\big(g(x)\big)$$

Derivando usando a Regra da Cadeia, obtemos:

$$h'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

$h''(x) = \left[f''\big(g(x)\big).g'(x)\right].g'(x) + f'\big(g(x)\big).g''(x)$
$h''(x) = f''\big(g(x)\big).[g'(x)]^2 + f'\big(g(x)\big).g''(x)$
$h''(2) = f''\big(g(2)\big).[g'(2)]^2 + f'\big(g(2)\big).g''(2)$
$h''(2) = f''(4).[6]^2 + f'(4).3$
$h''(2) = 1 \times 36 + 8 \times 3$
$h''(2) = 36 + 24$
$h''(2) = 60.$

Questão 2

$a)$ *Determine a equação da reta normal à curva* $y = 2^x.(x^2 - 1)$ *no ponto em que* $x = 1$.

Ponto de abscissa $x = 1$, $\quad P(1,0)$.

$$\frac{dy}{dx} = y' = (2^x.\ln 2).(x^2 - 1) + 2^x.(2x)$$

No ponto de abscissa $x = 1$*, temos*:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 2^1.\ln 2\,.(1^2 - 1) + 2^1.(2)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 4 \ (coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente)$$

Logo, o coeficiente angular da reta normal é $m_n = -\frac{1}{4}$.

Equação da reta normal no ponto P:

$$y - y_0 = m_n(x - x_0)$$
$$y - 0 = -\frac{1}{4}(x - 1)$$
$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$b)$ *Enuncie e demonstre a regra da derivada do quociente de duas funções.*

Se $f(x)$ *e* $g(x)$ *são funções deriváveis, então a função* $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$*, tem derivada* *dada pela Regra do Quociente, onde a derivada de um quociente é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador. Isto é,*

$$h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Pela definição de derivada …

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x).g(x) - f(x).g(x+\Delta x)}{g(x).g(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x) - f(x).g(x+\Delta x)}{\Delta x[g(x).g(x+\Delta x)]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x) - f(x).g(x+\Delta x) + f(x).g(x) - f(x).g(x)}{\Delta x[g(x).g(x+\Delta x)]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x[g(x).g(x+\Delta x)]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} g(x) - f(x)\frac{[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}}{[g(x).g(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{g(x).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x).\lim_{\Delta x \to 0}[g(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{g(x).[g(x)]}$$

$$h'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

***Questão* 3.**

a) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x.e^{\operatorname{tg} x}}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x.e^{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x.e^{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1 + \cos(3x)}{1 + \cos(3x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2(3x)}{x.e^{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{1 + \cos(3x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2(3x)}{x.e^{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{1 + \cos(3x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{x} \cdot \frac{1}{[1 + \cos(3x)]e^{\operatorname{tg} x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2(3x)}{9x^2} \cdot \frac{9x}{[1+\cos(3x)]e^{\mathrm{tg}\,x}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\mathrm{sen}(3x)}{3x}\right)^2 \cdot \frac{9x}{(1+\cos(3x))e^{\mathrm{tg}\,x}} \right]$$

$*$ *Supondo que o limite do produto é o produto dos limites, temos:*

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{sen}(3x)}{3x}\right)^2 \times \lim_{x\to 0} \frac{9x}{(1+\cos(3x)).e^{\mathrm{tg}\,x}}$$

1) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{sen}(3x)}{3x}\right)^2 = \left[\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\,3x}{3x}\right]^2 = 1^2 = 1.$

$*$ *Limite Fundamental Trigonométrico*: $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(kx)}{kx} = 1.$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{9x}{[1+\cos(3x)].e^{\mathrm{tg}\,x}} = \frac{\lim_{x\to 0} 9x}{\lim_{x\to 0}[(1+\cos(3x)).e^{\mathrm{tg}\,x}]} = \frac{9\times 0}{(1+\cos 0)e^0} = \frac{0}{2} = 0.$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x.e^{\mathrm{tg}\,x}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{sen}(3x)}{3x}\right)^2 \times \lim_{x\to 0} \frac{9x}{(1+\cos(3x)).e^{\mathrm{tg}\,x}} = 1\times 0 = 0.$$

b) Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da função
$f(x) = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\,x - \mathrm{tg}\,x + x$, *no ponto* $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$. $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Verificação se o ponto pertence ao gráfico da função:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}\times 1^3 - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \ (Pertence!)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3.\mathrm{tg}^2\,x).\sec^2 x - \sec^2 x + 1$$

No ponto de abscissa $x = \frac{\pi}{4}$, *temos:*

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(3.\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}\right).\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}(3\times 1^2).\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - 2 + 1$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - \left(-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = 1\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$y + \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4}$$
$$y = x - \frac{2}{3}$$

Questão 4

$a)\ Dada\ a\ curva\ \sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\cos y} = 1, determine\ em\ que\ ponto(s)\ do\ intervalo$ $[0, \pi]\ a\ reta\ tangente\ é\ horizontal.$

$Derivando\ implicitamente\ a\ expressão\ da\ curva, temos$:

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\operatorname{sen} x}\right] + \frac{d}{dx}\left[\sqrt{\cos y}\right] = \frac{d}{dx}(1)$$
$$\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} - \frac{\operatorname{sen} y}{2\sqrt{\cos y}}.y' = 0$$
$$y' = \frac{\cos x.\sqrt{\cos y}}{\operatorname{sen} y.\sqrt{\operatorname{sen} x}}\ ;\ \operatorname{sen} y \neq 0\ e\ \operatorname{sen} x \neq 0$$

$Onde\ a\ reta\ tangente\ é\ horizontal, o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente\ é\ nulo.$ $Isto\ é, m = y' = 0.$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \therefore x = \frac{\pi}{2}\ ou\ y = \frac{\pi}{2}.$$

$Ponto\ em\ questão$:

$$\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\cos y} = 1$$
$$1 + \sqrt{\cos y} = 1$$
$$\sqrt{\cos y} = 0$$
$$\cos y = 0$$
$$\therefore y = \frac{\pi}{2}$$

$Ponto\ P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

$*\ Note\ que\ a\ verificação\ de\ y = \frac{\pi}{2}\ seria\ redundante. Ou\ seja, só\ existe\ um\ ponto$ $onde\ a\ reta\ tangente\ é\ horizontal, o\ ponto\ P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

$b)\ Seja\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ uma\ função\ diferenciável\ tal\ que\ f'(1) = 2\ e\ f(1) = 3. Sabendo$ $que\ F(x) = f(3^x), encontre\ uma\ equação\ da\ reta\ normal\ à\ curva\ y = F(x)\ no$ $ponto\ em\ que\ x = 0.$

$Ponto\ em\ questão:\ P\big(0, F(0)\big)\,; F(0) = f(3^0) = f(1) = 3.\ \ ponto\ P(0,3)$

$F'(x) = f'(3^x).3^x.\ln 3$
$F'(0) = f'(3^0).3^0.\ln 3$
$F'(0) = f'(1).\ln 3$
$F'(0) = 2.\ln 3 = \ln 3^2 = \ln 9$ ($coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente!$)

$Coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal\ m_n = -\dfrac{1}{\ln 9}.$

$Equação\ da\ reta\ normal\ no\ ponto\ P(0,3):$

$$y - y_0 = m_n(x - x_0)$$
$$y - 3 = -\frac{1}{\ln 9}(x - 0)$$
$$y = -\frac{1}{\ln 9}x + 3$$

$\boldsymbol{Questão\ 5}.$ $Estude\ a\ diferenciabilidade\ da\ função\ f(x) = |x^2 - 9|.$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & se\ x \le -3\ ou\ x \ge 3 \\ -(x^2 - 9), & se\ -3 < x < 3 \end{cases}$$

$Como\ f$ é $uma\ função\ definida\ por\ partes, como\ mostrada\ acima, e\ ambas\ as\ sentenças\ são\ funções\ polinomiais\ e, portanto, contínuas\ e\ diferenciáveis\ em$ $\mathbb{R}$, $então\ f$ é $diferenciável\ onde\ estas\ funções\ estão\ definidas.$ $Isto$ é, f é $diferenciável\ em\ (-\infty, -3) \cup (-3,3) \cup (3, +\infty).$

$Analisando\ a\ diferenciabilidade\ da\ função\ em\ x = -3\ e\ x = 3, temos:$

$*\ Em\ x = -3:$

$f(-3) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0.$

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-}(x^2 - 9) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0.$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} -(x^2 - 9) = -\lim_{x\to -3^+}(x^2 - 9) = -(9 - 9) = 0.$

$Como\ \lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^-} f(x)\ então\ \lim_{x\to -3} f(x)\ existe\ e, \lim_{x\to -3} f(x) = f(-3).$
$Logo, f$ é $contínua\ em\ x = -3.$

$$\begin{aligned} f'_-(-3) &= \lim_{x\to -3^-}\frac{f(x) - f(3)}{x - (-3)} = \lim_{x\to -3^-}\frac{x^2 - 9 - 0}{x + 3} \\ &= \lim_{x\to -3^-}\frac{x^2 - 9}{x + 3} \\ &= \lim_{x\to -3^-}\frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)}\ ; \quad Se\ x \to -3, então\ x \neq -3\ \ Logo, (x + 3) \neq 0. \\ &= \lim_{x\to -3^-}(x - 3) = -3 - 3 = -6. \end{aligned}$$

$$f'_+(-3) = \lim_{x\to -3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - (-3)} = -\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2 - 9 - 0}{x + 3}$$
$$= -\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$
$$= -\lim_{x\to -3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)} \; ; \quad \textit{Se } x \to -3, \textit{então } x \neq -3 \quad \textit{Logo}, (x+3) \neq 0.$$
$$= -\lim_{x\to -3^+} (x - 3) = -(-3-3) = 6.$$

Como $f'_-(-3) \neq f'_+(3)$, *então* f *não é derivável em* $x = -3$.

$*$ *Em* $x = 3$:

$f(3) = (3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0.$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} -(x^2 - 9) = -[(-3)^2 - 9] = -(9 - 9) = 0.$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x^2 - 9) = -\lim_{x\to -3^+} (x^2 - 9) = -(9 - 9) = 0.$$

Como $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$ *então* $\lim_{x\to 3} f(x)$ *existe e*, $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.
Logo, f *é contínua em* $x = 3$.

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 - 9 - 0}{x - 3}$$
$$= -\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$
$$= -\lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} \; ; \quad \textit{Se } x \to 3, \textit{então } x \neq 3 \quad \textit{Logo}, (x-3) \neq 0.$$
$$= -\lim_{x\to 3^-} (x + 3) = -(3+3) = -6.$$

$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 - 9 - 0}{x - 3}$$
$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$
$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} \; ; \quad \textit{Se } x \to 3, \textit{então } x \neq 3 \quad \textit{Logo}, (x-3) \neq 0.$$
$$= \lim_{x\to 3^+} (x + 3) = 3 + 3 = 6.$$

Como $f'_-(3) \neq f'_+(3)$, *então* f *não é derivável em* $x = 3$.

Portanto, f *é diferenciável em* $\mathbb{R} - \{-3,3\}$.

13.4 2ª Prova – 20 de Agosto de 2016

Questão 1

$a)$ *Caso exista, calcule a derivada da função*

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 3, & se\ x \geq 3 \\ \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4, & se\ x < 3 \end{cases}$$

em $x = 3$.

$b)$ *Seja* $y = 10^{1-\operatorname{sen} x}$. *Sabendo que* $y''(0) = K.(\ln 10)^2$, *determine o valor de* K.

Questão 2

$a)$ *Enuncie e demonstre a regra da derivada do produto de duas funções.*

$b)$ *Mostre que o gráfico da função* $y = \dfrac{e^x - 1}{x^2 + 1}$ *tem uma tangente horizontal.*
Mostrar que o gráfico de uma função $y = f(x)$ *tem uma tangente horizontal, é mostrar que existe algum* $x \in D(f)$ *tal que* $f'(x) = 0$.

Questão 3

$a)$ *Calcule* $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x^2 - (a+b)x + ab}, a \neq b.$

$b)$ *Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da função* $y = e^{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)}$ *no ponto* $(0,1)$.

Questão 4

$a)$ *Determine uma equação da reta normal à curva dada pela equação* $x^2y + \operatorname{sen} y = 2x$ *no ponto* $(1, 2\pi)$

$b)$ *Encontre o ponto do intervalo* $[0,1]$ *no qual a reta tangente ao gráfico de*

$$y = 2^{\operatorname{sen}(\pi x)} + \operatorname{sen}^3(\pi x)$$

é horizontal.

Questão 5. *Estude a diferenciabilidade da função*

$$f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), & x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 3, & se\ x > 1 \end{cases}$$

***Questão* 1**

$a)$ *Caso exista, calcule a derivada da função*

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 3, & se\ x \geq 3 \\ \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4, & se\ x < 3 \end{cases}$$

em $x = 3$.

Para estudar a diferenciabilidade da função f *em* $x = 3$, *primeiramente analisamos a continuidade de* f *em* 3. *Logo,*

$$f(3) = -\frac{4}{9}(3)^2 + \frac{8}{3}(3) - 3 = -4 + 8 - 3 = 1.$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 3\right) = -\frac{4}{9}(3)^2 + \frac{8}{3}(3) - 3 = -4 + 8 - 3 = 1.$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4\right) = \frac{2}{9}(3)^2 - \frac{4}{3}(3) + 4 = 2 - 4 + 4 = 2.$$

Como $\lim_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim_{x\to 3^-} f(x)$ *então dizemos que* $\lim_{x\to 3} f(x)$ *não existe e, portanto,* f *não é contínua em* $x = 3$. *Consequentemente,* f *não é diferenciável em* $x = 3$.

Analisando por derivadas laterais, teríamos:

$$\begin{aligned} f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+}\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x\to 3^+}\frac{-\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 3 - 1}{x - 3} \\ &= \lim_{x\to 3^+}\frac{-4x^2 + 24x - 36}{9(x - 3)} \\ &= \lim_{x\to 3^+}\frac{-4(x^2 - 6x + 9)}{9(x - 3)} \\ &= \lim_{x\to 3^+}\frac{-4(x - 3)^2}{9(x - 3)}\ ; \\ &= \lim_{x\to 3^+} -\frac{4}{9}(x - 3) = -\frac{4}{9}(3 - 3) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-}\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x\to 3^-}\frac{\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4 - 1}{x - 3} \\ &= \lim_{x\to 3^-}\frac{\overbrace{2x^2 - 12x + 27}^{\stackrel{9}{\uparrow}}}{\underbrace{9(x - 3)}_{\stackrel{\downarrow}{0^-}}} = -\infty. \end{aligned}$$

Como $f'_-(3)$ *não existe, então* f *não é diferenciável em* $x = 3$.

$b)$ *Seja* $y = 10^{1-\operatorname{sen} x}$. *Sabendo que* $y''(0) = K.(\ln 10)^2$, *determine o valor de* K.

Seja $u = 1 - \operatorname{sen} x$ *e* $y = f(u) = 10^u$. *Pela Regra da Cadeia, temos*:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$y' = 10^u . \ln u . (-\cos x)$$
$$y' = 10^{1-\operatorname{sen} x} . \ln 10\,(-\cos x)$$
$$y' = -\ln 10\,(10^{1-\operatorname{sen} x} . \cos x)$$
$$y'' = -\ln 10\,[10^{1-\operatorname{sen} x} . \ln 10 . (-\cos x) . \cos x + 10^{1-\operatorname{sen} x} . (-\operatorname{sen} x)]$$
$$y''(0) = -\ln 10\,[10^{1-\operatorname{sen} 0} . \ln 10 . (-\cos 0) . \cos 0 + 10^{1-\operatorname{sen} 0} . (-\operatorname{sen} 0)]$$
$$y''(0) = -\ln 10\,[-10 . \ln 10 + 0]$$
$$y''(0) = 10.(\ln 10)^2 = K.(\ln 10)^2$$

Portanto, $K = 10$.

Questão 2

$a)$ *Enuncie e demonstre a regra da derivada do produto de duas funções.*

Sejam $f(x)$ *e* $g(x)$ *funções deriváveis e* $h(x) = f(x).g(x)$, *então a derivada da função* $h(x)$ *é dada pela soma do produto da derivada da primeira função vezes a segunda com o produto da derivada da segunda função vezes a primeira. Isto é,*

$$h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Pela definição de derivada, temos:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x) + f(x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)].g(x+\Delta x) + f(x).[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.g(x+\Delta x) + f(x).\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \times \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + f(x) \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$
$$= f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

$$h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$b)$ *Mostre que o gráfico da função* $y = \dfrac{e^x - 1}{x^2 + 1}$ *tem uma tangente horizontal.*
Mostrar que o gráfico de uma função $y = f(x)$ *tem uma tangente horizontal, é mostrar que existe algum* $x \in D(f)$ *tal que* $f'(x) = 0$.

Domínio da função: $D(f) = \mathbb{R}$.

$$y' = f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2x(e^x - 1)}{(x^2+1)^2}$$

$Como\ (x^2+1) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, então$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2+1) - 2x(e^x-1) = 0$

$Seja\ g(x) = e^x(x^2+1) - 2x(e^x-1), onde\ g\ é\ uma\ função\ definida\ pela\ diferença$ $entre\ produtos\ de\ funções\ contínuas\ em\ \mathbb{R}\ e, portanto, g\ é\ contínua\ em\ \mathbb{R}.$

$Sabe - se\ ainda\ que\ g(0) = 1\ e\ g(-1) = \frac{4}{e} - 2. Se\ g\ é\ contínua\ em\ \mathbb{R}, então$ $g\ é\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [-1{,}0]\ e\ como\ 0\ é\ um\ número\ entre\ g(-1)\ e$ $g(0), pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário, existe\ algum\ x \in (-1{,}0)\ tal\ que$ $g(x) = 0.$

$De\ tal\ modo\ que\ g(x) = 0\ em\ algum\ x \in (-1{,}0)\ satisfaz\ a\ condição\ de\ que$ $f'(x) = 0\ para\ algum\ x \in (-1{,}0)\ e, portanto, a\ função\ y = \frac{e^x - 1}{x^2+1}\ possui\ uma$ $tangente\ horizontal.$

Questão 3

$a)\ Calcule\ \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x^2 - (a+b)x + ab}, a \neq b.$

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x^2 - (a+b)x + ab} = \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{(x-a)(x-b)}.$$

$*\ Seja\ \theta = x - a, então\ x = \theta + a. Se\ x \to a, então\ \theta \to 0. Ajustando\ o\ limite$ $acima, temos:$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta(\theta+a-b)} &= \lim_{\theta\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}.\frac{1}{(\theta+a-b)}\right] \\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \times \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta+a-b} \\ &= 1 \times \frac{1}{0+a-b} \\ &= \frac{1}{a-b}, a \neq b\end{aligned}$$

$*\ Limite\ Fundamental\ Trigonométrico:\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$

$b)\ Encontre\ uma\ equação\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ da\ função\ y = e^{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)}$ $no\ ponto\ (0{,}1).$ $Ponto\ (0{,}1)\ pertence\ ao\ gráfico\ da\ função!$

$Seja\ u = \operatorname{sen} x, v = \operatorname{tg} u\ e\ y = f(v) = e^v. Pela\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$y' = e^{v}.\sec^2 u\,.\cos x$$
$$y' = e^{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)}.\sec^2(\operatorname{sen} x)\,.\cos x$$

No ponto $P(0,1)$, *temos*:

$y'(0) = e^{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} 0)}.\sec^2(\operatorname{sen} 0)\,.\cos 0$
$y'(0) = e^{0}.\sec^2 0\,.\cos 0$
$y'(0) = 1$

Equação da reta tangente no ponto $(0,1)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 1 = 1(x - 0)$$
$$y = x + 1$$

Questão 4

a) Determine uma equação da reta normal à curva dada pela equação $x^2y + \operatorname{sen} y = 2x$ *no ponto* $(1,2\pi)$

Por inspeção notamos que o ponto $(1,2\pi)$ *não pertence a curva dada implicitamente por* $x^2y + \operatorname{sen} y = 2x$. $(2\pi \neq 2)$

Com isso, descartamos a possibilidade de existir reta normal à curva neste ponto $(1,2\pi)$. *Entretanto, há uma segunda possibilidade*:

"*Existe reta normal à curva* $x^2y + \operatorname{sen} y = 2x$ *que passa pelo ponto* $(1,2\pi)$?"

Equação de uma reta que passa pelo ponto $(1,2\pi)$:

$$y - 2\pi = m_n(x - 1)$$

Onde m_n *é coeficiente angular da reta normal à curva. Logo,*

$$m_n = -\frac{1}{y'}$$

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} y) = \frac{d}{dx}(2x)$$
$$2xy + x^2y' + \cos y\,.y' = 2$$
$$y' = \frac{2 - 2xy}{x^2 + \cos y}$$

$$y - 2\pi = -\frac{x^2 + \cos y}{2 - 2xy}(x - 1)$$
$$2y - 4\pi - 2xy^2 + 4\pi xy = -x^3 + x^2 - x.\cos y + \cos y$$
$$x^3 - x^2 + x.\cos y + 2y - 2xy^2 + 4\pi xy - \cos y - 4\pi = 0$$

A equação acima representa a segunda possibilidade analisada. Porém, é inviável determinar o par (x,y) *que satisfaça simultaneamente a equação* *acima e à expressão da curva. No máximo, só podemos estipular uma equação para a reta normal à curva que passa pelo ponto* $(1,2\pi)$ *cujo ponto de referencia da curva seja* (x_0, y_0). *Logo,*

$$y = -\frac{x_0^2 + \cos y_0}{2 - 2x_0 y_0}(x-1) + 2\pi$$

é a equação da reta normal à curva que passa pelo ponto $(1,2\pi)$.

Redefinindo a curva

1ª *expressão:* $x^2y + \operatorname{sen} y = 2\pi$ *ponto* $(1,2\pi)$ *pertence à curva.*
2ª *expressão:* $x^2y + \operatorname{sen} y = 2\pi x$ *ponto* $(1,2\pi)$ *pertence à curva.*

Para a 1ª *expressão, teríamos*

$y' = -\dfrac{2xy}{x^2 + \cos y}$; *no ponto* $(1,2\pi) \to y' = -\dfrac{4\pi}{1+1} = -\dfrac{4\pi}{2} = -2\pi \therefore m_n = \dfrac{1}{2\pi}$

Equação da reta normal:

$y - 2\pi = \dfrac{1}{2\pi}(x-1) \quad \ldots \quad y = \dfrac{1}{2\pi}x - \dfrac{1}{2\pi} + 2\pi$ *ou* $y = \dfrac{1}{2\pi}x + \dfrac{4\pi^2 - 1}{2\pi}$

Para a 2ª *expressão, teríamos*

$y' = \dfrac{2\pi - 2xy}{x^2 + \cos y}$; *no ponto* $(1,2\pi) \to y' = \dfrac{2\pi - 4\pi}{1+1} = \dfrac{-2\pi}{2} = -\pi \therefore m_n = \dfrac{1}{\pi}$

Equação da reta normal:

$y - 2\pi = \dfrac{1}{\pi}(x-1) \ \ldots \ y = \dfrac{1}{\pi}x - \dfrac{1}{\pi} + 2\pi$ *ou* $y = \dfrac{1}{\pi}x + \dfrac{2\pi^2 - 1}{\pi}$

---

b) Encontre o ponto do intervalo $[0,1]$ *no qual a reta tangente ao gráfico de*

$$y = 2^{\operatorname{sen}(\pi x)} + \operatorname{sen}^3(\pi x)$$

é horizontal.

$y' = 2^{\operatorname{sen}(\pi x)}.\ln 2 . \cos(\pi x) . \pi + 3\operatorname{sen}^2(\pi x) . \cos(\pi x) . \pi$
$y' = \pi \cos(\pi x)\left[2^{\operatorname{sen}(\pi x)}.\ln 2 + 3\operatorname{sen}^2(\pi x)\right]$

O ponto onde a reta tangente é horizontal, o coeficiente angular é nulo. Ou seja, $m = y' = 0$.

$y' = 0 \Rightarrow \pi\cos(\pi x)\left[2^{\operatorname{sen}(\pi x)}.\ln 2 + 3\operatorname{sen}^2(\pi x)\right] = 0$

$$\begin{cases} \cos(\pi x) = 0 \\ ou \\ 2^{\operatorname{sen}(\pi x)}.\ln 2 + 3\operatorname{sen}^2(\pi x) = 0 \end{cases}$$

$*$ *Obs:* $2^{\operatorname{sen}(\pi x)}.\ln 2 \geq \dfrac{1}{2}\ln 2$ *e* $3\operatorname{sen}^2(\pi x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *Logo,*

$$2^{\operatorname{sen}(\pi x)}.\ln 2 + 3\operatorname{sen}^2(\pi x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a única solução para $y' = 0$ é $\cos(\pi x) = 0$. *Logo,*

$$\cos(\pi x) = 0 \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\therefore x = \frac{1}{2} + k, com\ k \in \mathbb{Z}$$

Considerando o intervalo $[0,1]$ *temos* $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$, *portanto,* $k = 0$. *Com isso,* $x = \frac{1}{2}$.

$$y = 2^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^1 + 1^3 = 2 + 1 = 3$$

Ponto em questão: $P\left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

***Questão* 5.** *Estude a diferenciabilidade da função*

$$f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), & x \le 1 \\ x^2 - 2x + 3, & se\ x > 1 \end{cases}$$

Como f *é uma função definida por partes e suas sentenças são funções trigonométricas e polinomial, ambas contínuas e diferenciáveis em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua e diferenciável onde está definida. Isto é,* f *é contínua e diferenciável em* $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Analisando a continuidade e diferenciabilidade em $x = 1$, *temos:*

$f(1) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 1 = 2$.
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 1 = 2$.
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2 - 2x + 3) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$.
$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 2$.
Como $\lim_{x\to 1} f(x)$ *existe e* $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, *então* f *é contínua em* $x = 1$.

Com a informação supracitada inicialmente, concluimos que f *é contínua em todos os reais.*

Analisando as derivadas laterais de f *em* 1, *temos:*

$$\begin{aligned} f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2 - 2x + 3 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1^+}(x - 1) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)-2}{x-1}$$
$$= 2\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1}{x-1}$$

$* \; Seja\ \theta = x-1, então\ x = \theta+1. Se\ x \to 1^-, então\ \theta \to 0^-. Ajustando\ o\ limite\ ...$

$$2\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1}{x-1} = 2\lim_{\theta\to 0^-} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\theta+\frac{\pi}{2}\right)-1}{\theta}$$
$$= 2\lim_{\theta\to 0^-} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)-1}{\theta}$$
$$= 2\lim_{\theta\to 0^-} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)-1}{\theta}.\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)+1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)+1}\right]$$
$$= -2\lim_{\theta\to 0^-} \left[\frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\theta}.\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)+1}\right]$$
$$= -2\lim_{\theta\to 0^-} \left[\frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\theta}.\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)+1}.\frac{\frac{\pi^2}{4}\theta}{\frac{\pi^2}{4}\theta}\right]$$
$$= -2\lim_{\theta\to 0^-} \left[\frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\frac{\pi^2}{4}\theta^2}.\frac{\frac{\pi^2}{4}\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)+1}\right]$$
$$= -2\lim_{\theta\to 0^-} \left[\left(\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\frac{\pi}{2}\theta}\right)^2.\frac{\frac{\pi^2}{4}\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)+1}\right]$$
$$= -2\left[\lim_{\theta\to 0^-}\left(\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\frac{\pi}{2}\theta}\right)^2 \times \lim_{\theta\to 0^-}\frac{\frac{\pi^2}{4}\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)+1}\right]$$
$$= -2[1^2\times 0] = 0.$$

$* \; Limite\ Fundamental\ Trigonométrico: \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,kx}{kx} = 1.$

$Como\ f\ \text{é}\ contínua\ em\ x = 1\ e\ f'_+(1) = f'_-(1)\ então\ f\ \text{é}\ diferenciável\ em\ x = 1\ e,$ $com\ a\ informação\ inicial, concluimos\ que\ f\ \text{é}\ contínua\ e\ diferenciável\ em\ todos$ $os\ reais.$

13.5 3ª Prova – 23 de Setembro de 2016

***Questão* 1.**

a) i. Caso existam, determine as assíntotas horizontais do gráfico da função

$$G(x) = \frac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}.$$

ii. Mostre que $G'(\ln 2) = -\dfrac{8}{27}$.

b) Determine os valores máximo e mínimo da função $f(x) = x.e^{-\frac{x^2}{8}}$ *no intervalo* $[-1,4]$.

***Questão* 2.**

a) Ao ser aquecida uma chapa circular de metal, seu diâmetro varia à razão de $0{,}01\ cm/min$. *Determine a taxa à qual a área da base varia quando o diâmetro é* $30cm$.

b) Mostre que $\dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right]$ *é uma constante, no intervalo* $(0, \pi)$.

***Questão* 3.**

a) Um retângulo tem um lado sobre o eixo − x, outro sobre o eixo − y e um dos vértices sobre o gráfico de $y = \arccos\left(\dfrac{x}{4}\right)$. *Use diferenciais para* ***estimar a variação da área*** *do retângulo se sua base variar de* $2m$ *para* $2{,}1m$.

b) Ache $\dfrac{dy}{dx}$, *se* $x = \log_4(x + y + 1)$, *no ponto em que* $x = 1$.

***Questão* 4.**

a) Use derivação logarítmica para mostrar que $f'(3) = -\dfrac{416}{3^8}$, *sendo*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}.(2-x)^5}{(x+3)^7}.$$

b) Uma partícula move − se ao longo de uma reta, de acordo com a lei de movimento $s(t) = (t+1)^2.\log_2(t+1)$, *onde s é a distância orientada da partícula ao ponto inicial em t segundos. Ache a velocidade e a aceleração quando* $t = 1$ *segundo.*

Questão 5.

a) *Uma função cúbica é um polinômio do grau* 3, *isto é, tem a forma* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *onde* $a \neq 0$. *Mostre que uma função cúbica pode ter dois, um ou nenhum número(s) críticos.*

b) *Água está saindo de um tanque em forma de cone invertido a uma taxa de* $10.000\ cm^3/min$ *no momento em que a água está sendo bombeada para dentro a uma taxa constante. O tanque tem* 6m *de altura e seu diâmetro no topo é de* 8m. *Se o nível da água está subindo a uma taxa de* $20\ cm/min$ *quando a altura era* 2m, *encontre a taxa com que a água está sendo bombeada para dentro.*

$\boldsymbol{Questão\ 1.}$

$a)\ i.$ *Caso existam, determine as assíntotas horizontais do gráfico da função*
$G(x) = \dfrac{1-\cosh x}{1+\cosh x}$. *Domínio da função:* $D(G) = \mathbb{R}$.

A reta $y = L$ é chamada assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cosh x}{1+\cosh x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{1+\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-e^x-e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(\frac{2}{e^x}-1-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^x\left(\frac{2}{e^x}+1+\frac{1}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{e^x}-1-\frac{1}{e^{2x}}}{\frac{2}{e^x}+1+\frac{1}{e^{2x}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}-\lim\limits_{x\to+\infty}1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}+\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}} =$$

$$\frac{0-1-0}{0+1+0} = \frac{-1}{1} = -1. \quad *\ Obs: Se\ x\to+\infty, então\ \frac{2}{e^x}\to 0\ e\ \frac{1}{e^{2x}}\to 0$$

Logo, a reta $y = -1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função $G(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\cosh x}{1+\cosh x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{1+\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-e^x-e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}(2e^x-e^{2x}-1)}{e^{-x}(2e^x+e^{2x}+1)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x-e^{2x}-1}{2e^x+e^{2x}+1} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x-\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}-\lim\limits_{x\to-\infty}1}{\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x+\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}+\lim\limits_{x\to-\infty}1} =$$

$$\frac{0-0-1}{0+0+1} = \frac{-1}{1} = -1. \quad *\ Obs: Se\ x\to-\infty, então\ 2e^x\to 0\ e\ e^{2x}\to 0$$

Logo, o gráfico da função $G(x)$ possui apenas uma assíntota horizontal: a reta $y = -1$.

$ii.$ *Mostre que* $G'(\ln 2) = -\dfrac{8}{27}$.

$$G'(x) = \frac{-\operatorname{senh} x\,(1+\cosh x) - \operatorname{senh} x\,(1-\cosh x)}{(1+\cosh x)^2}$$

$$G'(x) = -\frac{2\operatorname{senh} x}{(1+\cosh x)^2}$$

$$G'(\ln 2) = -\frac{2\operatorname{senh}(\ln 2)}{(1+\cosh(\ln 2))^2}$$

$$*\ \operatorname{senh}(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2-\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$*\ \cosh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}.$$

$$G'(\ln 2) = -\frac{2\times\frac{3}{4}}{\left(1+\frac{5}{4}\right)^2} = -\frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} = -\frac{3}{2}\times\frac{16}{81} = -\frac{3}{81}\times\frac{16}{2} = -\frac{1}{27}\times 8 = -\frac{8}{27}.$$

$b)$ *Determine os valores máximo e mínimo da função* $f(x) = x.e^{-\frac{x^2}{8}}$ *no intervalo* $[-1,4]$.

Como f é uma função definida pelo produto de funções contínuas em $\mathbb{R}$, *então f é contínua em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, contínua no intervalo fechado* $[-1,4]$.

Pelo Método do Invervalo Fechado, temos:

1. *Valores de f nos extremos do intervalo:*

$$f(-1) = -e^{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{e^{\frac{1}{8}}} \quad ; \quad f(4) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$$

2. *Valores de f nos números críticos:*

Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe.*

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{8}} - \frac{x^2}{4}e^{-\frac{x^2}{8}} = e^{-\frac{x^2}{8}}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \;\; ; \;\; D(f') = \mathbb{R}.$$

Como f é derivável em $\mathbb{R}$, *se f admite número crítico c, então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$ *(pelo Teorema de Fermat).*

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{8}}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 0\; ; com\; e^{-\frac{x^2}{8}} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{4} = 0 \therefore x = \pm 2.$$

$*$ *Obs: O número crítico* $x = -2$ *não pertence ao intervalo fechado* $[-1,4]$.

$$f(2) = 2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}$$

3. *Comparando os valores obtidos, concluimos que*

$\cdot\, f(-1) = -\frac{1}{e^{\frac{1}{8}}}$ *é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado* $[-1,4]$ *e*

$f(2) = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}$ *é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado* $[-1,4]$.

Questão 2.

$a)$ *Ao ser aquecida uma chapa circular de metal, seu diâmetro varia à razão de* $0{,}01\ cm/min$. *Determine a taxa à qual a área da base varia quando o diâmetro é* $30cm$.

Dado $\frac{dD}{dt} = 0{,}01\ cm/min$ *determinar* $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{D=30cm}$.

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dD}.\frac{dD}{dt}$$

A relação entre a área e o diâmetro é expressa por:

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

Logo,

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi D}{2}$$

Substituindo na expressão inicial, obtemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi D}{2} . 0{,}01$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{D=30cm} = \frac{\pi \times 30}{2} . 0{,}01$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{D=30cm} = 0{,}15\pi\ cm^2/min$$

$b)$ *Mostre que* $\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right]$ *é uma constante, no intervalo* $(0,\pi)$.

$*$ *Considerando o intervalo em questão* $(0,\pi)$ *temos que* $(1+\cos x) > 0$ *e* $(1-\cos x) > 0$ *neste intervalo. Logo podemos fazer a seguinte manipulação:*

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x} . \frac{1-\cos x}{1-\cos x}} = \sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$*$ *Obs:* $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = |\operatorname{sen} x|$, *como* $x \in (0,\pi)$ *então* $\operatorname{sen} x > 0$ *e, portanto,* $|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x$.

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right] = \frac{d}{dx}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)\right] &= \frac{1}{1+\left(\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2} \times \frac{\operatorname{sen} x . \operatorname{sen} x - \cos x\,(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + (1-\cos x)^2} \times \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x} \\
&= \frac{1-\cos x}{2-2\cos x} \\
&= \frac{1-\cos x}{2(1-\cos x)}
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right] = \frac{d}{dx}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)\right]$ *é uma constante no intervalo* $(0,\pi)$.

$\boldsymbol{Questão\ 3.}$

$a)$ *Um retângulo tem um lado sobre o eixo* $-x$, *outro sobre o eixo* $-y$ *e um dos vértices sobre o gráfico de* $y = \arccos\left(\frac{x}{4}\right)$. *Use diferenciais para* ***estimar a variação da área*** *do retângulo se sua base variar de* $2m$ *para* $2{,}1m$.

Área do retângulo em função de x:

$$A = b \times h$$
$$A = x \times y$$
$$A(x) = x.\arccos\left(\frac{x}{4}\right)$$

Como a variação da base $(0{,}1m)$ *foi pequena comparada ao valor inicial* $(2m)$, *então podemos dizer que*

$$\Delta A \approx dA$$
$$dA = A'(x).dx$$
$$dA = A'(2) \times 0{,}1$$

$$A'(x) = \arccos\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x}{4\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}$$

$$A'(2) = \arccos\left(\frac{2}{4}\right) - \frac{2}{4\sqrt{1-\left(\frac{2}{4}\right)^2}}$$

$$A'(2) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$A'(2) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}(\pi - \sqrt{3})$$

$$dA = \frac{1}{3}(\pi - \sqrt{3}) \times 0{,}1$$

$$dA = \frac{\pi - \sqrt{3}}{30} m^2$$

$$\Delta A \approx dA = \frac{\pi - \sqrt{3}}{30} m^2$$

$b)$ *Ache* $\frac{dy}{dx}$, *se* $x = \log_4(x+y+1)$, *no ponto em que* $x = 1$.

$$1 = \log_4(1+y+1)$$
$$1 = \log_4(2+y)$$
$$4^1 = 2 + y$$
$$y = 2. \quad Ponto\ P(1{,}2).$$

Da expressão dada, temos:

$$4^x = x + y + 1$$
$$y = 4^x - x - 1$$
$$\frac{dy}{dx} = 4^x.\ln 4 - 1\ ;\ em\ x = 1 \ldots \frac{dy}{dx} = 4.\ln 4 - 1.$$

Outra maneira de resolver, derivando implicitamente:

$$1 = \frac{1}{(x+y+1)\ln 4}.\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)\ln 4 - 1$$

$No\ ponto\ P(1,2), temos:$

$$\frac{dy}{dx} = (1 + 2 + 1).\ln 4 - 1 = 4\ln 4 - 1$$

$\boldsymbol{Questão\ 4.}$

$a)\ Use\ derivação\ logarítmica\ para\ mostrar\ que\ f'(3) = -\frac{416}{3^8}, sendo$

$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}.(2-x)^5}{(x+3)^7}.\quad * f(3) = -\frac{2}{6^7} = -\frac{2}{3^7.2^7} = -\frac{1}{3^7.2^6}$

$$\ln f(x) = \ln(x+1)^{\frac{1}{2}} + \ln(2-x)^5 - \ln(x+3)^7$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{2}\ln(x+1) + 5\ln(2-x) - 7\ln(x+3)$$

$Por\ derivação\ logarítimica, obtemos:$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}.\frac{1}{(x+1)} + 5.\frac{1}{(2-x)}.(-1) - 7.\frac{1}{(x+3)}$$

$$\frac{f'(3)}{f(3)} = \frac{1}{2}.\frac{1}{4} + 5.\frac{1}{(-1)}(-1) - 7.\frac{1}{6}$$

$$\frac{f'(3)}{f(3)} = \frac{1}{8} + 5 - \frac{7}{6}$$

$$f'(3) = f(3)\left[\frac{3 + 120 - 28}{24}\right]$$

$$f'(3) = -\frac{1}{3^7.2^6}\left[\frac{95}{3.2^3}\right]$$

$$f'(3) = -\frac{95}{3^8.2^9}$$

$\boldsymbol{Erro\ de\ digitação\ na\ questão!\ Era\ para\ mostrar\ que\ f'(0) = -\frac{416}{3^8}.}$

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - \frac{7}{3}$$

$$f'(0) = f(0)\left[-2 - \frac{7}{3}\right]$$

$$f'(0) = f(0)\left[-\frac{13}{3}\right]$$

$$f'(0) = -\frac{2^5}{3^7} \times \frac{13}{3}$$

$$f'(0) = -\frac{32 \times 13}{3^8} = -\frac{416}{3^8}$$

$b)$ *Uma partícula move − se ao longo de uma reta, de acordo com a lei de movimento* $s(t) = (t+1)^2 . \log_2(t+1)$ *, onde s é a distância orientada da partícula ao ponto inicial em t segundos. Ache a velocidade e a aceleração quando* $t = 1$ *segundo.*

Da cinemática temos que a velocidade $v(t)$ *e a aceleração* $a(t)$ *são dadas pelas seguintes expressões:*

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad e \quad a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 2(t+1).\log_2(t+1) + (t+1)^2 . \frac{1}{(t+1).\ln 2}$$

$$v(t) = 2(t+1).\log_2(t+1) + \frac{1}{\ln 2}.(t+1)$$

$$v(1) = \left(4 + \frac{2}{\ln 2}\right) m/s$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2\log_2(t+1) + 2(t+1).\frac{1}{(t+1).\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}$$

$$a(t) = 2\log_2(t+1) + \frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}$$

$$a(1) = \left(2 + \frac{3}{\ln 2}\right) m/s^2$$

Questão 5.

$a)$ *Uma função cúbica é um polinômio do grau 3, isto é, tem a forma* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$*, onde* $a \neq 0$*. Mostre que uma função cúbica pode ter dois, um ou nenhum número(s) críticos.*

Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe.*

Como f é uma função polinomial e portanto contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$*, se f possui algum número crítico c, então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$*.*

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

A equação em x acima é do segundo grau e o discriminante desta equação é $\Delta = 4b^2 - 12ac$*.*

Se $\Delta > 0$*, então a equação acima possui 2 raízes reais distintas.*
Se $\Delta = 0$*, então a equação acima possui 1 raíz real de multiplicidade 2.*
Se $\Delta < 0$*, então a equação acima não possui raíz real.*

Logo, como o número de raízes da equação acima representam a quantidade de números críticos, na ordem, respectivamente, f pode ter dois, um ou nenhum número crítico a depender do discriminante Δ*.*

$b)$ Água está saindo de um tanque em forma de cone invertido a uma taxa de $10.000\ cm^3/min$ no momento em que a água está sendo bombeada para dentro a uma taxa constante. O tanque tem 6m de altura e seu diâmetro no topo é de 8m. Se o nível da água está subindo a uma taxa de $20\ cm/min$ quando a altura era 2m, encontre a taxa com que a água está sendo bombeada para dentro.

Considere: V_e = volume de água que está entrando no tanque
V = volume de água que está dentro do tanque
V_S = volume de água que está saindo.

Então ...

$$V_e = V + V_S$$

$$\frac{dV_e}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dV_S}{dt}$$

Onde:

$\frac{dV_e}{dt}$ = taxa com a qual a água está sendo bombeada para dentro do tanque.

$\frac{dV}{dt}$ = taxa com a qual a água varia dentro do tanque.

$\frac{dV_S}{dt}$ = taxa com a qual a água está saindo/vazando do tanque. $(10.000\ cm^3/min)$

Para determinar a taxa $\frac{dV}{dt}$ temos pela Regra da Cadeia:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}.\frac{dh}{dt}$$

* Obs: devemos compatibilizar as unidades envolvidas no problema com suas respectivas taxas.

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{600cm}{h} = \frac{400cm}{r} \Longrightarrow r = \frac{2}{3}h$$

Volume de água no tanque:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{3}h\right)^2 .h$$
$$V = \frac{4\pi}{27}h^3$$
$$\frac{dV}{dh} = \frac{4\pi}{9}h^2$$

Quando $h = 2m = 200cm, \frac{dh}{dt} = 20\ cm/min$. Substituindo as informações na Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{9}(200)^2.20$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{32\pi \times 10^5}{9} cm^3/min$$

$Logo, a\ taxa\ com\ a\ qual\ a\ água\ está\ sendo\ bombeada\ para\ dentro\ do\ tanque$ é:

$$\frac{dV_e}{dt} = \left(\frac{32\pi \times 10^5}{9} + 10.000\right) cm^3/min$$

13.6 3ª Prova – 24 de Setembro de 2016

Questão 1.

$a)$ *Demonstre a identidade*: $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

$b)$ *Sejam a e b números reais positivos. Determine o valor máximo absoluto da função* $f(x) = x^a(1-x)^b$, *no intervalo* $[0,1]$.

Questão 2.

Considere um balão metereológico a ser lançado a $100m$ *de distância de uma câmera de televisão montada no nível do chão. À medida que o balão sobe, aumenta a distância entre a câmera e o balão e o ângulo que a câmera faz com o chão. Se o balão está subindo a uma velocidade de* $6\,m/s$, *pergunta − se*:

$a)$ *Quando o balão estiver a* $75m$ *de altura, qual a velocidade com que o balão se afasta da câmera?*
$b)$ *Decorridos* 5 *segundos após o lançamento, para filmar a subida do balão, com que velocidade o ângulo de elevação da câmera está aumentando?*

Questão 3.

$a)$ *Uma maneira de definir* $\operatorname{arccossec}(x)$ é *dizer*

$$y = \operatorname{arccossec}(x) \iff \operatorname{cossec}(y) = x, com\ y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Mostre que, com essa definição, $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccossec}(x)) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$b)$ *Use aproximação linear para estimar* $0{,}99^{1{,}01}$.

Questão 4.

$a)$ *Seja* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivável e* $f(x) = g[5 + \log_2(x^2+1)]$. *Ache* $f'(1)$ *sabendo que* $g'(6) = 3$.

$b)$ *Use derivação logarítmica para encontrar a derivada da função*
$f(x) = \dfrac{\sec^2 x \,.\, \operatorname{tg}^4 x}{(x^2+1)^2}$.

Questão 5.

$a)$ *Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função* $f(x) = x - x\ln x$, *no intervalo* $\left[\frac{1}{2}, e\right]$.

$b)$ *Calcule a derivada da função* $f(x) = \log_{10}|\sec x + \operatorname{tg} x|$, *no ponto em que* $x = 0$. *Obs*: *Restrinja − se ao intervalo* $(-\pi, \pi)$.

***Questão* 1.**

a) Demonstre a identidade: $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$$
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$
$$\cosh(x+y) = \frac{e^{2x+2y}+1}{2e^{x+y}}$$

$*$ *Provando a identidade acima desenvolvendo o segundo membro:*

$$\cosh x\,.\cosh y = \frac{1}{4}.\frac{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)}{e^x e^y} = \frac{1}{4}.\frac{(e^{2x+2y}+e^{2x}+e^{2y}+1)}{e^x e^y}$$
$$\operatorname{senh} x\,.\operatorname{senh} y = \frac{1}{4}.\frac{(e^{2x}-1)(e^{2y}-1)}{e^x e^y} = \frac{1}{4}.\frac{(e^{2x+2y}-e^{2x}-e^{2y}+1)}{e^x e^y}$$
$$\cosh x\,.\cosh y + \operatorname{senh} x\,.\operatorname{senh} y = \frac{1}{4}.\frac{2(e^{2x+2y}+1)}{e^x e^y} = \frac{e^{2x+2y}+1}{2e^x e^y} = \cosh(x+y)$$

$*$ *Provando a igualdade desenvolvendo o primeiro membro:*

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) &= \frac{e^{2x}e^{2y}+1}{2e^x e^y}\\ &= \frac{2e^{2x}e^{2y}+2}{4e^x e^y}\\ &= \frac{2e^{2x}e^{2y}+2+e^{2x}-e^{2x}+e^{2y}-e^{2y}}{4e^x e^y}\\ &= \frac{(e^{2x}e^{2y}+e^{2x}+e^{2y}+1)+(e^{2x}e^{2y}-e^{2x}-e^{2y}+1)}{4e^x e^y}\\ &= \frac{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1)}{4e^x e^y} + \frac{(e^{2x}-1)(e^{2y}-1)}{4e^x e^y}\\ &= \frac{e^{2x}+1}{2e^x}\cdot\frac{e^{2y}+1}{2e^y} + \frac{e^{2x}-1}{2e^x}\cdot\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\\ &= \cosh x\,.\cosh y + \operatorname{senh} x\,.\operatorname{senh} y\end{aligned}$$

$*$ *Obs: esse segundo método foi mostrado apenas por razões didáticas.*

b) Sejam a e b números reais positivos. Determine o valor máximo absoluto da função $f(x) = x^a(1-x)^b$*, no intervalo* $[0,1]$. $*\ D(f) = \mathbb{R}$

f é uma função polinomial e, portanto, contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua no intervalo fechado $[0,1]$. Podemos então utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos absolutos de f no intervalo fechado $[0,1]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

$1.$ *Os valores de f nos extremos do intervalo*:

$f(0) = 0$ *e* $f(1) = 0$.

$2.$ *Os valores de f nos números críticos de f em* $(0,1)$:

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe"

Como f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, se f possui algum número crítico c em $(0,1)$ então $f'(c)$ existe e $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = ax^{a-1}(1-x)^b - bx^a(1-x)^{b-1}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow ax^{a-1}(1-x)^b = bx^a(1-x)^{b-1}$$

$$ax^a . x^{-1}(1-x)^b = bx^a(1-x)^b(1-x)^{-1}$$
$$\frac{a}{x} = \frac{b}{1-x} \Rightarrow x(a+b) = a \therefore x = \frac{a}{a+b} \;;com\ a > 0\ e\ b > 0, \qquad \frac{a}{a+b} \in (0,1).$$

$$f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)^b$$
$$f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \frac{a^a}{(a+b)^a} . \frac{b^b}{(a+b)^b} = \frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$$

Comparando os valores obtidos, concluimos que $\dfrac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$ *é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado* $[0,1]$.

***Questão* 2.**

Considere um balão metereológico a ser lançado a $100m$ de distância de uma câmera de televisão montada no nível do chão. À medida que o balão sobe, aumenta a distância entre a câmera e o balão e o ângulo que a câmera faz com o chão. Se o balão está subindo a uma velocidade de $6\,m/s$, pergunta − se:

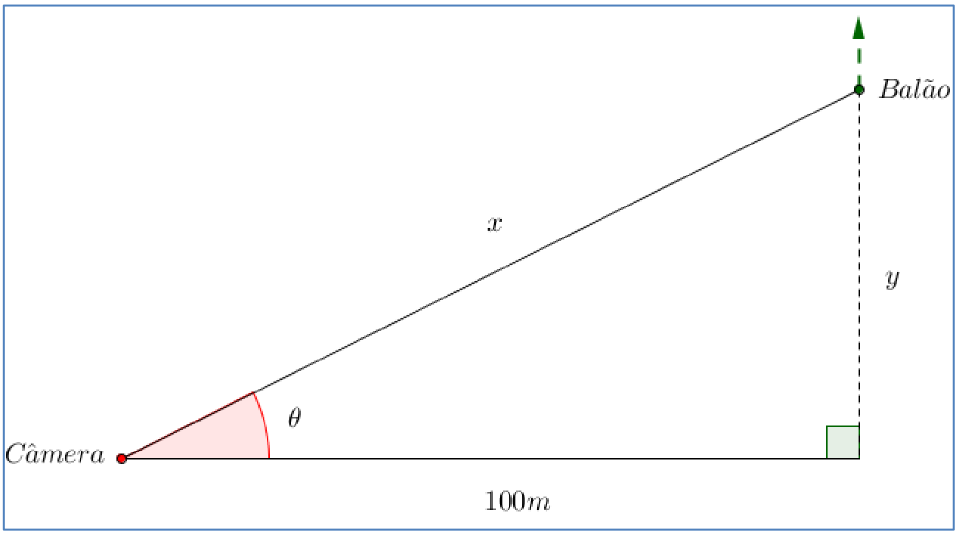


Ilustração do problema!

$a)$ *Quando o balão estiver a 75m de altura, qual a velocidade com que o balão se afasta da câmera?*

$$x^2 = 100^2 + y^2$$

Quando $y = 75m$, *temos*:

$$x^2 = 100^2 + 75^2$$
$$x^2 = (25 \times 4)^2 + (25 \times 3)^2$$
$$x^2 = 25^2(4^2 + 3^2)$$
$$x^2 = 25^2(16 + 9)$$
$$x^2 = 25^2 \times 25$$
$$x = 25 \times 5 = 125m$$

Derivando implicitamente a expressão que relaciona x *e* y, *temos*:

$$2x.\frac{dx}{dt} = 0 + 2y.\frac{dy}{dt}$$

onde $\frac{dx}{dt}$ *é a velocidade com que o balão se afasta da câmera e* $\frac{dy}{dt}$ *é a velocidade do balão. Logo, quando* $x = 125m$ *e* $y = 75m$, *temos*:

$$2x.\frac{dx}{dt} = 0 + 2y.\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x}.\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{75}{125} \times 6$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{5} \times 6 = \frac{18}{5} m/s \ \ ou\ 3{,}6\, m/s$$

$b)$ *Decorridos* 5 *segundos após o lançamento, para filmar a subida do balão, com que velocidade o ângulo de elevação da câmera está aumentando?*

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{100}$$
$$y = 100.\operatorname{tg}\theta$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$
$$6 = 100.\sec^2\theta.\frac{d\theta}{dt}$$

Após 5 *segundos, temos* $y = 30m$. *Logo,* $\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{10}$.

$$\sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta = 1 + \frac{9}{100} = \frac{109}{100}$$

Portanto,

$$6 = 100 \times \frac{109}{100}.\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{6}{109} rad/s$$

Logo, o ângulo de elevação da câmera está aumentando à velocidade de $\frac{6}{109} rad/s$.

***Questão* 3.**

$a)$ *Uma maneira de definir* arccossec(x) é *dizer*

$$y = \operatorname{arccossec}(x) \iff \operatorname{cossec}(y) = x, com\ y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Mostre que, com essa definição, $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccossec}(x)) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Derivando implicitamente a expressão, temos:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{cossec}(y)] = \frac{d}{dx}(x)$$
$$-\operatorname{cossec} y \,.\, \operatorname{cotg} y \,.\, \frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{cossec} y \,.\, \operatorname{cotg} y}$$
$$\operatorname{cotg}^2 y + 1 = \operatorname{cossec}^2 y$$
$$\operatorname{cotg} y = \pm\sqrt{\operatorname{cossec}^2 y - 1}$$

Como $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, *onde* $\operatorname{tg} y > 0$, *então* $\operatorname{cotg} y > 0$. *Então,*

$$\operatorname{cotg} y = \sqrt{\operatorname{cossec}^2 y - 1}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{cossec} y \sqrt{\operatorname{cossec}^2 y - 1}}$$

Como $\operatorname{cossec} y = x$, *temos:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\operatorname{arccossec}(x)] = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$b)$ *Use aproximação linear para estimar* $0{,}99^{1{,}01}$.

Seja a função base $f(x) = (1-x)^{1+x}$, *onde* $f(0) = 1$ *e queremos estimar o valor de* f *em* $x = 0{,}01$.

Por aproximação linear, temos a Linearização de f *em* 0 *dada pela expressão:*

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x-0)$$

$\ln f(x) = (1+x).\ln(1-x)$

Por derivação logarítimica, temos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(1-x) - \frac{1+x}{1-x}$$
$$f'(x) = f(x)\left[\ln(1-x) - \frac{1+x}{1-x}\right]$$
$$f'(0) = f(0)[\ln 1 - 1]$$

$$f'(0) = -1.$$
$$L(x) = 1 - x$$

Por aproximação linear podemos estimar que

$$\boldsymbol{f(0,01) \approx L(0,01) = 1 - 0,01 = 0,99}$$

Outra função base para usar como referência: $g(x) = 0{,}99^{1+x}$*, onde* $g(0) = 0{,}99$ *e* $g'(x) = 0{,}99^{1+x}.\ln(0{,}99)$. *Logo,* $g'(0) = 0{,}99.\ln(0{,}99)$.

$$L_2(x) = 0{,}99 + 0{,}99.\ln(0{,}99)\,x$$
$$\boldsymbol{g(0,01) \approx L_2(0,01) = 0,99 + 0,0099.\ln(0,99)}$$

Abrindo o parêntese para comentar os resultados obtidos para ambas as funções base de referência f e g, a estimativa usando a função g tem uma precisão maior do que a função f. Como trata − se apenas de uma estimativa ambas as respostas representam bem o valor de $0{,}99^{1{,}01}$. *Para efeito de cálculo adotamos que* $0{,}99^{1{,}01} \approx 0{,}99$.

***Questão* 4.**

a) *Seja* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivável e* $f(x) = g[5 + \log_2(x^2 + 1)]$. *Ache* $f'(1)$ *sabendo que* $g'(6) = 3$.

Derivando a função f pela regra da cadeia, obtemos:

$$f'(x) = g'[5 + \log_2(x^2 + 1)].\frac{d}{dx}[5 + \log_2(x^2 + 1)]$$
$$f'(x) = g'[5 + \log_2(x^2 + 1)].\frac{1}{(x^2 + 1)\ln 2}.(2x)$$
$$f'(1) = g'[5 + \log_2 2].\frac{1}{2\ln 2}.2$$
$$f'(1) = g'(6).\frac{1}{\ln 2}$$
$$f'(1) = \frac{3}{\ln 2}$$

b) *Use derivação logarítmica para encontrar a derivada da função*

$$f(x) = \frac{\sec^2 x\,.\,\mathrm{tg}^4\, x}{(x^2 + 1)^2}. \quad D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}\ ;\ *\ f(x) \geq 0$$

$$\ln f(x) = \ln\left[\frac{\sec^2 x\,.\,\mathrm{tg}^4\, x}{(x^2 + 1)^2}\right]$$
$$\ln f(x) = \ln(\sec x)^2 + \ln(\mathrm{tg}\, x)^4 - \ln(x^2 + 1)^2$$
$$\ln f(x) = 2\ln(\sec x) + 4\ln(\mathrm{tg}\, x) - 2\ln(x^2 + 1)$$

Por derivação logarítmica, temos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2.\frac{1}{\sec x}.\sec x\,.\operatorname{tg} x + 4.\frac{1}{\operatorname{tg} x}.\sec^2 x - 2.\frac{1}{x^2+1}.(2x)$$

$$f'(x) = f(x)\left[2\operatorname{tg} x + \frac{4}{\operatorname{sen} x\,.\cos x} - \frac{4x}{x^2+1}\right]$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x\,.\operatorname{tg}^4 x}{(x^2+1)^2}\left[2\operatorname{tg} x + \frac{4}{\operatorname{sen} x\,.\cos x} - \frac{4x}{x^2+1}\right]$$

$$f'(x) = 2.\frac{\sec^2 x\,.\operatorname{tg}^4 x}{(x^2+1)^2}\left[\operatorname{tg} x + \frac{2}{\operatorname{sen} x\,.\cos x} - \frac{2x}{x^2+1}\right]$$

***Questão* 5.**

a) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x - x\ln x$, *no intervalo* $\left[\frac{1}{2}, e\right]$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Como f é contínua onde está definida, ou seja, em $x \in (0,\infty)$, então f é contínua em qualquer intervalo fechado $I \subset D(f)$. Logo, f é contínua no intervalo fechado $\left[\frac{1}{2}, e\right]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Valores de f nos extremos do intervalo:*

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+\ln 2)\,;\ \ln 2 < \ln e = 1 \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) < 1.$$

$$f(e) = e - e.\ln e = e - e = 0.$$

2. *Valores de f nos números críticos de f em* $\left(\frac{1}{2}, e\right)$

Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe.

$$f'(x) = 1 - \ln x - 1$$
$$f'(x) = -\ln x$$

$f'(x)$ *não existe em* $x = 0$, *porém* $0 \notin D(f)$

$f'(x) = 0$ *em* $x = 1$ *e* $1 \in D(f)$ *e* $1 \in \left(\frac{1}{2}, e\right)$

Logo, 1 *é o número crítico de f em* $\left(\frac{1}{2}, e\right)$.

$$f(1) = 1 - 1.\ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

3. *Comparando os valores obtidos, concluimos que* 1 *é o valor máximo absoluto e* 0 *é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado* $\left[\frac{1}{2}, e\right]$.

$b)$ *Calcule a derivada da função* $f(x) = \log_{10}|\sec x + \operatorname{tg} x|$ *, no ponto em que* $x = 0$. *Obs: Restrinja − se ao intervalo* $(-\pi, \pi)$.

Vamos nos ater ao subintervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *para analisar a expressão* $(\sec x + \operatorname{tg} x)$. *Podemos fazer isso porque ao definirmos um intervalo onde* f *é contínua e que contem o* 0 *podemos diminuir o trabalho em analisar todo o intervalo* $(-\pi, \pi)$ *analisando apenas o intervalo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\sec x + \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Em $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\operatorname{sen} x > -1$ *e* $\cos x > 0$. *Portanto,* $(\sec x + \operatorname{tg} x) > 0$ *em* $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
Em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{sen} x \geq 0$ *e* $\cos x > 0$. *Portanto,* $(\sec x + \operatorname{tg} x) > 0$ *em* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Concluimos com essa análise que $(\sec x + \operatorname{tg} x) > 0$ *em* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. *Logo,*

$$f(x) = \log_{10}(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(\sec x + \operatorname{tg} x).\ln 10}(\sec x . \operatorname{tg} x + \sec^2 x)$$

$$f'(x) = \frac{\sec x\,(\sec x + \operatorname{tg} x)}{(\sec x + \operatorname{tg} x).\ln 10}$$

$$f'(x) = \frac{\sec x}{\ln 10}$$

$$f'(0) = \frac{\sec 0}{\ln 10}$$

$$f'(0) = \frac{1}{\ln 10}.$$

13.7 4ª Prova – 21 de Outubro de 2016

$\boldsymbol{Questão\ 1}.$ *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, *tendo*

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \quad e \quad f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$$

apontando:

a) As assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

b) Os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente, bem como os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam

c) Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.

$\boldsymbol{Questão\ 2}$

a) Ache $f(x)$, *sabendo que* $f'(x) = 2xe^{x^2+1} + \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$.

b) Determine os intervalos de concavidade e pontos de inflexão da curva
$f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x+1}}$.

$\boldsymbol{Questão\ 3}.$ *Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R\$5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R\$4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?*

$\boldsymbol{Questão\ 4}.$ *Calcule os limites*:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$;

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$.

$\boldsymbol{Questão\ 5}$

a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que se uma função f possui derivada negativa em todo o intervalo (a, b), então ela é decrescente nesse intervalo.

b) Mostre que a função $f(x) = 2x^5 + 4x^3 + 5x + \operatorname{tg} x$ *não pode ter mais do que uma raíz real.*

$\boldsymbol{Questão\ 1.}$ *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, *tendo*

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \quad e \quad f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$$

apontando:

a) *As assíntotas horizontais e verticais, se existirem.*

Domínio da função f: $D(f) = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ *ou* $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$

Assíntotas Verticais: A reta $x = a$ *é uma assíntota vertical ao gráfico da curva* $y = f(x)$ *se* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.

$*$ *Por esta definição, concluimos que estas assíntotas ocorrem nos pontos de descontinuidade da função. Logo, verificamos se as retas* $x = 0$ *e* $x = 1$ *são assíntotas verticais.*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} x.\frac{1}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} x \times \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \times 0 = 0.$$

$*$ *Logo, a reta* $x = 0$ *não é assíntota vertical ao gráfico da função* f.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} \ ; \ * \text{ se } x \to 1^+, \text{então } x > 1 \therefore \ln x > 0. \ \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{\ln x}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$

$*$ *Logo, a reta* $x = 1$ *é assíntota vertical ao gráfico da função* f.

Assíntotas Horizontais: a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico da curva* $y = f(x)$ *se, somente se* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

$*$ *Obs.: Como* $D(f) = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, *só calculamos* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} \overset{L'H}{\longrightarrow}= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

$*$ *Logo, não há assíntotas horizontais ao gráfico da função* f.

b) *Os intervalos onde* f *é crescente e onde* f *é decrescente, bem como os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \ ; \ D(f') = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

Analisando o sinal de $f'(x)$, *obtemos*:

$(0) - - - - - - - - (e) + + + + + + +$ $\quad (\ln x - 1)$
$(0) + + + (1) + + + + + + + + + + + +$ $\quad (\ln x)^2$
$(0) - - - (1) - - - (e) + + + + + + +$ $\quad f'(x)$

Como $f'(x) > 0$ *quando* $x \in (e, +\infty)$ *e* $f'(x) < 0$ *quando* $x \in (0,1) \cup (1, e)$, f *é crescente em* $(e, +\infty)$ *e* f *é decrescente em* $(0,1)$ *e* $(1, e)$.

O único número crítico é $x = e$. *Uma vez que* f' *muda de negativa para positiva em* e, $f(e) = e$ *é um mínimo local pelo Teste da Primeira Derivada.*

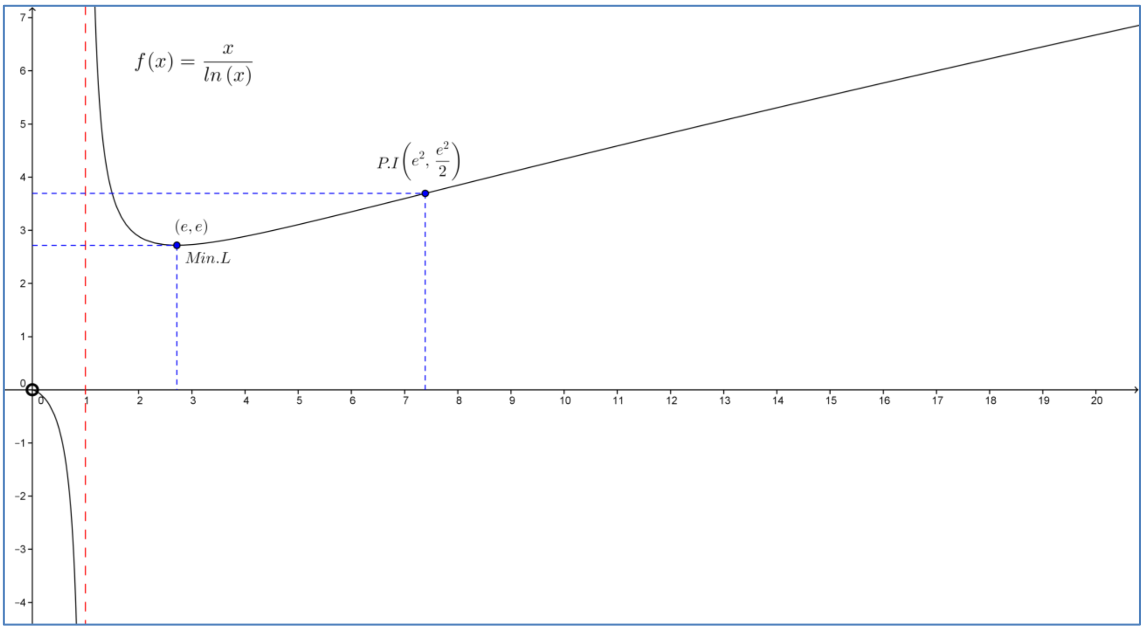
$c)$ *Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.*

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} \qquad D(f'') = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

Analisando o sinal de $f''(x)$, obtemos:

(0) + + + + + + + + + + + (e^2) − − − − − − $(2 - \ln x)$
(0) + + + + + + + + + + + + + + + + + + x
(0) − − − (1) + + + + + + + + + + + + + $(\ln x)^3$
(0) − − − (1) + + + + + (e^2) − − − − − − $f''(x)$

Como $f''(x) > 0$ em $(1, e^2)$ e $f''(x) < 0$ em $(0,1)$ e $(e^2, +\infty)$, a curva $y = f(x)$ é côncava para cima em $(1, e^2)$ e é côncava para baixo nos intervalos $(0,1)$ e $(e^2, +\infty)$. Como ocorre mudança na direção da concavidade em e^2 e este número pertence ao domínio da função, então $\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$.



Questão 2

$a)$ *Ache $f(x)$, sabendo que* $f'(x) = 2xe^{x^2+1} + \frac{2 + x^2}{1 + x^2}$.

$$f'(x) = 2xe^{x^2+1} + \frac{1 + 1 + x^2}{1 + x^2}$$
$$f'(x) = 2xe^{x^2+1} + \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1 + x^2}{1 + x^2}$$
$$f'(x) = 2xe^{x^2+1} + \frac{1}{1 + x^2} + 1$$

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ é dada por:

$$f(x) = e^{x^2+1} + \operatorname{arctg}(x) + x + C$$

$b)$ *Determine os intervalos de concavidade e pontos de inflexão da curva*

$f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x+1}}$. $*$ *Domínio da função* $f: D(f) = \mathbb{R}$.

$$f(x) = (1+e^{-x+1})^{-1}$$

$$f'(x) = -(1+e^{-x+1})^{-2}.(-e^{-x+1})$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x+1}}{(1+e^{-x+1})^2}$$

$$f''(x) = \frac{-e^{-x+1}(1+e^{-x+1})^2 - e^{-x+1}[2.(1+e^{-x+1}).(-e^{-x+1})]}{(1+e^{-x+1})^4}$$

$$f''(x) = -\frac{e^{-x+1}(1+e^{-x+1})[1+e^{-x+1}-2e^{-x+1}]}{(1+e^{-x+1})^4}$$

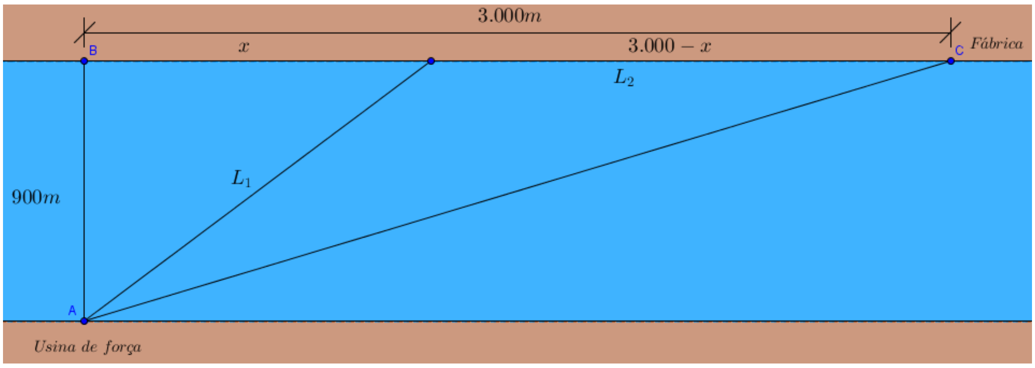
$$f''(x) = -\frac{e^{-x+1}(1-e^{-x+1})}{(1+e^{-x+1})^3}$$

Analisando o sinal de $f''(x)$, *obtemos*:

$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$	$(-e^{-x+1})$
$- - - - - - - - (1) + + + + + + + +$	$(1-e^{-x+1})$
$+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +$	$(1+e^{-x+1})^3$
$+ + + + + + + + (1) - - - - - - - -$	$f''(x)$

Como $f''(x) > 0$ *quando* $x < 1$ *e* $f''(x) < 0$ *quando* $x > 1$, f *possui concavidade voltada para cima em* $(-\infty, 1)$ *e concavidade voltada para baixo em* $(1, +\infty)$. *Como ocorre mudança de direção da concavidade em* $x = 1$ *e* $1 \in D(f)$, *então* $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ *é ponto de inflexão da função* $f(x)$.

Questão 3. *Pretende – se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de* 900*m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio,* 3.000*m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R\$*5,00 *o metro, enquanto que para estendê – lo por terra custa R\$*4,00 *o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?*



$$C(x) = 5L_1 + 4L_2$$

$$C(x) = 5\sqrt{x^2+900^2} + 4(3000-x)\,; \quad x \in [0{,}3000m]$$

$$C'(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+900^2}} - 4$$

$$C'(x) = \frac{5x - 4\sqrt{x^2 + 900^2}}{\sqrt{x^2 + 900^2}} \ ; x \in (0{,}3000)$$

$Como\ a\ função\ custo\ C(x)\ é\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [0{,}3000], pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Extremo\ a\ função\ C\ admite\ um\ valor\ máximo\ absoluto\ C(c)\ e\ um\ valor\ mínimo\ absoluto\ C(d)\ em\ algum\ número\ c\ e\ d\ em\ [0{,}3000].$

$Pelo\ Método\ do\ Intervalo\ Fechado, temos:$

$1. Os\ valores\ de\ C\ nos\ extremos\ do\ intervalo:$

$C(0) = 5 \times 900 + 4 \times 3.000 = 4.500 + 12.000 = R\$16.500{,}00$
$C(3000) = 5 \times \sqrt{3000^2 + 900^2} = 5 \times \sqrt{100^2(981)} = 500\sqrt{9 \times 109} \cong R\$15.600{,}00$

$2. Os\ valores\ de\ C\ nos\ números\ críticos\ de\ C\ em\ (0{,}3000):$

"$Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f\ é\ um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde\ ou\ f'(c) = 0\ ou\ onde\ f'(c)\ não\ existe$".

$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - 4\sqrt{x^2 + 900^2} = 0$

$$\begin{aligned} 5x &= 4\sqrt{x^2 + 900^2} \\ 25x^2 &= 16x^2 + 16 \times 900^2 \\ 9x^2 &= 16 \times 900^2 \\ 3x &= 4 \times 900 \\ x &= 1.200m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(1200) &= 5 \times \sqrt{1200^2 + 900^2} + 4 \times (3000 - 1200) \\ &= 5 \times \sqrt{100^2(144 + 81)} + 4 \times 1800 \\ &= 5 \times 100 \times \sqrt{225} + 7200 \end{aligned}$$

$C(1200) = 7500 + 7200 = R\$14.700{,}00$

$3. Comparando\ os\ valores\ obtidos\ nas\ etapas\ 1\ e\ 2, concluimos\ que\ o\ percurso\ mais\ econômico\ é\ estender\ o\ cabo\ da\ usina\ a\ um\ ponto\ situado\ a\ 1200m\ rio\ abaixo\ na\ margem\ oposta\ e\ seguir\ 1800m\ por\ terra\ até\ a\ fábrica.$

Questão 4. $Calcule\ os\ limites:$

$a)\ \lim_{x \to +\infty} (x - \ln x)\ ;$

$Diferença\ indeterminada$: "$\infty - \infty$"

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} (\ln e^x - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{e^x}{x}\right) = \ln\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}\right];$$

$$* \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

$Portanto,\ \lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) = +\infty.$

$b)\ \lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}.$

$Potência\ indeterminada$: "0^0"

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln x^{\operatorname{sen} x}} = e^{\lim_{x \to 0^+} \ln x^{\operatorname{sen} x}};$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \,.\ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{(\operatorname{sen} x)^{-1}} \ ; Quociente\ indeterminado\ "\frac{\infty}{\infty}"$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(\operatorname{sen} x)^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-(\operatorname{sen} x)^{-2}.\cos x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x.\cos x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen} x}{x}.\operatorname{tg} x =$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x\to 0^+}(-\operatorname{tg} x) = 1 \times 0 = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\operatorname{sen} x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\ln x^{\operatorname{sen} x}} = e^0 = 1.$$

Questão 5

a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que se uma função f possui derivada negativa em todo o intervalo (a,b), então ela é decrescente nesse intervalo.

Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo (a,b) com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de uma função decrescente, temos de mostrar que $f(x_2) < f(x_1)$.

Como nos foi dado que $f'(x) < 0$ em (a,b), sabemos que f é derivável em (x_1,x_2) Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre x_1 e x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Agora $f'(c) < 0$, por hipótese, e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$. Assim, o lado direito da equação é negativo e, portanto,

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \ \text{ ou } \ f(x_2) < f(x_1)$$

Isso mostra que f está diminuindo e, portanto, f é decrescente em (a,b).

b) Mostre que a função $f(x) = 2x^5 + 4x^3 + 5x + \operatorname{tg} x$ não pode ter mais do que uma raíz real.

Domínio da função f: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

A função f é definida como a soma de funções polinomiais e trigonométrica e, portanto, f será dita contínua onde estiver definida, ou seja, em seu domínio. Portanto, f é contínua em qualquer intervalo fechado $I \subset D(f)$.

$$f'(x) = 10x^4 + 12x^2 + 5 + \sec^2 x \ ; D(f') = D(f)$$

Vamos assumir que $I = [a,b]$ um intervalo fechado, tal que $f(a) = f(b) = 0$. Então f satisfaz as seguintes hipóteses:

1. *f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$;*
2. *f é diferenciável no intervalo aberto (a,b);*
3. *$f(a) = f(b)$*

Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Entretanto, $f'(x) = 10x^4 + 12x^2 + 5 + \sec^2 x \geq 6, \forall x \in D(f)$ e, portanto, não existe número real c tal que $f'(c) = 0$.

Logo, por contradição, f não pode ter mais do que uma raíz real.

13.8 4ª Prova – 22 de Outubro de 2016

***Questão* 1.** *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$, *tendo*

$$f'(x) = -\frac{48x}{(x^2 - 16)^2} \quad e \quad f''(x) = \frac{48(16 + 3x^2)}{(x^2 - 16)^3}$$

apontando:
a) As assíntotas horizontais e verticais, se existirem.
b) Os intervalos onde f *é crescente e onde* f *é decrescente, bem como os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*
c) Os intervalos onde o gráfico de f *é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.*

***Questão* 2.**

a) Encontre os valores extremos da função $y = f(x)$ *no intervalo* $[0,2]$, *sabendo que* $f''(x) = 6x + 2, f(0) = -3$ *e* $f(2) = 7$.

b) Prove que $e^x \geq 1 + x$ *se* $x \geq 0$.

***Questão* 3.** *Encontre a altura, o raio e o volume do cone circular reto de maior volume, cuja geratriz mede* $\sqrt{3}m$.

***Questão* 4.** *Calcule os limites*:

a) $\lim_{x \to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$;

b) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1 + x)}\right]$;

***Questão* 5**

a) Mostre que um polinômio de grau 3 não pode ter mais de 3 raízes reais.

b) Mostre que $\operatorname{arctg}\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{4}$.

$\textbf{Questão 1.}$ *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$, *tendo*

$$f'(x) = -\frac{48x}{(x^2 - 16)^2} \quad e \quad f''(x) = \frac{48(16 + 3x^2)}{(x^2 - 16)^3}$$

apontando:

a) As assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

Domínio da função f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4 \text{ e } x \neq -4\}$

Assíntotas Verticais: A reta $x = a$ *é uma assíntota vertical ao gráfico da curva* $y = f(x)$ *se* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

$*$ *Por esta definição, concluimos que estas assíntotas ocorrem nos pontos de descontinuidade da função. Logo, verificamos se as retas* $x = 4$ *e* $x = -4$ *são assíntotas verticais.*

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = \lim_{x \to 4^+} \frac{\overbrace{2x^2 - 8}^{24}}{\underbrace{x^2 - 16}_{0^+}} = +\infty.$$

$*$ *Logo, a reta* $x = 4$ *é assíntota vertical ao gráfico da função* f.

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = \lim_{x \to -4^+} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = \lim_{x \to -4^+} \frac{\overbrace{2x^2 - 8}^{24}}{\underbrace{x^2 - 16}_{0^-}} = -\infty$$

$*$ *Logo, a reta* $x = -4$ *é assíntota vertical ao gráfico da função* f.

Assíntotas Horizontais: a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico da curva* $y = f(x)$ *se, somente se* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} \xrightarrow{L'H} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x}{2x} = \lim_{x \to \pm\infty} 2 = 2.$$

$*$ *Logo, a reta* $y = 2$ *é assíntota horizontal ao gráfico da função* f.

b) Os intervalos onde f *é crescente e onde* f *é decrescente, bem como os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*

$$f'(x) = -\frac{48x}{(x^2 - 16)^2} \quad ; \quad D(f') = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4 \text{ e } x \neq -4\}$$

Analisando o sinal de $f'(x)$, *obtemos*:

$+ + + + + + + + (0) - - - - - - - - - -$ $\quad (-48x)$
$+ + + (-4) + + + + + + + + (4) + + + + +$ $\quad (x^2 - 16)^2$
$+ + + (-4) + + + (0) - - - (4) - - - -$ $\quad f'(x)$

Como $f'(x) > 0$ *quando* $x < 0 (x \neq -4)$ *e* $f'(x) < 0$ *quando* $x > 0 (x \neq 4)$,
f *é crescente em* $(-\infty, -4)$ *e* $(-4, 0)$ *e* f *é decrescente em* $(0, 4)$ *e* $(4, +\infty)$.

O único número crítico é $x = 0$. *Uma vez que* f' *muda de positiva para negativa em* 0, $f(0) = 1/2$ *é um máximo local pelo Teste da Primeira Derivada.*

$c)$ *Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.*

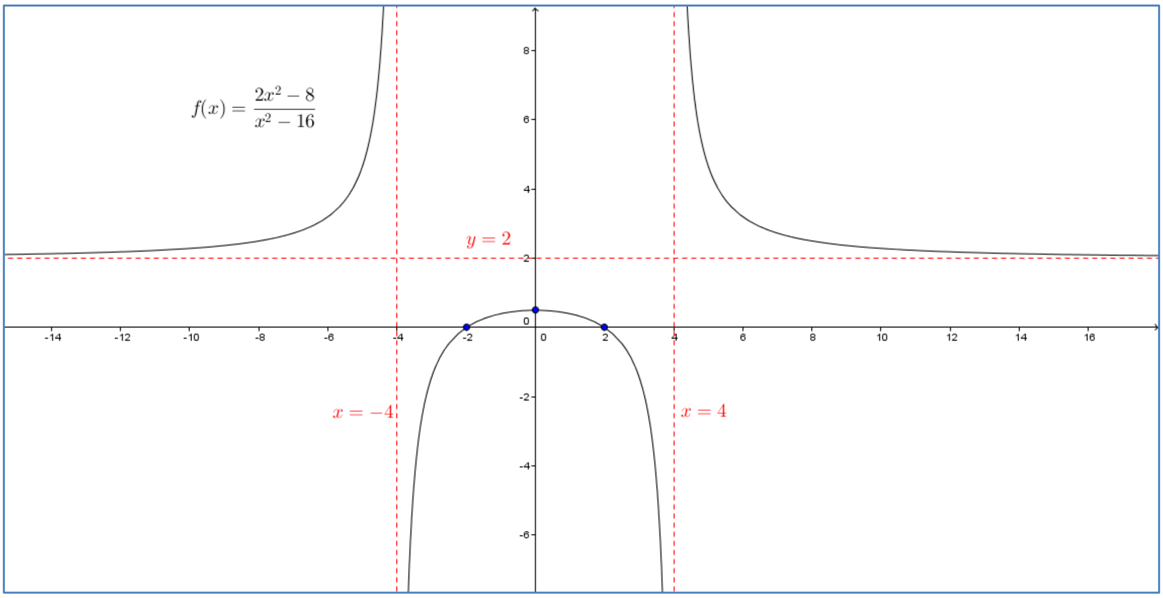
$$f''(x) = \frac{48(16 + 3x^2)}{(x^2 - 16)^3} \quad D(f'') = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -4 \; e \; x \neq 4\}$$

Analisando o sinal de $f''(x)$, obtemos:

$+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +$ $\quad 48(16 + 3x^2)$
$+ + + + + (-4) - - - - - - (4) + + + + + +$ $\quad (x^2 - 16)^3$
$+ + + + + (-4) - - - - - - (4) + + + + + +$ $\quad f''(x)$

Como $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -4)$ e em $(4, \infty)$ e $f''(x) < 0$ em $(-4,4)$, a curva $y = f(x)$ é côncava para cima em $(-\infty, -4)$ e $(4, \infty)$ e é côncava para baixo no intervalo $(-4,4)$. Como ocorre mudança na direção da concavidade em -4 e 4, porém estes números não pertencem ao domínio da função, então não há pontos de inflexão no gráfico de $f(x)$.

Informação complementar: interseções com os eixos $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $(-2,0)$ e $(2,0)$.



***Questão* 2.**

$a)$ *Encontre os valores extremos da função $y = f(x)$ no intervalo $[0,2]$, sabendo que $f''(x) = 6x + 2$, $f(0) = -3$ e $f(2) = 7$.*

A antiderivada mais geral de $f''(x)$ é:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + C$$

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ é:

$$f(x) = x^3 + x^2 + Cx + D$$

Sabendo que $f(0) = -3$, temos:

$$f(0) = 0^3 + 0^2 + C.0 + D = -3 \therefore D = -3$$

$Sabendo\ que\ f(2) = 7, temos:$

$$f(2) = 8 + 4 + 2C - 3 = 7 \therefore C = -1$$

$Logo, f(x) = x^3 + x^2 - x - 3.$

$Como\ f$ é $uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ \mathbb{R}\ então\ f$ é $contínua$ $no\ intervalo\ fechado\ [0,2]\ e\ pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Extremo\ f\ assume\ um$ $valor\ máximo\ absoluto\ f(c)\ e\ um\ valor\ mínimo\ absoluto\ f(d)\ em\ algum$ $número\ c\ e\ d\ em\ [0,2].$

$Pelo\ Método\ do\ Intervalo\ Fechado, temos:$

$1. Os\ valores\ de\ f\ nos\ extremos\ do\ intervalo:$

$$f(0) = -3\ e\ f(2) = 7$$

$2. Os\ valores\ de\ f\ nos\ números\ críticos\ de\ f\ em\ (0,2):$

"$Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f$ é $um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde\ ou$ $f'(c) = 0\ ou\ onde\ f'(c)\ não\ existe$".

$Como\ f$ é $diferenciável\ em\ \mathbb{R}, se\ f\ possui\ um\ máximo\ ou\ mínimo\ local\ c, então$ $f'(c)\ existe\ e\ f'(c) = 0. Logo,$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0\,; x \in (0,2)$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{6} \therefore x = \frac{1}{3}\ ;\ -1 \notin (0,2)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 3 = \frac{1 + 3 - 9 - 81}{27} = -\frac{86}{27}$$

$3. Comparando\ os\ valores\ obtidos\ nas\ etapas\ 1\ e\ 2, concluimos\ que$

$-\frac{86}{27}$ é $o\ valor\ mínimo\ absoluto\ de\ f\ no\ intervalo\ fechado\ [0,2]\ e\ 7$ é $o\ valor$ $máximo\ absoluto\ de\ f\ no\ intervalo\ fechado\ [0,2].$

$b)\ Prove\ que\ e^x \geq 1 + x\ se\ x \geq 0.$

$Seja\ f(x) = e^x - 1 - x.$

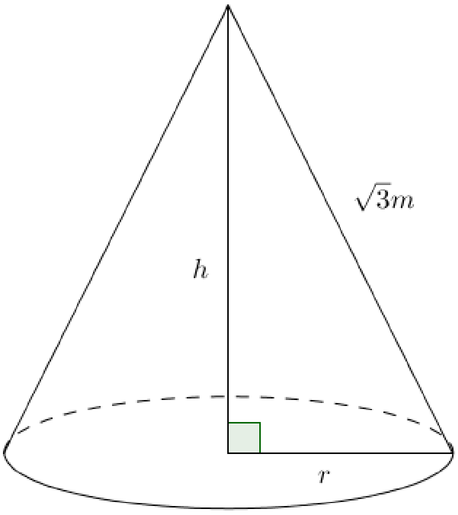
$A\ função\ f$ é $definida\ pela\ diferença\ entre\ funções\ contínuas\ e\ deriváveis$ $em\ \mathbb{R}\ e, portanto\ f$ é $contínua\ e\ diferenciável\ em\ \mathbb{R}. Logo,$

$$f'(x) = e^x - 1 \geq 0\ se\ x \geq 0.$$

$Logo, f$ é $crescente\ em\ (0, +\infty). Isso\ implica\ dizer\ que\ para\ todo\ x \geq 0, temos:$

$$f(x) \geq f(0)$$
$$e^x - 1 - x \geq e^0 - 1 - 0$$
$$e^x - 1 - x \geq 0$$
$$e^x \geq 1 + x\ se\ x \geq 0.$$

Questão 3. *Encontre a altura, o raio e o volume do cone circular reto de maior volume, cuja geratriz mede* $\sqrt{3}m$.



$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + r^2$$
$$3 = h^2 + r^2$$
$$r^2 = 3 - h^2 \quad ; h \in \left(0, \sqrt{3}\right)$$

Volume do cone:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(3h - h^3)$$

V é uma função polinomial em h e, portanto, contínua no intervalo fechado $\left[0, \sqrt{3}\right]$. *Logo, pelo Teorema do Valor Extremo V assume um valor máximo absoluto* $V(c)$ *e um valor mínimo absoluto* $V(d)$ *em algum número c e d em* $\left[0, \sqrt{3}\right]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de V nos extremos do intervalo:*

$$V(0) = V\left(\sqrt{3}\right) = 0 \text{ (não existe cone!)}$$

2. *Os valores de V nos números críticos de V no intervalo* $\left(0, \sqrt{3}\right)$:

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe".*

Como V é derivável em $\mathbb{R}$ *e, portanto, derivável em* $\left(0, \sqrt{3}\right)$, *pelo Teorema de Fermat, se V assume um valor máximo ou mínimo local em c e* $f'(c)$ *existe, então* $f'(c) = 0$.

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(3 - 3h^2)\ ;\ V'(h) = 0 \Leftrightarrow 3 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 1 \therefore h = 1m.$$
$$V(1) = \frac{2\pi}{3}m^3$$

3. *Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2 concluimos que o cone circular reto de maior volume cuja geratriz mede* $\sqrt{3}$m, *tem dimensões*

$h = 1m, r = \sqrt{2}m$ *e volume* $V = \dfrac{2\pi}{3}m^3$.

Questão 4. *Calcule os limites:*

$a)\ \lim_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$;

$*$ *De antemão, se* $x \to 0^-$, *então* $\operatorname{cotg} x < 0$ *e, portanto* $(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$ *não está definida. Logo,* $\lim_{x\to 0^-}(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$ *não existe!.*

Entretanto, se $x \to 0^+$, *então* $\operatorname{cotg} x > 0$ *e, portanto* $(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$ *está definida. Neste caso, temos:*

$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$; *Potência indeterminada* "∞^0"

$$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x . \ln(\operatorname{cotg} x)};$$

$$* \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \,.\ln(\operatorname{cotg} x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{cotg} x)}{\operatorname{cossec} x} \overset{L'H}{\longrightarrow}= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\dfrac{\operatorname{cossec}^2 x}{\operatorname{cotg} x}}{-\operatorname{cossec} x \,.\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{cossec} x}{\operatorname{cotg}^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \,.\cos^2 x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x . \ln(\operatorname{cotg} x)} = e^0 = 1$$

Por definição como um dos limites laterais em 0 *não existe, podemos dizer que* $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$ *não existe!*

$b)\ \lim_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$;

Diferença indeterminada "$\infty - \infty$"

$\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x) - x}{x.\ln(1+x)}\right]$; *Quociente indeterminado* "$\dfrac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x) - x}{x.\ln(1+x)}\right] \overset{L'H}{\longrightarrow}= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x} - 1}{\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-x}{1+x}}{\dfrac{(1+x).\ln(1+x) + x}{1+x}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x}{(1+x).\ln(1+x) + x} \overset{L'H}{\longrightarrow} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\ln(1+x) + 1 + 1} = \frac{-1}{0+2} = -\frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right] = -\frac{1}{2}$$

Questão 5

$a)$ *Mostre que um polinômio de grau* 3 *não pode ter mais de* 3 *raízes reais.*

Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *um polinômmio de grau* 3 *com* $a \neq 0$.

Suponhamos que f *possui* 4 *raízes reais* x_1, x_2, x_3 *e* x_4, *tais que*

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$$

Como f é uma função polinomial e, portanto contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, então f satisfaz as seguintes hipóteses:

1. f *é contínua nos intervalos fechado* $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ *e* $[x_3, x_4]$
2. f *é derivável nos intervalos abertos* $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ *e* (x_3, x_4)
3. $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$.

Então, pelo Teorema de Rolle existem $x_5 \in (x_1, x_2), x_6 \in (x_2, x_3)$ *e* $x_7 \in (x_3, x_4)$ *tais que*

$$f'(x_5) = f'(x_6) = f'(x_7) = 0$$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Como f' é uma função polinomial de grau 2 e, portanto, apresenta no máximo 2 raízes reais distintas, então nossa suposição está errada!

Portanto, por contradição, f não pode ter mais do que 3 raízes reais. Logo, f possui, no máximo, 3 raízes reais distintas.

$b)$ *Mostre que* $\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{4}$.

Seja $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \operatorname{arccotg} x$.

Domínio da função $f: D(f) = \{x \in \mathbb{R} |\ x \neq 0 \text{ e } x \neq -1\}$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \left[\frac{x + 1 - (x-1)}{(x+1)^2}\right] - \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{2x^2+2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = 0, \forall x \in D(f).$$

Teorema: Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b). Ou seja, $f(x) = C$.

Com isso, concluimos que f é constante nos intervalos $(-\infty, -1), (-1,0)$ e $(0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} C_1, & se\ x < -1 \\ C_2, & se -1 < x < 0 \\ C_3, & se\ x > 0 \end{cases}$$

Para $x = 1$, temos $f(x) = C_3$. Logo,

$f(1) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arccotg} 1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \therefore C_3 = \frac{\pi}{4}$

Assim,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{4}, se\ x > 0$$

Como torna
− se complicado procurar valores conhecidos nos demais intervalos
uma forma de determinar as constantes C_1 e C_2 é calculando os limites laterais da função f. Para isso,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\operatorname{arccotg} x\right]$$
$$= \lim_{x\to -1^-}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\lim_{x\to -1^-}\operatorname{arccotg} x$$

$$*\ \lim_{x\to -1^-}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{\pi}{2}\quad e\ *\ \lim_{x\to -1^-}\operatorname{arccotg} x=-\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Portanto, $C_1=\frac{\pi}{4}$.

Assim,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\operatorname{arccotg} x=\frac{\pi}{4}\ ,se\ x>0\ ou\ x<-1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\operatorname{arccotg} x\right]$$
$$= \lim_{x\to -1^+}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\lim_{x\to -1^+}\operatorname{arccotg} x$$

$$*\ \lim_{x\to -1^+}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad e\ *\ \lim_{x\to -1^-}\operatorname{arccotg} x=-\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}.$$

Portanto, $C_2=-\frac{3\pi}{4}$.

Assim,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\operatorname{arccotg} x=-\frac{3\pi}{4}\ ,se\ -1<x<0$$

Com isso, temos que a identidade

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\operatorname{arccotg} x=\frac{\pi}{4}$$

é válida para todo $x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$

13.9 Reavaliação da 1ª Média – 27 de Outubro de 2016

***Questão* 1.**

$a)$ *Suponha que* f *e* g *sejam funções deriváveis e considere a função* $h(x) = (f \circ g)(x)$. *Determine a equação da reta normal ao gráfico de* h *no ponto em que* $x = 1$, *sabendo que os pontos* $(1, -2)$ *e* $(1,1)$ *pertencem aos gráficos de* f *e* g, *respectivamente, e que as inclinações das retas tangentes a esses gráficos nesses pontos são respectivamente iguais a* 2 *e* -1.

$b)$ *Estude a diferenciabilidade da função*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(3x), \dfrac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2|x-5|, \quad \pi \leq x < 6 \end{cases}$$

***Questão* 2.**

$a)$ *Encontre as equações das retas tangentes em cada um dos 4 pontos da curva*

$$(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

onde $x = 1$.

$b)$ *Determine se a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 . \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) . \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é *contínua em* $x = 0$.

***Questão* 3.**

$a)$ *Encontre os pontos da curva* $y = e^{\operatorname{sen} x . \cos x}$ *onde a reta tangente* é *horizontal*.

$b)$ *Calcule* $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \sqrt{-x} . \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos \frac{\pi}{x^2 + x}}$.

***Questão* 4.** *Encontre os seguintes limites*:

$a)$ $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - p^2)}{x - p}$.

$b)$ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$.

***Questão* 5.**

$a)$ *Mostre que existe um número positivo tal que seu logaritmo natural* é *igual ao seu seno*.

$b)$ *Dada a função* $f(x) = \sec\left(\dfrac{\pi^x}{4}\right)$, *determine* $f'(1)$.

Questão **1**.

$a)$ *Suponha que f e g sejam funções deriváveis e considere a função $h(x) = (f \circ g)(x)$. Determine a equação da reta normal ao gráfico de h no ponto em que $x = 1$, sabendo que os pontos $(1, -2)$ e $(1,1)$ pertencem aos gráficos de f e g, respectivamente, e que as inclinações das retas tangentes a esses gráficos nesses pontos são respectivamente iguais a 2 e -1.*

Do enunciado temos as seguintes informações:

$$f(1) = -2, g(1) = 1, f'(1) = 2 \text{ e } g'(1) = -1$$

Ponto de abscissa $x = 1$:

$$h(x) = f\big(g(x)\big)$$
$$h(1) = f\big(g(1)\big) = f(1) = -2 \therefore \text{ponto } (1, -2)$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

No ponto de abscissa $x = 1$, temos:

$$h'(1) = f'\big(g(1)\big).g'(1) = f'(1).g'(1) = 2 \times (-1) = -2$$

Logo, o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de h no ponto $(1, -2)$ é:

$$m_n = -\frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{2}$$

Equação da reta normal:

$$y - y_0 = m_n(x - x_0)$$
$$y + 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$b)$ *Estude a diferenciabilidade da função*

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(3x), & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2|x - 5|, & \pi \leq x < 6 \end{cases}$$

f é uma função definida por partes onde $\text{sen}(3x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, f é contínua em $(\pi/2\,, \pi)$ e $2|x - 5|$ também é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, f é contínua em $(\pi, 6)$.

Analisando a continuidade de f em π, temos:

$f(\pi) = 2|\pi - 5| = 2(5 - \pi) = 10 - 2\pi.$
$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} \text{sen}(3x) = 0.$

Logo, como $\lim_{x \to \pi^-} f(x) \neq f(\pi)$, então f não é contínua em π e, consequentemente, f não é diferenciável em π.

$Como\ a\ função$ $\operatorname{sen}(3x)$ $é\ contínua\ e\ derivável\ em\ \mathbb{R}, então\ f\ é\ derivável\ em\ (\pi/2\,,\pi).$
$Com\ relação\ à\ função\ 2|x-5|, temos:$

$$2|x-5| = \begin{cases} 2(x-5), & 5 \leq x < 6 \\ -2(x-5), & \pi \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$Analisando\ a\ diferenciabilidade\ de\ f\ em\ 5, temos:$

$$f'_{+}(5) = \lim_{x\to 5^+} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5^+} \frac{2(x-5)-0}{x-5} = \lim_{x\to 5^+} \frac{2(x-5)}{(x-5)} = \lim_{x\to 5^+} 2 = 2.$$
$$f'_{-}(5) = \lim_{x\to 5^-} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5^-} \frac{-2(x-5)-0}{x-5} = \lim_{x\to 5^-} -\frac{2(x-5)}{(x-5)} = \lim_{x\to 5^-} -2 = -2.$$

$Como\ \ f'_{+}(5) \neq f'_{-}(5), então\ f\ não\ é\ derivável\ em\ 5.$

$Logo, f\ é\ diferenciável\ em\ (\pi/2\,,\pi) \cup (\pi,5) \cup (5{,}6).$

***Questão* 2.**

$a)\ Encontre\ as\ equações\ das\ retas\ tangentes\ em\ cada\ um\ dos\ 4\ pontos\ da\ curva$

$$(x^2+y^2-4x)^2 = 2(x^2+y^2)$$

$onde\ x = 1.$

$$(1+y^2-4)^2 = 2(1+y^2)$$
$$(y^2-3)^2 = 2+2y^2$$
$$y^4-6y^2+9 = 2+2y^2$$
$$y^4-8y^2+7 = 0$$

$Equação\ biquadrática\ em\ a = y^2.$

$$a^2-8a+7 = 0$$
$$\Delta = 64-28 = 36$$
$$a = \frac{8\pm 6}{2}$$
$$a_1 = 7\ e\ a_2 = 1$$

$y = \pm\sqrt{7}\ e\ y = \pm 1.$

$Os\ 4\ pontos\ em\ questão\ são\ A\left(1,-\sqrt{7}\right), B\left(1,\sqrt{7}\right), C(1,-1)\ e\ D(1{,}1).$

$Derivando\ implicitamente\ a\ expressão\ da\ curva\ temos,$

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2-4x)^2 = \frac{d}{dx}[2(x^2+y^2)]$$
$$2(x^2+y^2-4x)(2x+2yy'-4) = 2(2x+2yy')$$

$Nos\ pontos\ onde\ x = 1, temos:$

$$2(1+y^2-4)(2+2yy'-4) = 2(2+2yy')$$
$$(y^2-3)(2yy'-2) = (2yy'+2)$$
$$(y^2-3)(yy'-1) = (yy'+1)$$
$$yy'(y^2-3)-(y^2-3) = yy'+1$$
$$y'[y(y^2-3)-y] = 1+y^2-3$$

$$y' = \frac{y^2 - 2}{y(y^2 - 4)}$$

$$y'_A = \frac{7 - 2}{-\sqrt{7}(7 - 4)} = -\frac{5}{3\sqrt{7}} = -\frac{5\sqrt{7}}{21}$$

Equação da reta tangente em $A\left(1, -\sqrt{7}\right)$:

$$y + \sqrt{7} = -\frac{5\sqrt{7}}{21}(x - 1)$$
$$y = -\frac{5\sqrt{7}}{21}x - \frac{16\sqrt{7}}{21}$$

$$y'_B = \frac{7 - 2}{\sqrt{7}(7 - 4)} = \frac{5}{3\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{21}.$$

Equação da reta tangente em $B\left(1, \sqrt{7}\right)$:

$$y - \sqrt{7} = \frac{5\sqrt{7}}{21}(x - 1)$$
$$y = \frac{5\sqrt{7}}{21}x + \frac{16\sqrt{7}}{21}$$

$$y'_C = \frac{1 - 2}{-1(1 - 4)} = -\frac{1}{3}.$$

Equação da reta tangente em $C(1, -1)$:

$$y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$
$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$y'_D = \frac{1 - 2}{1(1 - 4)} = \frac{1}{3}.$$

Equação da reta tangente em $D(1,1)$:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$$
$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$b)$ *Determine se a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^4.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{2} . \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$Dizemos\ que\ uma\ função\ f\ é\ contínua\ no\ número\ a\ se, somente\ se,$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$Analisando\ a\ continuidade\ de\ f\ em\ 0, temos:$
$f(0) = 0$
$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{2} . \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right);$

$\forall x \in \mathbb{R}, com\ x \neq 0\ temos$

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right) \leq 1$$

$Como\ \ x^4/2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}, então\ ...$

$$-\frac{x^4}{2} \leq \frac{x^4}{2} . \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right) \leq \frac{x^4}{2}$$

$Seja\ g(x) = -\frac{x^4}{2}, f(x) = \frac{x^4}{2} . \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right), h(x) = \frac{x^4}{2}.$

$Se\ g(x) \leq f(x) \leq h(x)\ para\ todo\ x\ (exceto\ possivelmente\ em\ 0)\ e\ \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 0, pelo\ Teorema\ do\ Confronto$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{2} . \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

$Logo, \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0\ e, portanto, f\ é\ contínua\ em\ 0.$

Questão 3.

$a)\ Encontre\ os\ pontos\ da\ curva\ y = e^{\operatorname{sen} x . \cos x}\ onde\ a\ reta\ tangente\ é\ horizontal.$
$D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = e^{\operatorname{sen} x . \cos x} . (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$$
$$y' = e^{\operatorname{sen} x . \cos x} . \cos(2x)$$

$Onde\ a\ reta\ tangente\ é\ horizontal, temos\ y' = 0. Portanto,$

$$y' = 0 \Longrightarrow e^{\operatorname{sen} x . \cos x} . \cos(2x) = 0\ ;\ \ e^{\operatorname{sen} x . \cos x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\cos(2x) = 0$$
$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$y = e^{\operatorname{sen} x.\cos x} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)}$.

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} 1, & k = \pm 2n, \quad n \in \mathbb{N} \\ -1, & k = \pm(2n+1), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$Os\ pontos\ são\ da\ forma\ \left(\frac{\pi}{4} \pm n\pi, \sqrt{e}\right)\ e\ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{(2n+1)}{2}\pi, \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$

$b)\ Calcule\ \lim_{x\to 0^-} \sqrt{-x}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos\frac{\pi}{x^2+x}}.$

$\forall x \in \mathbb{R}, com\ x \neq 0, temos:$

$$-1 \leq \cos\frac{\pi}{x^2+x} \leq 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{-1} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos\frac{\pi}{x^2+x}} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos\frac{\pi}{x^2+x}} \leq \sqrt{e}$$

$Se\ x \to 0^-\ então\ x < 0\ e, portanto, \sqrt{-x}\ está\ definido\ e\ \sqrt{-x} > 0. Logo,$

$$\sqrt{-x}\,\frac{1}{\sqrt{e}} \leq \sqrt{-x}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos\frac{\pi}{x^2+x}} \leq \sqrt{-x}.\sqrt{e}$$

$Seja\ f(x) = \sqrt{-x}\,\frac{1}{\sqrt{e}}, g(x) = \sqrt{-x}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos\frac{\pi}{x^2+x}}\ e\ h(x) = \sqrt{-x}.\sqrt{e}.$

$Se\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ para\ todo\ x\ (exceto\ possivelmente\ em\ 0)\ e\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x) = 0, então\ pelo\ Teorema\ do\ Confronto$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$$

$Portanto,$

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{-x}.\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos\frac{\pi}{x^2+x}} = 0.$$

Questão 4. *Encontre os seguintes limites:*

$a)\ \lim_{x\to p} \frac{\operatorname{sen}(x^2-p^2)}{x-p}. Indeterminação\ tipo\ "\frac{0}{0}".$

$$= \lim_{x\to p}\left[\frac{\operatorname{sen}(x^2-p^2)}{x-p}.\frac{x+p}{x+p}\right]$$

$$= \lim_{x\to p}\frac{\operatorname{sen}(x^2-p^2)}{x^2-p^2}.(x+p)$$

$$= \lim_{x\to p}\frac{\operatorname{sen}(x^2-p^2)}{x^2-p^2} \times \lim_{x\to p}(x+p)$$

$* \lim_{x\to p}\frac{\operatorname{sen}(x^2-p^2)}{x^2-p^2}\ ;\ \ Seja\ \theta = x^2 - p^2. Se\ x \to p, então\ \theta \to 0.$

$$\lim_{x\to p}\frac{\text{sen}(x^2-p^2)}{x^2-p^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}=1.\,(*\ \textit{Limite Fundamental Trigonométrico!})$$

$* \lim_{x\to p}(x+p)=p+p=2p.$

$$\lim_{x\to p}\frac{\text{sen}(x^2-p^2)}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{\text{sen}(x^2-p^2)}{x^2-p^2}\times\lim_{x\to p}(x+p)=1\times 2p=2p.$$

$b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3}$. *Indeterminação tipo* $"\frac{\infty}{\infty}"$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3}&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{(x^2+3)\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{x^{\frac{3}{2}}}_{\substack{\downarrow\\ \infty}}\underbrace{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}_{\substack{\downarrow\\ 1}}\underbrace{\left(1-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)}_{\substack{\downarrow\\ 1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{x^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)}_{\substack{\downarrow\\ \infty}}}=0.\end{aligned}$$

***Questão* 5.**

$a)$ *Mostre que existe um número positivo tal que seu logaritmo natural é igual ao seu seno.*

$*$ *Mostre que existe algum número* $c>0$, *tal que* $\ln c=\text{sen}\,c$.

Seja $f(x)=\ln x-\text{sen}\,x$, *tal que* $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ *contínua de modo que*

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\left(\frac{\pi}{6}\right)-\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$; *como* $0<\frac{\pi}{6}<1$, *então* $\ln\left(\frac{\pi}{6}\right)<0$.
Logo, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)<0$.

$f(\pi)=\ln\pi-\text{sen}\,\pi=\ln\pi-0=\ln\pi$; *como* $\pi>1$, *então* $\ln\pi>\ln 1=0$.
Logo, $f(\pi)>0$.

Como f *é contínua onde está definida, isto é, em seu domínio, então* f *é contínua no intervalo fechado* $[\pi/6\,,\pi]$ *e* 0 *é um número entre* $f(\pi/6)$ *e* $f(\pi)$, *então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número* $c\in(\pi/6\,,\pi)$ *tal que* $f(c)=0$.

$Onde\ f(c) = 0 \Longrightarrow \ln c - \operatorname{sen} c = 0 \therefore \ln c = \operatorname{sen} c\ \ , com\ c \in (\pi/6\,, \pi) \therefore c > 0.$
$Então, existe\ um\ número\ positivo\ tal\ que\ seu\ logaritmo\ natural\ \text{é}\ igual\ ao\ seu\ seno.$

$b)\ Dada\ a\ função\ f(x) = \sec\left(\frac{\pi^x}{4}\right), determine\ f'(1).$

$$f'(x) = \frac{1}{4}\pi^x \ln \pi \,.\, \sec\left(\frac{\pi^x}{4}\right).\operatorname{tg}\left(\frac{\pi^x}{4}\right)$$

$$f'(1) = \frac{1}{4}\pi^1 . \ln \pi \,.\, \sec\left(\frac{\pi^1}{4}\right).\operatorname{tg}\left(\frac{\pi^1}{4}\right)$$

$$f'(1) = \frac{\pi}{4}\ln \pi \,.\, \sqrt{2}.1$$

$$f'(1) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.\ln \pi$$

13.10 Reavaliação da 1ª Média – 29 de Outubro de 2016

Questão 1.

a) Considere as funções $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^3 + 1$, $h(x) = (f \circ g)(x)$ *e* $i(x) = (g \circ f)(x)$. *SEM EXPLICITAR* $h(x)$ *e* $i(x)$, *use a regra da cadeia para encontrar as derivadas de* h *e de* i.

b) Prove que a equação $\operatorname{sen}^3 x + e^x = 2e^\pi$ *admite pelo menos uma raíz real.*

Questão 2.

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{sen}(\cos x^3 + x^2) \cdot \operatorname{sen}\left[\dfrac{1}{x-1} \cdot (x^{73} - 1)\right]$. *Este limite coincide com o coeficiente angular de uma reta tangente a certa curva no ponto* (e, π). *Qual é a equação da reta normal a essa curva nesse mesmo ponto?*

b) Sendo $f(x) = \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}\left(\sqrt{\dfrac{\pi^3}{x}}\right)$, *encontre* $f'(\pi)$.

Questão 3. *Calcule os seguintes limites:*

a) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{14}}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x - 2}$.

Questão 4.

a) Seja f *a função dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\operatorname{tg}(ax), & x \neq 0 \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

Determine a, *de modo que* f *seja contínua em* $x = 0$.

b) Dada a curva $f(x) = \pi^{\operatorname{tg} x}$, *encontre a reta a ela tangente no ponto em que* $x = 0$. *Depois, mostre que a área do triângulo formado por ela e pelos eixos coordenados é menor que* 1.

Questão 5

a) Encontre as assíntotas verticais e horizontais, se existirem, da curva $y = \left(\dfrac{2x+1}{4+3x}\right)^2$.

b) Admitindo a relação $2x = 6y - \cos y + 1$ *define* $y = f(x)$ *duas vezes derivável, ache* f'' *no ponto em que* $y = 0$.

***Questão* 1.**

a) Considere as funções $f(x) = \sqrt[3]{x}, g(x) = x^3 + 1, h(x) = (f \circ g)(x)$ *e* $i(x) = (g \circ f)(x)$. *SEM EXPLICITAR* $h(x)$ *e* $i(x)$, *use a regra da cadeia para encontrar as derivadas de* h *e de* i.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \ e \ g'(x) = 3x^2$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}\left[f\big(g(x)\big)\right] = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx} \qquad e \qquad \frac{di}{dx} = \frac{d}{dx}\left[g\big(f(x)\big)\right] = \frac{dg}{df}\cdot\frac{df}{dx}$$

$$\frac{df}{dg} = f'\big(g(x)\big) = \frac{1}{3\sqrt[3]{[g(x)]^2}} \qquad \frac{dg}{df} = g'\big(f(x)\big) = 3[f(x)]^2$$

$$\frac{dg}{dx} = g'(x) = 3x^2 \qquad \frac{df}{dx} = f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{[g(x)]^2}}\cdot 3x^2 \qquad \frac{di}{dx} = 3[f(x)]^2\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{[g(x)]^2}} \qquad \frac{di}{dx} = \frac{[f(x)]^2}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}, x \neq -1 \qquad \frac{di}{dx} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = 1, x \neq 0$$

b) Prove que a equação $\operatorname{sen}^3 x + e^x = 2e^\pi$ *admite pelo menos uma raíz real.*

Definimos $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + e^x - 2e^\pi$. *Dessa forma, temos* f *definida pela soma e diferença de funções contínuas em* $\mathbb{R}$ *e portanto,* f *é contínua em* $\mathbb{R}$. *De tal modo podemos afirmar que* f *é contínua em qualquer intervalo fechado* $I \subset \mathbb{R}$.

Temos ainda que $f(\pi) = -e^\pi$ *e* $f(2\pi) = e^\pi(e^\pi - 1)$. *Logo,* $f(\pi) < 0$ *e* $f(2\pi) > 0$.

Como f *é uma função contínua no intervalo fechado* $[\pi, 2\pi]$ *e* 0 *é um número entre* $f(\pi)$ *e* $f(2\pi)$, *pelo Teorema do Valor Intermediário, então existe algum número* $x \in (\pi, 2\pi)$ *tal que* $f(x) = 0$. *Ou seja,* $f(x) = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}^3 x + e^x = 2e^\pi$ *para algum* $x \in (\pi, 2\pi)$ *e portanto, a equação dada possui pelo menos uma raíz real.*

***Questão* 2.**

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{sen}(\cos x^3 + x^2)\cdot \operatorname{sen}\left[\frac{1}{x-1}\cdot(x^{73}-1)\right]$. *Este limite coincide com o coeficiente angular de uma reta tangente a certa curva no ponto* (e, π). *Qual é a equação da reta normal a essa curva nesse mesmo ponto?*

$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{sen}(\cos x^3 + x^2) = \operatorname{sen}\left[\lim_{x\to 1^-}(\cos x^3 + x^2)\right] = \operatorname{sen}(\cos(-1) + 1);$$

Obs.: Como $\cos x$ *é uma função par, então* $\operatorname{sen}(\cos(-1)+1) = \operatorname{sen}(\cos(1)+1)$.

$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{sen}\left[\frac{1}{x-1}\cdot(x^{73}-1)\right] = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to 1^-}\frac{x^{73}-1}{x-1}\right);$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^{73}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^{72}+x^{71}+\cdots+x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-}(x^{72}+x^{71}+\cdots+x+1)$$

$\lim_{x\to 1^-}(x^{72}+x^{71}+\cdots+x+1)=\underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{73\ termos}=73.$

$\lim_{x\to 1^-}\operatorname{sen}\left[\frac{1}{x-1}\cdot(x^{73}-1)\right]=\operatorname{sen}\left(\lim_{x\to 1^-}\frac{x^{73}-1}{x-1}\right)=\operatorname{sen}(73)$

Como o limite dos fatores existem, então o limite do produto é o produto dos limites. Logo,

$\lim_{x\to 1^-}\operatorname{sen}(\cos x^3+x^2)\cdot\operatorname{sen}\left[\frac{1}{x-1}\cdot(x^{73}-1)\right]=\operatorname{sen}[\cos(1)+1]\cdot\operatorname{sen}(73).$

Como este valor é coeficiente angular da reta tangente, então o coeficiente angular da reta normal é

$$m_n=-\frac{1}{\operatorname{sen}[\cos(1)+1]\cdot\operatorname{sen}(73)}$$

Equação da reta normal a curva no ponto (e,π) e coeficiente angular m_n:

$$y-\pi=-\frac{1}{\operatorname{sen}[\cos(1)+1]\cdot\operatorname{sen}(73)}(x-e)$$
$$y=-\frac{1}{\operatorname{sen}[\cos(1)+1]\cdot\operatorname{sen}(73)}(x-e)+\pi$$

$b)$ *Sendo* $f(x)=\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\pi^3}{x}}\right)$, *encontre* $f'(\pi)$.

Domínio da função: $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\ e\ x\neq\frac{4\pi}{4k^2+4k+1}, com\ k\in\mathbb{N}\right\}$

$f'(x)=3\operatorname{tg}^2 x\cdot\sec^2 x+\sec^2 x\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^3}{x}}}\cdot\left(-\frac{\pi^3}{x^2}\right)$

$f'(x)=3\operatorname{tg}^2 x\cdot\sec^2 x-\frac{\pi^3}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{\pi^3}}\cdot\sec^2 x$

$f'(\pi)=3\operatorname{tg}^2 \pi\cdot\sec^2 \pi-\frac{\pi^3}{2\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{\pi^3}}\cdot\sec^2 \pi$

$f'(\pi)=0-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\pi}.(-1)^2$

$f'(\pi)=-\frac{1}{2}$

***Questão* 3.** *Calcule os seguintes limites:*

$a)\ \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}}.$

$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}}=\lim_{x\to 7}\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{7}}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{14}}{\sqrt{x+7}+\sqrt{14}}\right]=$

$\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(\sqrt{x+7}+\sqrt{14})}{(x-7)(\sqrt{x}+\sqrt{7})}=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{14}}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}=\frac{\lim_{x\to 7}\sqrt{x+7}+\lim_{x\to 7}\sqrt{14}}{\lim_{x\to 7}\sqrt{x}+\lim_{x\to 7}\sqrt{7}}=$

$\frac{\sqrt{7+7}+\sqrt{14}}{\sqrt{7}+\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{14}}{2\sqrt{7}}=\sqrt{2}.$

$b) \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x - 2}.$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2})}{(\sqrt[4]{x})^4 - (\sqrt[4]{2})^4} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2})}{(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}) \cdot (\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{2x^2} + \sqrt[4]{4x} + \sqrt[4]{8})} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{2x^2} + \sqrt[4]{4x} + \sqrt[4]{8}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{8}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{8}}.$$

***Questão* 4.**

$a)$ *Seja f a função dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \operatorname{tg}(ax), & x \neq 0 \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

Determine a, de modo que f seja contínua em $x = 0$.

Pela definição de continuidade de uma função em um número, para que f seja contínua em $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

Se $x \to 0$, então $x \neq 0$ e, portanto,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \operatorname{tg}(ax) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{tg}(ax)}{x} . (x - 1)\right]$$

Obs.: Limite fundamental trigonométrico $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} = 1, k \neq 0.$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} \cdot \frac{1}{\cos kx} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(kx)}{kx} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{tg}(ax)}{x} . (x - 1)\right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{tg}(ax)}{x} . (x - 1) \cdot \frac{a}{a}\right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{tg}(ax)}{ax} . (ax - a)\right];$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{tg}(ax)}{ax} . (ax - a)\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(ax)}{ax} \times \lim_{x \to 0} (ax - a) = 1 \times (-a) = -a.$$

Portanto, $\lim_{x \to 0} f(x) = -a.$

Para que f seja contínua em 0

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \therefore a = -3$$

$b)$ *Dada a curva $f(x) = \pi^{\operatorname{tg} x}$, encontre a reta a ela tangente no ponto em que $x = 0$. Depois, mostre que a área do triângulo formado por ela e pelos eixos coordenados é menor que 1.*

Domínio da função: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Ponto de abscissa $x = 0$:

$$f(0) = \pi^{\operatorname{tg} 0} = \pi^0 = 1. \text{ Ponto } (0,1)$$

$f'(x) = \pi^{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x \cdot \ln \pi$
$f'(0) = \pi^{\operatorname{tg} 0} \cdot \sec^2 0 \cdot \ln \pi$
$f'(0) = \ln \pi.$

Equação da reta tangente a curva $f(x)$ no ponto $(0,1)$ e coeficiente angular $f'(0) = \ln \pi$:

$$y - 1 = \ln \pi \, (x - 0)$$
$$y = x \cdot \ln \pi + 1$$

Interseções com os eixos coordenados: $A(0,1)$ *e* $B\left(-\frac{1}{\ln \pi}, 0\right)$

Área do triângulo formado pela reta tangente e os eixos coordenados:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2 \ln \pi}$$

Como $\pi > e$ *e, consequentemente,* $\ln \pi > \ln e = 1$, *então* $\ln \pi > 1$. *Portanto,*

$$\frac{1}{2 \ln \pi} < 1.$$

***Questão* 5**

a) *Encontre as assíntotas verticais e horizontais, se existirem, da curva* $y = \left(\frac{2x + 1}{4 + 3x}\right)^2$.

Domínio da função: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{4}{3}\right\}$

A reta $x = a$ *é uma assíntota vertical ao gráfico da curva* $y = f(x)$ *se* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Pela definição de assíntota vertical, estas ocorrem nas descontinuidades tipo infinita de uma função. Pelo domínio da função, temos uma descontinuidade em $x = -\frac{4}{3}$.

$$\lim_{x \to -\frac{4}{3}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{4}{3}^+} \left(\frac{2x + 1}{4 + 3x}\right)^2 = \lim_{x \to -\frac{4}{3}^+} \frac{\overbrace{(2x + 1)^2}^{25/9}}{\underbrace{(4 + 3x)^2}_{0^+}} = +\infty$$

Logo, a reta $x = -\frac{4}{3}$ *é assíntota vertical ao gráfico da curva* $y = \left(\frac{2x + 1}{4 + 3x}\right)^2$.

A reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico da curva* $y = f(x)$ *se* $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ *ou* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x + 1}{4 + 3x}\right)^2 = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^2 + 4x + 1}{9x^2 + 24x + 16} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{9 + \frac{24}{x} + \frac{16}{x^2}} =$$

$$\frac{\lim_{x \to \pm\infty} 4 + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x} + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \to \pm\infty} 9 + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{24}{x} + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{16}{x^2}} = \frac{4 + 0 + 0}{9 + 0 + 0} = \frac{4}{9}.$$

Logo, a reta $y = \frac{4}{9}$ *é a assíntota horizontal ao gráfico da curva* $y = \left(\frac{2x + 1}{4 + 3x}\right)^2$.

$b)$ *Admitindo a relação* $2x = 6y - \cos y + 1$ *define* $y = f(x)$ *duas vezes derivável, ache* f'' *no ponto em que* $y = 0$.

$$2x = 6 \times 0 - \cos 0 + 1$$
$$2x = 0 - 1 + 1$$
$$2x = 0$$
$$x = 0 \quad ; \quad Ponto\ (0,0)$$

Derivando implicitamente a expressão da curva, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(2x) = \frac{d}{dx}(6y) - \frac{d}{dx}(\cos y) + \frac{d}{dx}(1)$$
$$2 = 6\frac{dy}{dx} - \operatorname{sen} y \cdot \frac{dy}{dx} + 0$$
$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{6 - \operatorname{sen} y}$$
$$f'(0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,0)} = \frac{2}{6 - \operatorname{sen} 0} = \frac{1}{3}.$$
$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}[2(6 - \operatorname{sen} y)^{-1}]$$
$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = -2(6 - \operatorname{sen} y)^{-2} \cdot (-\cos y) \cdot \frac{dy}{dx}$$
$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\cos y}{(6 - \operatorname{sen} y)^2} \cdot \frac{dy}{dx}$$
$$f''(0) = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(0,0)} = \frac{2\cos 0}{(6 - \operatorname{sen} 0)^2} \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,0)}$$
$$f''(0) = \frac{2}{36} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{54}.$$

13.11 Reavaliação da 2ª Média – 27 de Outubro de 2016

Questão 1.

a) *Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ *paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.*

b) *Mostre que* $\operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen} x)$, $\forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$.

Questão 2.

a) *Seja* $f(x) = \pi^2 + 2^x + x^2 + x^{\frac{1}{x}}$. *Determine* $f'(1)$.

b) *Uma bola de neve tem a forma esférica. Utilize diferenciais para determinar o aumento aproximado do volume da bola de neve quando seu raio aumenta de* 1,5*cm para* 1,6*cm*.

Questão 3.

a) *Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função* $f(x) = x - 4\sqrt{x}$, *no intervalo* $[0,5]$.

b) *Uma viatura da polícia, vindo no norte e aproximando − se de um cruzamento em ângulo reto, está perseguindo um carro em alta velocidade, que, no cruzamento toma a direção leste. Quando a viatura está a* 0,6*km ao norte do cruzamento e o carro do fugitivo a* 0,8*km a leste, o radar da polícia detecta que a distância entre a viatura e o fugitivo está aumentando a* 20 *km/h. Se a viatura está se deslocando a* 60 *km/h no instante dessa medição, qual é a velocidade do fugitivo?*

Questão 4.

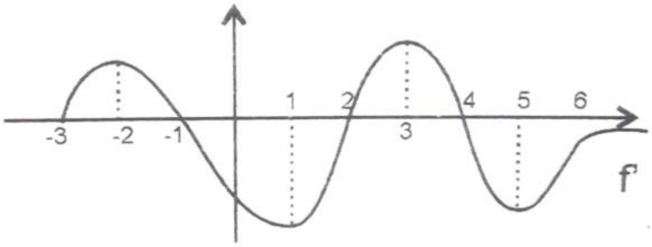
a) *Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume possível, que pode ser inscrito num cone cuja base tem raio e altura iguais a* 9 *e* 18, *respectivamente.*

b) *Calcule* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1 - \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2}}$.

Questão 5.

a) *Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que* $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geq |x - y|$, $\forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) *O gráfico da derivada de uma função* f *é dada abaixo:*



$i.$ Onde f está crescendo e onde f está decrescendo.
$ii.$ Os pontos de máximo e mínimo locais de f.
$iii.$ Os pontos de inflexão de f.

***Questão* 1.**

a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ *paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.*

Bissetriz dos quadrantes ímpares: reta $y = x$.

Como a reta tangente ao gráfico de f *é paralela a reta* $y = x$*, então estas retas possuem o mesmo coeficiente angular. Logo, devemos encontrar* $x \in D(f)$ *tal que* $f'(x) = 1$.

Domínio da função : $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \left[1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \;\; ; \;\; D(f') = \mathbb{R}$$

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + x^2} = 1 \therefore x = 0.$

Logo, o ponto do gráfico da função f *onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares é o ponto de abscissa* $x = 0$*. Ponto* $(0,0)$.

Equação da reta tangente:

$$y - 0 = 1(x - 0)$$

$$y = x$$

A bissetriz dos quadrantes ímpares $(y = x)$ *é a reta tangente à curva.*

$*$ *Obs.: A título de curiosidade,* $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \operatorname{arcsenh} x$.

b) Mostre que $\operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen} x)\,, \forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$.

Sejam f *e* g *funções tais que* $f(x) = \operatorname{tg}(\arccos x)$ *e* $g(x) = \operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen} x)$ *e* $h(x) = f(x) - g(x)$.

Analisando o domínio das funções f, g *e* h*, temos:*

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1 \; e \; x \ne 0\}$$

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1 \; e \; x \ne 0\}$$

$$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1 \; e \; x \ne 0\}$$

Analisando a derivada da função h*, temos:*

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$h'(x) = \sec^2(\arccos x) \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right] - [-\operatorname{cossec}^2(\operatorname{arcsen} x)] \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$h'(x) = \frac{\operatorname{cossec}^2(\operatorname{arcsen} x) - \sec^2(\arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$*$ *Obs.:* $\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arccossec}\frac{1}{x}$ *e* $\arccos x = \operatorname{arcsec}\frac{1}{x}$.

$$h'(x) = \frac{\operatorname{cossec}^2\left(\operatorname{arccossec}\frac{1}{x}\right) - \sec^2\left(\operatorname{arcsec}\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} = 0, \forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$$

$Se\ h'(x) = 0, \forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$ *então* h *é constante nos intervalos* $(-1,0)$ *e* $(0,1)$. *Logo*,

$$f(x) - g(x) = C_1 \ em\ (-1,0)$$
$$f(x) - g(x) = C_2 \ em\ (0,1)$$

Onde C_1 *e* C_2 *são constantes a serem determinadas.*

Calculando h *em* $x = -\frac{1}{2}$ *e em* $x = \frac{1}{2}$, *temos*:

$h\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{2}\right) - \operatorname{cotg}\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$

Portanto, $h(x) = 0$ *em* $(0,1)$.

$h\left(-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\arccos -\frac{1}{2}\right) - \operatorname{cotg}\left(\operatorname{arcsen} -\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0.$

Portanto, $h(x) = 0$ *em* $(-1,0)$.

Logo, $h(x) = \operatorname{tg}(\arccos x) - \operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen} x) = 0, \forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$.

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen} x), \forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$$

Questão 2.

$a)$ *Seja* $f(x) = \pi^2 + 2^x + x^2 + x^{\frac{1}{x}}$. *Determine* $f'(1)$.

Domínio da função: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Seja $g(x) = x^{\frac{1}{x}}$, *com* $x > 0$. *Logo*, $g(x) > 0$.

$\ln g(x) = \ln x^{\frac{1}{x}}$

$\ln g(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln x$

Por diferenciação logarítmica, obtemos:

$\frac{g'(x)}{g(x)} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x^2}$

$g'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \cdot [1 - \ln x] = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot [1 - \ln x]$

$g'(x) = x^{\frac{1}{x}-2} \cdot (1 - \ln x)$

Com isso, calculando a derivada da função f:

$f'(x) = 0 + 2^x \cdot \ln 2 + 2x + x^{\frac{1}{x}-2} \cdot (1 - \ln x)$
$f'(1) = 2 \ln 2 + 2 + 1(1 - \ln 1)$
$f'(1) = \ln 4 + 3$

$b)$ *Uma bola de neve tem a forma esférica. Utilize diferenciais para determinar o aumento aproximado do volume da bola de neve quando seu raio aumenta de* $1{,}5cm$ *para* $1{,}6cm$.

Seja x *o raio da bola de neve e* $f(x)$ *seu volume. Então*,

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$$

$Quando\ x = 1{,}5cm\ ou\ \ 3/2\ cm, temos$:

$$f(1{,}5cm) = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2}\pi = 4{,}5\pi cm^3$$

$f'(x) = 4\pi x^2\ e\ f'(1{,}5cm) = 9\pi\ cm^3/cm$

$Quando\ o\ raio\ tem\ uma\ variação\ de\ 0{,}10cm\ ou\ \ 1/10\ cm, por\ diferenciais,$ $queremos\ estimar\ f(1{,}6) = f(1{,}5 + 0{,}1). Sobre\ diferenciais, para\ pequenas$ $variações\ em\ x, podemos\ dizer\ que\ \Delta y \approx dy. Ou\ seja,$

$$f(x + \Delta x) - f(x) \cong f'(x) \cdot dx$$
$$f(1{,}5 + 0{,}1) - f(1{,}5) \cong f'(1{,}5) \cdot 0{,}1$$
$$f(1{,}6) - 4{,}5\pi \cong 9\pi \cdot 0{,}1$$
$$f(1{,}6) \cong 5{,}4\pi cm^3$$

Questão 3.

$a)\ Determine\ os\ valores\ máximo\ e\ mínimo\ absolutos\ da\ função\ f(x) = x - 4\sqrt{x},$ $no\ intervalo\ [0{,}5].$

$Como\ f\ é\ uma\ função\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [0{,}5], pelo\ Teorema\ do\ Valor$ $Extremo\ f\ assume\ um\ valor\ máximo\ absoluto\ f(c)\ e\ um\ valor\ mínimo\ absoluto$ $f(d)\ em\ algum\ número\ c\ e\ d\ em\ [0{,}5].$

$Pelo\ Método\ do\ Intervalo\ Fechado, temos$:

$1. Os\ valores\ de\ f\ nos\ extremos\ do\ intervalo$:

$f(0) = 0.$
$f(5) = 5 - 4\sqrt{5}.$

$2. Os\ valores\ de\ f\ nos\ números\ críticos\ de\ f\ em\ (0{,}5)$:

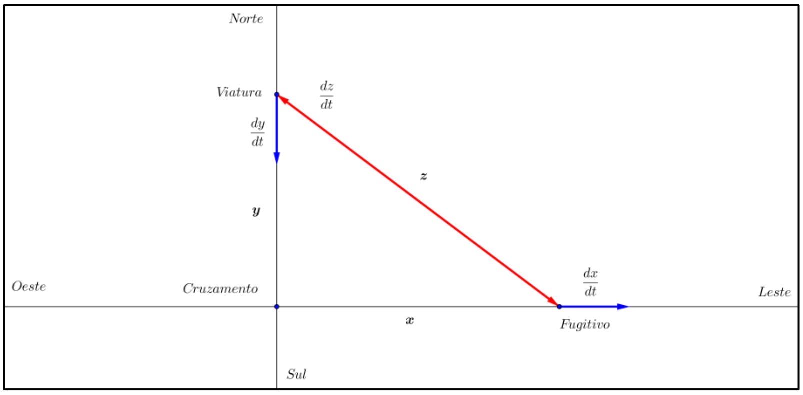
"$Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f\ é\ um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde\ ou$ $f'(c) = 0\ ou\ onde\ f'(c)\ não\ existe$"

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \therefore x = 4.$
$f'(x)\ não\ existe\ em\ x = 0, porém\ 0 \notin (0{,}5).$
$f(4) = 4 - 4\sqrt{4} = -4.$

$3. Comparando\ os\ valores\ obtidos\ concluímos\ que - 4\ é\ o\ valor\ mínimo$ $absoluto\ de\ f\ no\ intervalo\ fechado\ [0{,}5]\ e\ 0\ é\ o\ valor\ máximo\ absoluto$ $de\ f\ no\ intervalo\ fechado\ [0{,}5].$

$b)\ Uma\ viatura\ da\ polícia, vindo\ no\ norte\ e\ aproximando - se\ de\ um\ cruzamento$ $em\ ângulo\ reto, está\ perseguindo\ um\ carro\ em\ alta\ velocidade, que, no\ cruzamento$ $toma\ a\ direção\ leste. Quando\ a\ viatura\ está\ a\ 0{,}6km\ ao\ norte\ do\ cruzamento\ e$ $o\ carro\ do\ fugitivo\ a\ 0{,}8km\ a\ leste, o\ radar\ da\ polícia\ detecta\ que\ a\ distância$ $entre\ a\ viatura\ e\ o\ fugitivo\ está\ aumentando\ a\ 20\ km/h. Se\ a\ viatura\ está\ se$ $deslocando\ a\ 60\ km/h\ \ no\ instante\ dessa\ medição, qual\ é\ a\ velocidade\ do\ fugitivo?$



Da ilustração tiramos a seguinte relação:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Quando $x = 0{,}8km$ *e* $y = 0{,}6km$, *temos*:

$$z^2 = 0{,}64 + 0{,}36$$
$$z^2 = 1{,}00$$
$$z = 1.0km$$

Derivando a expressão implicitamente em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt}(z^2) = \frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(y^2)$$
$$2z.\frac{dz}{dt} = 2x.\frac{dx}{dt} + 2y.\frac{dy}{dt}$$
$$z.\frac{dz}{dt} = x.\frac{dx}{dt} + y.\frac{dy}{dt}$$

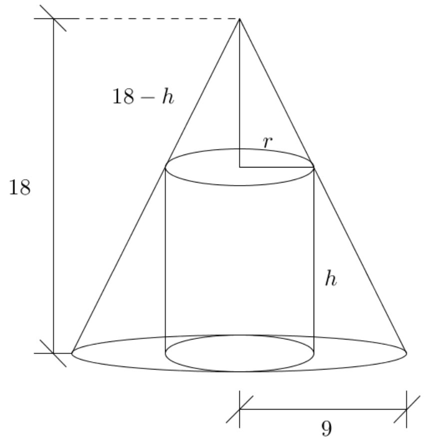
Quando $x = 0{,}8km$ *e* $y = 0{,}6km$, *a distância* y *está diminuindo à taxa de* $60\ km/h$ *e a distância* z *está aumentando á taxa de* $20\ km/h$. *Logo*,

$$z.\frac{dz}{dt} = x.\frac{dx}{dt} + y.\frac{dy}{dt}$$
$$1 \times 20 = 0{,}8.\frac{dx}{dt} - 0{,}6 \times 60$$
$$20 = 0{,}8.\frac{dx}{dt} - 36$$
$$0{,}8.\frac{dx}{dt} = 56 \therefore \frac{dx}{dt} = 70\ km/h$$

A velocidade do fugitivo no instante da medição é $70\ km/h$.

Questão 4.

a) *Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume possível, que pode ser inscrito num cone cuja base tem raio e altura iguais a* 9 *e* 18, *respectivamente.*



Por semelhança de triângulo, obtemos a relação:

$$\frac{18}{9} = \frac{18-h}{r}$$
$$2r = 18 - h$$
$$h = 18 - 2r$$

Volume do cilindro em função de r:

$$V(r) = \pi r^2(18-2r)$$
$$V(r) = 2\pi(9r^2 - r^3) \quad ; \quad r \in [0,9]$$

Como V *é uma função polinomial e portanto contínua no intervalo fechado* $[0,9]$, *pelo Teorema do Valor Extremo* f *assume um valor máximo absoluto* $V(c)$ *e um valor mínimo absoluto* $V(d)$ *em algum número* c *e* d *em* $[0,9]$.
Pelo Metodo do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de* V *nos extremos do intervalo:*

$V(0) = V(9) = 0$ *(Não existe cilindro!)*

2. *Os valores de* V *nos números críticos em* $(0,9)$:

"Um número crítico de uma função f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe"*

$$V'(r) = 2\pi(18r - 3r^2)$$

$V'(r) = 0 \Longrightarrow 18r - 3r^2 = 0 \Longrightarrow 3r(6-r) = 0 \therefore r = 6.$

$$V(6) = 216\pi$$

3. *Comparando os valores obtidos concluimos que* 216π *é o volume máximo que um cilindro circular reto inscrito num cone com dimensões de* 9 *e* 18 *de raio e altura, respectivamente, pode assumir.*

Logo, as dimensões que maximizam o volume do cilindro são: $r = 6$ *e* $h = 6$

$b)$ *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln[\cos(x-1)]}{1 - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}$.

$*$ *Quociente indeterminado:* $"\frac{0}{0}"$
Aplicando a Regra de L'Hôspital, obtemos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\operatorname{tg}(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sec^2(x-1)}{-\frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}=$$
$$\frac{\sec^2 0}{-\frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{-\frac{\pi^2}{4}}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

***Questão* 5.**

a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que $|\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y|\geq|x-y|$, $\forall x,y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Seja $f(z)=\operatorname{tg} z$ *e como o intervalo fechado* $[x,y]$ *está contido no intervalo* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *então* f *satisfaz as seguintes hipóteses:*

1. f *é contínua no intervalo fechado* $[y,x]$;

2. f *é diferenciável no intervalo aberto* (y,x);

Então existe algum número $c\in(y,x)$ *tal que*

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$
$$f'(c)=\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{x-y}$$

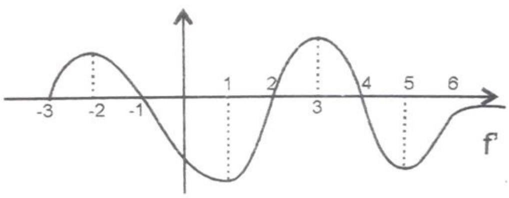
Como $f'(c)=\sec^2 c$ *e para todo* $c\in D(f)$, *temos* $\sec^2 c\geq 1$, *ou ainda,* $|f'(c)|\geq 1$.

$$|f'(c)|\geq 1$$

Pelo Teorema do Valor Médio, concluimos que

$$\left|\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{x-y}\right|\geq 1$$
$$|\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y|\geq|x-y|$$

b) O gráfico da derivada de uma função f *é dada abaixo:*



i. Onde f *está crescendo e onde* f *está decrescendo.*

f *é dita crescente em um intervalo* (a,b) *quando* $f'>0$ *para qualquer* x *em* (a,b), *e decrescente quando* $f'<0$.

Logo, f *é crescente em* $(-3,-1)\cup(2,4)$ *e* f *é decrescente em* $(-1,2)\cup(4,\infty)$

ii. Os pontos de máximo e mínimo locais de f.

Pelo Teste da Primeira Derivada, onde f' *muda de positiva para negativa em* c, *então* $(c,f(c))$ *é um ponto de máximo local; e se* f' *muda de negativa para positiva em* c, *então* $(c,f(c))$ *é ponto de mínimo local.*

$Portanto, f$ $possui$ $pontos$ de $máximo$ $locais$ em $x = \{-1{,}4\}$ e f $possui$ $pontos$ de $mínimo$ $local$ em $x = 2.$

$iii.$ Os $pontos$ de $inflexão$ de $f.$

Os $pontos$ de $inflexão$ de f $serão$ $detectados$ no $gráfico$ de f' nos $pontos$ de $máximo$ ou $mínimos$ $locais$ de $f'.$

$Como$ f'' nos diz os $intervalos$ de $crescimento$ e $decrescimento$ de f', $então$ $onde$ $ocorre$ $essa$ $mudança$ $será$ os $pontos$ $sobre$ o $gráfico$ de f $onde$ $ocorre$ $mudança$ na $direção$ da $concavidade$, $evidenciando$ os $pontos$ de $inflexão.$ $Portanto$, os $pontos$ de $inflexão$ de f $ocorre$ em $x = \{-2{,}1{,}3{,}5\}.$

13.12 Reavaliação da 2ª Média – 29 de Outubro de 2016

Questão 1.

a) *Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função* $f(x) = \log_{10}(1 + \operatorname{sen} x)$, *no intervalo* $[0, \pi]$.

b) *Use aproximação linear para estimar a aresta de um cubo com volume igual a* 27,0001.

Questão 2.

a) *Seja* $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2^x \cdot (x^2 + 3)}$. *Use diferenciação logarítmica para calcular* $f'(1)$.

b) *Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função* $f(x) = \dfrac{2e^x}{1 + x^2}$, *no intervalo* $[-1, 2]$.

Questão 3.

a) *Um móvel A desloca-se sobre o gráfico* $y = \operatorname{arctg} x$ *e outro móvel B, desloca-se sobre o gráfico de* $y = -\operatorname{arctg} x$, *ambos partindo da origem, de sorte que as duas coordenadas x variam à razão de* $2\ m/s$. *A que taxa estará variando a área do triângulo determinado pelos móveis e pela origem do sistema de coordenadas, no instante em que* $x = 1$?

b) *Determine a equação da tangente à curva* $y = f(x)$ *no ponto em que* $x = 2$, *sabendo que* $f'(x) = \sqrt[4]{x - 1}$ *e* $f(1) = 2$.

Questão 4.

a) *O custo c(em reais por hora) para operar um transatlântico a uma velocidade constante v(em km por h) é dado por* $c = 3 + 6v^2$. *Ache a velocidade que resulta na operação mais barata de* $4800 km$. (*ANULADA*!)

b) *Calcule* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$.

Questão 5.

a) *Determine os valores das constantes a, b e c, de modo que o gráfico de* $y = \dfrac{x^2 + a}{bx + c}$ *tenha um mínimo local em* $x = 3$ *e um máximo local no ponto* $(-1, -2)$.

b) *Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que* $\sqrt{y} - \sqrt{x} < \dfrac{y - x}{2\sqrt{x}}$, *se* $0 < x < y$.

***Questão* 1.**

a) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = \log_{10}(1 + \operatorname{sen} x)$, *no intervalo* $[0, \pi]$.

Domínio da função: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Como f é uma função composta, f será dita contínua onde estiver definida, ou seja, em seu domínio. Portanto, f é contínua no intervalo fechado $[0, \pi]$ e pelo Teorema do Valor Extremo f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em $[0, \pi]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de f nos extremos do intervalo:*

$f(0) = \log_{10}(1 + \operatorname{sen} 0) = \log_{10} 1 = 0.$
$f(\pi) = \log_{10}(1 + \operatorname{sen} \pi) = \log_{10} 1 = 0.$

2. *Os valores de f nos números críticos de f em $(0, \pi)$:*

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

$$f'(x) = \frac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x) \cdot \ln 10}; \quad D(f') = D(f)$$

Como f é diferenciável em $(0, \pi)$, se c é um número crítico de f e $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \therefore x = \frac{\pi}{2}.$$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \log_{10}\left(1 + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right) = \log_{10} 2.$

3. *Comparando os valores obtidos concluímos que $\log_{10} 2$ é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[0, \pi]$ e 0 é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado $[0, \pi]$.*

b) Use aproximação linear para estimar a aresta de um cubo com volume igual a 27,0001.

Seja $f(x)$ a aresta de um cubo e x o seu volume, então $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Quando $f(x) = 27$, temos $x = 3$ e ainda,

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,; f'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$$

Por aproximação linear ou linearização de f em $x = 27$, temos:

$$L(x) = f(27) + f'(27) \cdot (x - 27)$$
$$L(x) = 3 + \frac{1}{27}(x - 27)$$

Como a variação do volume foi muita pequena comparada ao seu valor inicial, então podemos dizer que $L(x) \cong f(x)$ quando x está próximo a 27. Logo,

$$f(27{,}0001) \cong L(27{,}0001) = 3 + \frac{0{,}0001}{27} = \frac{81{,}0001}{27}$$

onde este valor é a estimativa da aresta do cubo com volume igual a 27,0001.

***Questão* 2.**

a) Seja $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2^x \cdot (x^2+3)}$. *Use diferenciação logarítmica para calcular* $f'(1)$.

Domínio da função : $D(f) = \mathbb{R}$
Imagem da função : $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}. f(x) > 0.$

$\ln f(x) = \ln\left[\dfrac{e^{x^2}}{2^x \cdot (x^2+3)}\right]$

$\ln f(x) = \ln e^{x^2} - \ln[2^x \cdot (x^2+3)]$
$\ln f(x) = x^2 . \ln e - \ln 2^x - \ln(x^2+3)$
$\ln f(x) = x^2 - x \cdot \ln 2 - \ln(x^2+3)$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x - \ln 2 - \frac{2x}{x^2+3}$$

$$f'(x) = f(x)\left[2x - \ln 2 - \frac{2x}{x^2+3}\right]$$

$$f'(1) = f(1)\left[2 - \ln 2 - \frac{2}{4}\right]$$

$$f'(1) = \frac{e}{8}\left[2 - \ln 2 - \frac{1}{2}\right] = \frac{e}{16}[3 - \ln 4]$$

b) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = \dfrac{2e^x}{1+x^2}$, *no intervalo* $[-1{,}2]$.

Domínio da função: $D(f) = \mathbb{R}$

Como f é uma função racional, f será dita contínua onde estiver definida, ou seja, em seu domínio. Portanto, f é contínua no intervalo fechado $[-1{,}2]$ *e pelo Teorema do Valor Extremo f assume um valor máximo absoluto* $f(c)$ *e um valor mínimo absoluto* $f(d)$ *em algum número c e d em* $[-1{,}2]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de f nos extremos do intervalo*;

$f(-1) = \dfrac{2e^{-1}}{1+(-1)^2} = \dfrac{2e^{-1}}{2} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}.$

$f(2) = \dfrac{2e^2}{1+2^2} = \dfrac{2e^2}{1+4} = \dfrac{2}{5}e^2 = 0{,}4e^2.$

2. *Os valores de f nos números críticos de f em* $(-1{,}2)$:

"*Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*".

$$f'(x) = \frac{2e^x(1+x^2) - 4xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{2e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2} = \frac{2e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2} \;;\; D(f') = D(f)$$

Como f é diferenciável em $(-1{,}2)$, *se c é um número crítico de f e* $f'(c)$ *existe, então* $f'(c) = 0$.

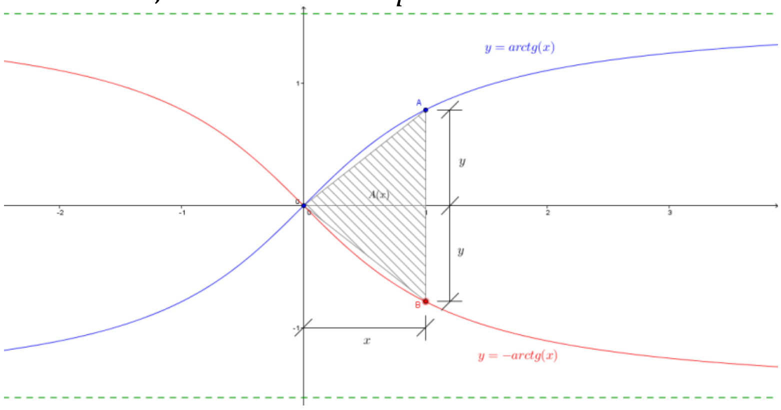
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \therefore x = 1.$$

$$f(1) = \frac{2e^1}{1+1^2} = \frac{2e}{2} = e.$$

3. *Comparando os valores obtidos concluímos que* $0{,}4e^2$ *é o valor máximo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[-1{,}2]$ *e* e^{-1} *é o valor mínimo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[-1{,}2]$.

Questão 3.

a) *Um móvel A desloca-se sobre o gráfico* $y = \operatorname{arctg} x$ *e outro móvel B, desloca-se sobre o gráfico de* $y = -\operatorname{arctg} x$*, ambos partindo da origem, de sorte que as duas coordenadas* x *variam à razão de* $2\,m/s$*. A que taxa estará variando a área do triângulo determinado pelos móveis e pela origem do sistema de coordenadas, no instante em que* $x = 1$?



Da ilustração acima, temos:

$$A(x) = \frac{1}{2}x \cdot 2y$$
$$A(x) = x \cdot y$$
$$A(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dx} = A'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\ ;\ \left.\frac{dA}{dx}\right|_{x=1} = \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1+1^2} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) m^2/m.$$

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) m^2/s$$

b) *Determine a equação da tangente à curva* $y = f(x)$ *no ponto em que* $x = 2$*, sabendo que* $f'(x) = \sqrt[4]{x-1}$ *e* $f(1) = 2$.

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ *é dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\right)} \cdot (x-1)^{1+\frac{1}{4}} + C$$

$$f(x) = \frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{4}} + C$$

Como $f(1) = 2$*, isso implica dizer que* $C = 2$*. Portanto,*

$$f(x) = \frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{4}} + 2$$

$No\ ponto\ em\ x = 2, temos\ f(2) = \frac{4}{5} + 2 = \frac{14}{5}. Logo, o\ ponto\ em\ questão\ é\ \left(2, \frac{14}{5}\right)$ $e\ a\ inclinação\ da\ reta\ tangente\ neste\ ponto\ é\ f'(2) = 1.$

$Equação\ da\ reta\ tangente:$

$$y - \frac{14}{5} = 1 \cdot (x - 2)$$
$$y = x + \frac{4}{5}$$

Questão 4.

$a)$ *O custo* c *(em reais por hora) para operar um transatlântico a uma velocidade constante* v *(em km por h) é dado por* $c = 3 + 6v^2$. *Ache a velocidade que resulta na operação mais barata de* $4800km$. (*ANULADA*!)

$b)$ *Calcule* $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$.

$*\ Potência\ indeterminada:$ "∞^0"

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} e^{\ln(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} e^{\operatorname{cotg} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{cotg} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)}.$$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{cotg} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$; $produto\ indeterminado\ 0 \times \infty$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{cotg} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$; $quociente\ indeterminado$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

$Aplicando\ a\ Regra\ de\ L'Hôspital, obtemos:$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}}{\sec^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0.$$

$Portanto,$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x} = e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{cotg} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = e^0 = 1.$$

Questão 5.

$a)$ *Determine os valores das constantes* a, b *e* c, *de modo que o gráfico de* $y = \frac{x^2 + a}{bx + c}$ *tenha um mínimo local em* $x = 3$ *e um máximo local no ponto* $(-1, -2)$.

Se f *possui um máximo ou mínimo local em* c, *então* c *é um número crítico de* f.
"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*".

$Domínio\ da\ função\ y = f(x) : D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{c}{b}\right\}$

$$f'(x) = \frac{2x(bx + c) - b(x^2 + a)}{(bx + c)^2}$$
$$f'(x) = \frac{bx^2 + 2cx - ab}{(bx + c)^2}; \quad D(f') = D(f)$$

$Do\ enunciado\ temos\ as\ seguintes\ informações, f(3)\ está\ definido, f(-1) = -2,$
$3\ e\ -1\ são\ números\ críticos\ de\ f.$

$Como\ f\ está\ definida\ em\ x = 3, então\ 3b + c \neq 0.$

$$f'(3) = \frac{9b - 6c - ab}{(3b + c)^2}\ ; como\ 3b + c \neq 0, então\ f'(3)\ existe\ e\ f'(3) = 0.$$

$$f'(3) = 0 \Longrightarrow 9b - 6c - ab = 0\ \ (Eq.1)$$

$Como\ f\ está\ definida\ em\ x = -1\ e\ f(-1) = -2, então\ -b + c \neq 0.$

$$f(-1) = \frac{1 + a}{-b + c} = -2 \Longrightarrow 1 + a = 2b - 2c \therefore a - 2b + 2c = -1\ (Eq.2)$$

$$f'(-1) = \frac{b - 2c - ab}{(-b + c)^2}\ ; como\ -b + c \neq 0, então\ f'(-1)\ existe\ e\ f'(-1) = 0.$$

$$f'(-1) = 0 \Longrightarrow b - 2c - ab = 0\ (Eq.3).$$

$Temos\ um\ sistema\ com\ 3\ equações\ e\ 3\ incógnitas.$

$$\begin{cases} 9b - 6c - ab = 0 \\ a - 2b + 2c = -1 \\ b - 2c - ab = 0 \end{cases}$$

$Subtraindo\ a\ Eq.3\ da\ Eq.1, obtemos:$

$$9b - 6c - ab - (b - 2c - ab) = 0$$
$$8b + 8c = 0 \therefore c = -b\ (Eq.4)$$

$Substituindo\ a\ Eq.4\ na\ Eq.3, obtemos:$

$$b - 2(-b) - ab = 0$$
$$3b - ab = 0$$
$$b(3 - a) = 0$$
$$b = 0\ ou\ a = 3$$

$Note\ que\ b = 0 \Longrightarrow c = 0, dessa\ forma\ as\ condições\ supracitadas\ 3b + c \neq 0\ e$
$-b + c \neq 0, não\ são\ satisfeitas. Portanto, a = 3.$

$Pela\ Eq.2, temos:$

$$3 - 2b + 2(-b) = -1$$
$$3 - 4b = -1$$
$$4b = 4$$
$$b = 1\ \Longrightarrow c = -1$$

$Portanto, os\ valores\ das\ constantes\ a, b\ e\ c\ são, respectivamente, 3{,}1\ e\ -1.$

$b)\ Use\ o\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ para\ mostrar\ que\ \sqrt{y} - \sqrt{x} < \dfrac{y - x}{2\sqrt{x}},$

$se\ 0 < x < y.$

$Seja\ f(z) = \sqrt{z}\ , x\ e\ y\ números\ reais\ tais\ que\ 0 < x < y\ e\ f'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$

$Definida\ dessa\ forma, a\ função\ f\ satisfaz\ as\ seguintes\ hipóteses:$
$1. f\ é\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [x, y];$
$2. f\ é\ diferenciável\ no\ intervalo\ aberto\ (x, y);$
$Então\ existe\ algum\ número\ c \in (x, y)\ tal\ que$

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$f'(c) = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x}$$

$Sabemos\ que\ f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}. Logo, f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$

$Se\ c \in (x, y), então\ x < c < y\ e\ portanto\ \sqrt{x} < \sqrt{c} < \sqrt{y}. Com\ isso, concluimos\ que$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$Pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio, temos:$

$$f'(c) = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} = \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$Portanto,$

$$\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} < \frac{y - x}{2\sqrt{x}}$$

13.13 Avaliação Final – 04 de Novembro de 2016

Questão 1.

$a)$ *Determine os valores máximo e mínimo absolutos de* $f(x) = \sqrt[3]{12x - x^3}$, $x \in [-4,4]$.

$b)$ *Estude a diferenciabilidade da função* $f(x) = |x + 1| \cdot |x - 2|$.

Questão 2.

$a)$ *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de* $y = 2\sqrt{\ln x}$, *no ponto de ordenada* $y = 2$.

$b)$ *Determine* $\lim_{x\to 0}(x^2 + x) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Questão 3.

$a)$ *Seja* ABC *um triângulo isósceles, com* $AB = 12dm, AC = BC = 10dm$. *Determine qual o ponto da altura relativa ao lado* AB, *cuja soma das distâncias aos vértices é mínima.*

$b)$ *Se* $f(x) = \frac{4}{x}$, *prove que não há nenhum número real* c, *tal que* $f(4) - f(-1) = f'(c) \cdot [4 - (-1)]$. *Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio, aplicado ao intervalo* $[-1,4]$?

Questão 4. *Seja* $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x - x$. *Mostre que:*

$a)$ f *tem uma raíz real no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$b)$ *a raíz de* f *é única no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Questão 5. *A assíntota oblíqua da curva* $y = \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$ *forma com as assíntotas horizontal e vertical da curva* $y = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}$ *um triângulo. Encontre a área desse triângulo.*

Questão 6.

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to 2}\frac{|x - 2|}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$.

$b)$ *Use aproximação linear para estimar* $\cos 59°$.

Questão 7.

$a)$ *Suponha que* $f'(x) = (\ln x)(x^2 - 1)(x - 2)^3$. *Analise o crescimento e o decrescimento de* f.

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

Questão 8.

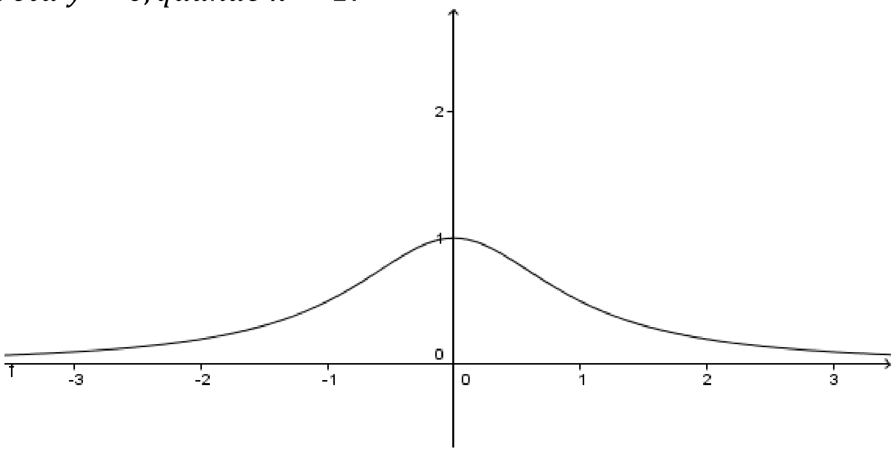
$a)$ *Usando a derivação implicita, encontre* y', *sendo* $y^2 = x \cdot \operatorname{arccos}(x + y) - \pi$.

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^6 + 1} - x^3\right)$.

Questão 9.

$a)$ *Sendo* $f'(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x - 2}$, $x \neq 2$, *determine a primitiva de* f' *que passa pelo ponto* $(1,2)$.

$b)$ *A figura abaixo é o gráfico da curva* $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. *Há uma reta vertical que se desloca da esquerda para a direita, a partir da reta* $x = 0$ *e a uma velocidade de* $0{,}1\ mm/seg$. *Com que velocidade está aumentando a área do trapézio determinado pelas interseções das retas verticais citadas com a curva e com a reta* $y = 0$, *quando* $x = 1$?



Questão 10.

$a)$ *Classifique a descontinuidade da função* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ 4 - x, & x \geq 1 \end{cases}$ *como removível, tipo salto ou infinita.*

$b)$ *Sendo* $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh} x}}$, *determine* $f'(x)$, *como uma potência de* e.

$\boldsymbol{Questão\ 1.}$

(a) *Determine os valores máximo e mínimo absolutos de* $f(x) = \sqrt[3]{12x - x^3}$, $x \in [-4,4]$.

Domínio da função f: $D(f) = \mathbb{R}$

Como f *está definida em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *e portanto contínua no intervalo fechado* $[-4,4]$. *Logo, pelo Teorema do Valor Extremo,* f *admite um valor máximo absoluto* $f(c)$ *e um valor mínimo absoluto* $f(d)$ *em algum* c *e* d *em* $[-4,4]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo.*

$f(-4) = \sqrt[3]{-48 + 64} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$.
$f(4) = \sqrt[3]{48 - 64} = \sqrt[3]{-16} = -2\sqrt[3]{2}$.

2. *Os valores de* f *nos números críticos de* f *em* $(-4,4)$.

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* **c no domínio** *de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*".

$$f'(x) = \frac{12 - 3x^2}{3\sqrt[3]{(12x - x^3)^2}} = \frac{4 - x^2}{\sqrt[3]{(12x - x^3)^2}}$$

$$D(f') = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \ e \ x \neq \pm 2\sqrt{3}\right\}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \therefore x = \pm 2$. (*pertencem ao intervalo em estudo!*)

$f'(x)$ *não existe em* $0, 2\sqrt{3}$ *e* $-2\sqrt{3}$ (*pertencem ao intervalo em estudo!*)

$f\left(-2\sqrt{3}\right) = f\left(2\sqrt{3}\right) = 0$.

$f(-2) = \sqrt[3]{-24 + 8} = \sqrt[3]{-16} = -2\sqrt[3]{2}$.
$f(0) = \sqrt[3]{0 - 0} = \sqrt[3]{0} = 0$
$f(2) = \sqrt[3]{24 - 8} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$.

3. *Comparando os valores obtidos nas etapas* 1 *e* 2, *temos:*

$-2\sqrt[3]{2}$ *é o valor mínimo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[-4,4]$ *e*
$2\sqrt[3]{2}$ *é o valor máximo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[-4,4]$.

$Questão\ 1.$

(b) *Estude a diferenciabilidade da função* $f(x) = |x+1| \cdot |x-2|$.

$$f(x) = |(x+1)(x-2)| = |x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2, & x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \\ -(x^2 - x - 2), & -1 < x < 2 \end{cases}.$$

Como f *é uma função definida pelo módulo de uma função polinomial contínua em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Como* f *muda de comportamento nos números* -1 *e* 2, *como* f *é polinomial temos a priori que* f *é derivável ou diferenciável em* $(-\infty,-1) \cup (-1,2) \cup (2,+\infty)$.

Analisando a diferenciabilidade de f *em* -1, *temos*:

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 - x - 2 - 0}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x+1} =$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)} = \lim_{x\to -1^-} (x-2) = -1 - 2 = -3.$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x^2 - x - 2) - 0}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x^2 + x + 2}{x+1} =$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} (-x+2) = -(-1) + 2 = 3.$$

Como as derivadas laterais existem mas são diferentes, então f *não é derivável em* -1.

Analisando a diferenciabilidade de f *em* 2, *temos*:

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x^2 - x - 2) - 0}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} (-x-1) = -2 - 1 = -3.$$

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - x - 2 - 0}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = 2 + 1 = 3.$$

Como as derivadas laterais existem mas são diferentes, então f *não é derivável em* 2.

Portanto, f *é diferenciável em* $\mathbb{R} - \{-1,2\}$.

Questão 2.

(a) *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de* $y = 2\sqrt{\ln x}$, *no ponto de ordenada* $y = 2$.

Domínio da função $y = f(x)$: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

Ponto de ordenada $y = 2$:

$$2 = 2\sqrt{\ln x} \Longrightarrow 1 = \sqrt{\ln x} \Longrightarrow \ln x = 1 \therefore x = e.$$

$*$ *Ponto* $(e, 2)$.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\ ; \ \ D(f') = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

Coeficiente angular da reta tangente no ponto $(e, 2)$:

$$f'(e) = \frac{1}{e\sqrt{\ln e}} = \frac{1}{e}.$$

Equação da reta tangente no ponto $(e, 2)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = \frac{1}{e}(x - e)$$

$$y = \frac{x}{e} + 1$$

Questão 2

(b) *Determine* $\lim_{x\to 0}(x^2+x)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$+++++(-1)------(0)+++++ \qquad (x^2+x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0,$ *temos*:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Se x *está próximo de* 0 *e* x *é menor que* 0, *então* $(x^2+x) < 0$. *Logo*,

$$-(x^2+x) \geq (x^2+x)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) \geq (x^2+x)$$

$$(x^2+x) \leq (x^2+x)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq (-x^2-x)$$

$\lim_{x\to 0^-}(x^2+x) = 0^2+0 = 0.$

$\lim_{x\to 0^-}(-x^2-x) = -0^2-0 = 0.$

Se $(x^2+x) \leq (x^2+x)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq (-x^2-x)$ *quando* x *está próximo de* 0 *pela esquerda de* 0 (*exceto possivelmente em* 0) *e*

$$\lim_{x\to 0^-}(x^2+x) = \lim_{x\to 0^-}(-x^2-x) = 0$$

então

$$\lim_{x\to 0^-}(x^2+x)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Se x *está próximo de* 0 *e* x *é maior que* 0, *então* $(x^2+x) > 0$. *Logo*,

$$-(x^2+x) \leq (x^2+x)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq (x^2+x)$$

$\lim_{x\to 0^+}(-x^2-x) = -0^2-0 = 0.$

$\lim_{x\to 0^+}(x^2+x) = 0^2+0 = 0.$

Se $(-x^2-x) \leq (x^2+x)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq (x^2+x)$ *quando* x *está próximo de* 0 *pela direita de* 0 (*exceto possivelmente em* 0) *e*

$$\lim_{x\to 0^+}(x^2+x) = \lim_{x\to 0^+}(-x^2-x) = 0$$

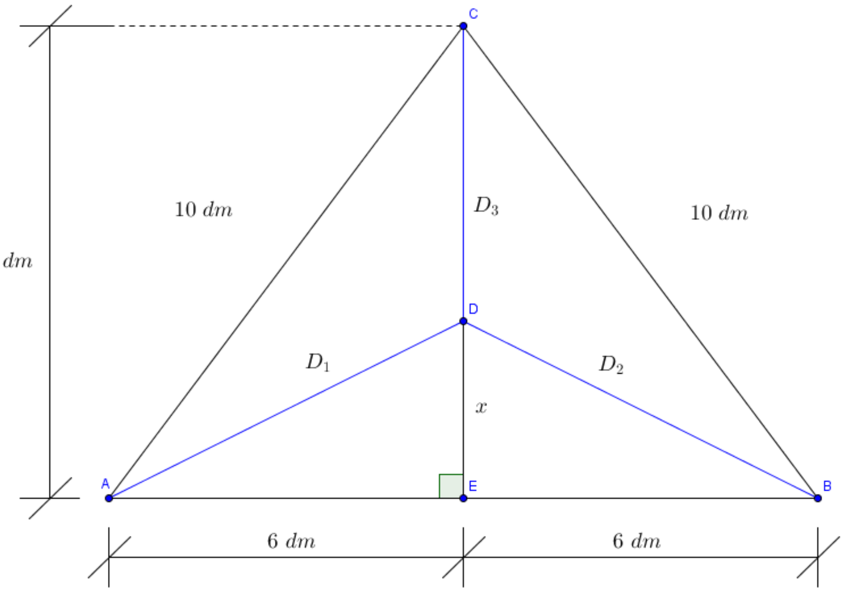
então

$$\lim_{x\to 0^+}(x^2+x)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Como os limites laterais em 0 *existem e são iguais, então* $\lim_{x\to 0}(x^2+x)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *existe e* $\lim_{x\to 0}(x^2+x)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

$$\textbf{\textit{Questão 3.}}$$

(a) *Seja ABC um triângulo isósceles, com $AB = 12dm, AC = BC = 10dm$. Determine qual o ponto da altura relativa ao lado AB, cuja soma das distâncias aos vértices é mínima.*



$$D_1 = D_2 = \sqrt{x^2 + 36} \quad ; \quad D_3 = 8 - x \; ; \quad x \in [0,8]$$

$$f(x) = D_1 + D_2 + D_3 = 2\sqrt{x^2 + 36} + (8 - x)$$

A função f definida acima é contínua no intervalo fechado $[0,8]$ e pelo Teorema do Valor Extremo a função f admite um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum c e d em $[0,8]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de f nos extremos do intervalo:*

$$f(0) = 2\sqrt{36} + 8 = 20dm \qquad e \qquad f(8) = 2\sqrt{100} + 0 = 20dm$$

2. *Os valores de f nos números crítico de f em $(0,8)$:*

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 36}}{\sqrt{x^2 + 36}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 36} = 0 \; ; \; x \in (0,8)$$

$$2x = \sqrt{x^2 + 36}$$
$$4x^2 = x^2 + 36$$
$$3x^2 = 36 \Longrightarrow x^2 = 12 \therefore x = 2\sqrt{3}dm$$

$$f(2\sqrt{3}) = 2\sqrt{48} + 8 - 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} + 8 - 2\sqrt{3} = (6\sqrt{3} + 8)dm < 20dm$$

3. *Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2, concluimos que para o ponto situado na altura relativa ao lado AB a $2\sqrt{3}dm$ a soma das distâncias aos vértices é a menor possível.*

Questão 3

(b) *Se* $f(x) = \frac{4}{x}$, *prove que não há nenhum número real* c, *tal que* $f(4) - f(-1) = f'(c) \cdot [4 - (-1)]$. *Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio, aplicado ao intervalo* $[-1,4]$?

Domínio da função f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$$f(4) = 1 \text{ e } f(-1) = -4$$

$$\begin{gathered} f(4) - f(-1) = f'(c)[4 - (-1)] \\ 1 - (-4) = f'(c)[4 - (-1)] \\ 5 = 5f'(c) \\ f'(c) = 1 \end{gathered}$$

$f'(x) = -\frac{4}{x^2}$; $f'(x) < 0, \forall x \in D(f)$.

Logo, não existe nenhum número real c, *tal que* $f'(c) = 1$.

Este fato não contadiz o Teorema do Valor Médio porque a função f *não é contínua no intervalo fechado* $[-1,4]$ *e portanto, não é derivável no intervalo aberto* $(-1,4)$, *uma vez que* f *possui uma* ***descontinuidade infinita em 0***.

Logo, como f *nao satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio, então o fato não existir número real* $c \in (-1,4)$ *tal que* $f'(c) = \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)}$ *não contradiz o teorema.*

Questão 4

Seja $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x - x$. *Mostre que*:

(a) *f tem uma raíz real no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Domínio da função $f: D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Como f é funçao definida pela diferença de funções trigonométricas e polinomial, então f será dita contínua onde estas funções estão definida, ou seja, em seus domínios.

Logo, f é contínua no intervalo aberto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *e portanto f é contínua em qualquer intervalo fechado* $I \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{4+\pi}{6}$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} = 1 - 1 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{3}$$

Como f é contínua no intervalo fechado $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ *e 0 é um número entre* $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *e* $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *então, pelo Teorema do Valor Intermediário existe algum número* $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ *tal que* $f(x) = 0$. *Ou seja, f possui uma raíz real em* $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ *de tal modo que este* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Questão 4

(b) *a raíz de* f é *única no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Suponha que f *admite duas raízes reais* a *e* b *no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *tal que* $f(a) = f(b) = 0$.

$$f'(x) = \sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x - 1 \, ; D(f') = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, com\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Seja $I = [a, b]$ *o intervalo fechado definido anteriormente, com* $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.

f é *uma função que satisfaz as seguintes hipóteses*:

1. f é *contínua no intervalo fechado* $[a, b]$;
2. f é *diferenciável no intervalo aberto* (a, b);
3. $f(a) = f(b)$

Então, pelo Teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = \sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cossec}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x \,.\cos x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^4 x + \cos^2 x = 0 \,, x \neq \frac{k\pi}{2}, com\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^2 x = 0$$
$$\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$$

Seja $y = \operatorname{sen}^2 x \,, 0 < y < 1$ *então*:

$$y^2 - y + 1 = 0$$
$$\Delta = -3$$

Como o discriminante $\Delta < 0$, *então a equação acima não possui solução real e, portanto, não existe número c tal que* $f'(c) = 0$.

Por contradição, concluímos que f *não possui duas raízes no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Logo, f *possui raíz única no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *mostrada pelo Teorema do Valor Intermediário no item anterior*.

Questão 5.

A assíntota oblíqua da curva $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 4}$ *forma com as assíntotas horizontal e vertical da curva* $y = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}$ *um triângulo. Encontre a área desse triângulo.*

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 4} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 1}{x + 2}\right) = \frac{1}{2}\left[(x - 2) + \frac{3}{x + 2}\right]$$

Dizemos que a reta $y = ax + b$ *é uma assíntota oblíqua ao gráfico da curva* $f(x)$ *se, somente se,* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}(x - 2)\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x + 2} = 0.$$

Portanto, a reta $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ *é a assíntota oblíqua da curva* $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 4}$.

Sobre a curva $y = g(x) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}$ *temos* $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

A reta $x = a$ *é assíntota vertical ao gráfico da curva* $y = g(x)$ *se* $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to a^-} g(x) = \pm\infty$ *. Estas assíntotas ocorrem nas descontinuidades da função.*

Verificando se a reta $x = 1$ *é assíntota vertical:*

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{3}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{3} \cdot \frac{\overbrace{\sqrt[3]{x^2}}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{\sqrt[3]{(x-1)^2}}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$

Logo, a reta $x = 1$ *é assíntota vertical da curva* $y = g(x)$.

A reta $y = L$ *é assíntota horizontal ao gráfico da curva* $y = g(x)$ *se ou* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$ *ou* $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = L.$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\left[\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)\right]^2} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{(1 + 0)^2} = \frac{2}{3}.$$

Logo, a reta $y = \dfrac{2}{3}$ *é a assíntota horizontal da curva* $y = g(x)$.

Interseções entre as retas: $\left(1, \dfrac{2}{3}\right), \left(1, -\dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$*. Área do triângulo delimitado:*

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \times \left(\frac{10}{3} - 1\right) \times \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} \times \frac{7}{6} = \frac{49}{36} u.A$$

$\boldsymbol{Questão\ 6}$

$(a)\ Calcule\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}.$

$* \ Obs.: |x-2| = \begin{cases} x-2, & se\ x \geq 2 \\ -(x-2), & se\ x < 2 \end{cases}.$

$Se\ x\ está\ próximo\ de\ 2\ e\ x\ maior\ que\ 2, então\ |x-2| = x-2. Logo,$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})} = \lim_{x\to 2^+}(\sqrt{x}+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$Se\ x\ está\ próximo\ de\ 2\ e\ x\ menor\ que\ 2, então\ |x-2| = -(x-2). Logo,$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})} = \lim_{x\to 2^+}(-\sqrt{x}-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.$$

$* \ Se\ x \to 2, então\ x \neq 2\ e, portanto, \sqrt{x}-\sqrt{2} \neq 0.$

$Como\ os\ limites\ laterais\ em\ 2\ existem\ mas\ são\ diferentes, então\ dizemos\ que$

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\ não\ existe!$$

$\boldsymbol{Questão\ 6}$

(b) *Use aproximação linear para estimar* $\cos 59°$.

Seja $f(x) = \cos x$, *tal que* $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ *e* $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por aproximação linear ou Linearização de f *no ponto* $a = \frac{\pi}{3}$, *temos:*

$$L(x) = f(a) + f'(a).(x - a)$$
$$L(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right).\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$L(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Queremos estimar o valor de $\cos 59° = \cos(60° - 1°) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{180}\right)$.

Logo,

$$L\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{360}$$

Para valores próximos a $\frac{\pi}{3}$ *temos* $L(x) \approx f(x)$ *e, portanto, podemos dizer que*

$$\cos 59° \approx L\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{360}$$

$\boldsymbol{Questão\ 7}$

(a) *Suponha que* $f'(x) = (\ln x)(x^2 - 1)(x - 2)^3$. *Analise o crescimento e o decrescimento de* f.

Embora não tenhamos a função f, *pela análise de sua função derivada* f' *podemos chegar a conclusão de que* $D(f) = D(f') = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Analisando a primeira derivada, temos:

$$
\begin{array}{ll}
(0) - - - (1) + + + + + + + + + + + + + + + & (\ln x) \\
(0) - - - (1) + + + + + + + + + + + + + + + & (x^2 - 1) \\
(0) - - - - - - - - (2) + + + + + + + + + + & (x - 2)^3 \\
(0) - - - (1) - - - (2) + + + + + + + + + + & f'(x)
\end{array}
$$

Como $f'(x) > 0$ *quando* $x > 2$ *e* $f'(x) < 0$ *quando* $0 < x < 2$, f é *crescente em* $(2, \infty)$ *e* f é *decrescente em* $(0,2)$.

Questão 7.

(b) *Calcule* $\lim_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

$*$ *Potência indeterminada* 1^{∞}.

$$\lim_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0}\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}}.$$

$* \lim_{x\to 0}\ln(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x + x)}{x}$; *Quociente indeterminado* $"\dfrac{0}{0}"$

Aplicando a Regra de L'Hôspital, obtemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x + 1}{e^x + x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 1}{e^x + x} = \frac{\lim_{x\to 0} e^x + \lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} e^x + \lim_{x\to 0} x} = \frac{e^0 + 1}{e^0 + 0} = \frac{2}{1} = 2.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0}\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}} = e^2.$$

$Questão$ 8.

(a) *Usando a derivação implicita, encontre y', sendo $y^2 = x \cdot \arccos(x+y) - \pi$.*

Derivando implicitamente, temos:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}[x \cdot \arccos(x+y)] - \frac{d}{dx}(\pi)$$

$$2y.\frac{dy}{dx} = \arccos(x+y) - \frac{x}{\sqrt{1-(x+y)^2}}\left[1+\frac{dy}{dx}\right] - 0$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \left[2y + \frac{x}{\sqrt{1-(x+y)^2}}\right] = \arccos(x+y) - \frac{x}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\arccos(x+y) \cdot \sqrt{1-(x+y)^2} - x}{2y \cdot \sqrt{1-(x+y)^2} + x}$$

$\boldsymbol{Questão\ 8}$

$(b)\ Calcule\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+1}-x^3\right).$

$*\ Diferença\ indeterminada: "\infty-\infty"$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+1}-x^3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^6+1}-x^3\right)\cdot\frac{\sqrt{x^6+1}+x^3}{\sqrt{x^6+1}+x^3}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^6+1}+x^3}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^6+1}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}+\underbrace{x^3}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^6+1}+x^3}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}}=0.$$

Questão 9

(a) *Sendo* $f'(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x - 2}, x \neq 2,$ *determine a primitiva de* f' *que passa pelo ponto* $(1,2)$.

Seja $p(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2, p(2) = 8 + 12 - 18 - 2 = 0.$ *Portanto,* 2 *é raíz do polinômio* $p(x)$. *Dividindo* $p(x)$ *por* $(x - 2)$ *utilizando o dispositivo prático de Briot − Ruffini, obtemos:*

Dispositivo Prático de Briot − Ruffini						
		$p(x)$				
		$1x^3$ +	$3x^2$	$-9x$	-2	
raiz	2	1	3	-9	-2	*coeficientes*
		1	5	1	0	
		$1x^2 + 5x + 1$				

$$f'(x) = x^2 + 5x + 1$$

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ *é:*

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x + C$$

Como o gráfico de f *passa pelo ponto* $(1,2)$ *então* $f(1) = 2$.

$$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{5}{2} + 1 + C = 2$$

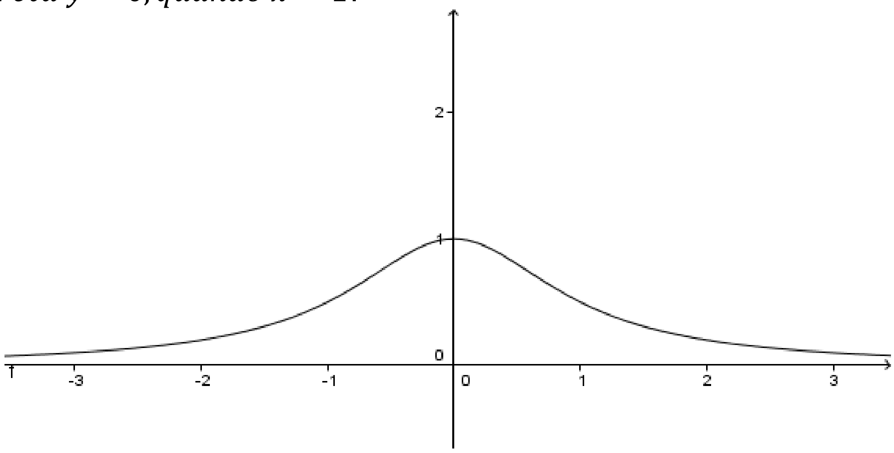
$$\frac{2 + 15 + 6}{6} + C = 2$$

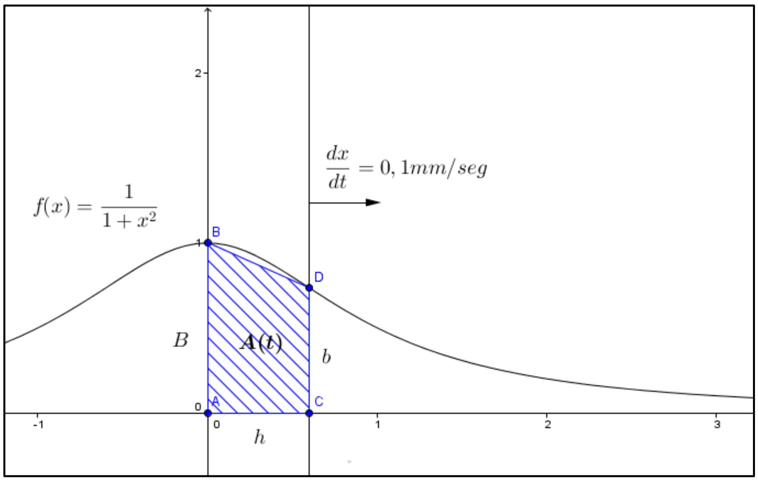
$$\frac{23}{6} + C = 2 \therefore C = -\frac{11}{6}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x - \frac{11}{6}$$

Questão 9

(b) *A figura abaixo é o gráfico da curva* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. *Há uma reta vertical que se desloca da esquerda para a direita, a partir da reta* $x = 0$ *e a uma velocidade de* $0{,}1\ mm/seg$. *Com que velocidade está aumentando a área do trapézio determinado pelas interseções das retas verticais citadas com a curva e com a reta* $y = 0$, *quando* $x = 1$?





$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}\ ;\ \ A(x) = \frac{\big(1+f(x)\big)\cdot x}{2}$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dx} = A'(x) = \frac{1}{2}[1+f(x)+x.f'(x)] = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\right]$$

Quando $x = 1$, *temos:*

$$\left.\frac{dA}{dx}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{2}{4}\right] = \frac{1}{2}mm^2/mm$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=1} = \left.\frac{dA}{dx}\right|_{x=1}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\times 0{,}1 = 0{,}05\,mm^2/s$$

Portanto, a área do trapézio está aumento à taxa de $0{,}05\,mm^2/s$ *quando* $x = 1$.

$\boldsymbol{Questão\ 10}$

(a) *Classifique a descontinuidade da função* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ 4 - x, & x \geq 1 \end{cases}$ *como removível, tipo salto ou infinita.*

Tipos de descontinuidade:

1) *Removível: descontinuidade caracterizada por* $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe mas* $f(a)$ *não está definido ou, caso esteja definido,* $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

2) *Salto: descontinuidade caracterizada por* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *e* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *existem, porém* $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$ *e, portanto,* $\lim_{x \to a} f(x)$ *não existe.*

3) *Infinita: descontinuidade caracterizada por* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. *Neste caso, dizemos que a reta* $x = a$ *é assíntota vertical do gráfico da função* $f(x)$.

Calculando $\lim_{x \to 1} f(x)$, *temos:*

Se x *está próximo de* 1 *e* x *maior que* 1, *então*

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4 - x) = \lim_{x \to 1^+} 4 - \lim_{x \to 1^+} x = 4 - 1 = 3.$$

Se x *está próximo de* 1 *e* x *menor que* 1, *então*

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = \lim_{x \to 1^-} x^2 - \lim_{x \to 1^-} 1 = 1 - 1 = 0.$$

Como os limites laterais em 1 *existem, mas são diferentes, então* $\lim_{x \to 1} f(x)$ *não existe. Pelas definições supracitadas, concluimos que* f *possui uma descontinuidade tipo salto em* $x = 1$.

***Questão* 10**

(b) *Sendo* $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x}}$, *determine* $f'(x)$, *como uma potência de* e.

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x}} = \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x}\cdot\frac{1+\operatorname{tgh} x}{1+\operatorname{tgh} x}} = \sqrt[4]{\frac{(1+\operatorname{tgh} x)^2}{1-\operatorname{tgh}^2 x}};$$

$*$ *Identidade Hiperbólica*: $1-\operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{(1+\operatorname{tgh} x)^2}{\operatorname{sech}^2 x}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{tgh} x}{\operatorname{sech} x}}$$

$$\frac{1+\operatorname{tgh} x}{\operatorname{sech} x} = \frac{1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}} = \frac{\dfrac{2e^x}{e^x+e^{-x}}}{\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}} = \frac{2e^x}{2} = e^x$$

$$f(x) = \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}.$$

Capítulo 14 2016.2

14.1 1ª Prova – 17 de Fevereiro de 2017

Questão 1.

$a)\ Estude\ a\ continuidade\ da\ função\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x+3}, & se\ x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{cotg} x, & se\ -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{cossec} x, & se\ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}.$

$b) Remova, onde\ for\ possível, as\ descontinuidades\ de\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x+1}, & se\ x < 0 \\ \dfrac{x-1}{x^2-4x+3}, & se\ x \ge 0 \end{cases}.$

Questão 2.

$a)\ Sejam\ f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ funções\ contínuas\ tais\ que\ f(a) < g(a)\ e\ f(b) > g(b).$
$Mostre\ que\ existe\ c \in (a, b)\ tal\ que\ f(c) = g(c).$

$b)\ Calcule\ \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x).[\cos(1+\log_2 x)].$

Questão 3.

$a)\ Determine\ as\ coordenadas\ dos\ pontos\ onde\ as\ assíntotas\ horizontais\ do$
$gráfico\ de\ f(x) = \dfrac{3x+4}{\sqrt{4x^2-7}}\ intercepta\ o\ eixo\ das\ ordenadas.$

$b)\ Mostre\ que\ a\ reta\ x = -2\ é\ a\ única\ assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ da\ função$
$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}.$

Questão 4.

$a)\ Calcule\ \lim_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+2)x+2a}{a^4-x^4}$

$b)\ Calcule\ \lim_{x\to -1^+} |x^2-9x-10| - 2$

Questão 5.

$a)\ Se\ f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!], mostre\ que\ \lim_{x\to 2}([\![x]\!] + [\![-x]\!])\ existe, mas\ que\ é$
$diferente\ de\ f(2).$

$b)\ Calcule\ \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right)\ ou\ mostre\ que\ ele\ não\ existe.$

***Questão* 1.**

$a)$ *Estude a continuidade da função* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x+3}, & se\ x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{cotg} x, & se\ -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{cossec} x, & se\ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}.$

A continuidade de uma função definida por partes (ou trechos) será dada pela continuidade de cada função que a compõe considerando o intervalo onde estão definidas para a função f.

$*$ *A função racional polinomial* $\dfrac{x^2+1}{x+3}$ *é contínua em* $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$, *porém como esta função é válida para* $x < -\dfrac{\pi}{2}$, *temos que f é contínua em* $(-\infty,-3)\cup(-3,-\pi/2)$.

$*$ *A função* $\operatorname{cotg} x$ *é contínua em seu domínio, isto é,* $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}\}$. *Como esta função é váilda para* $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, *temos que f é contínua em* $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, *uma vez que em* 0 *a função* $\cot x$ *não está definida.*

$*$ *A função* $\operatorname{cossec} x$ *é contínua em seu domínio, isto é,* $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}\}$. *Como esta função é valida para* $x \in \left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ *então f é contínua em* $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

Com esta análise, podemos afirmar que f é descontínua em -3 *e em* 0, *uma vez que f não está definida nesses números. A saber, nesses números a descontinuidade é infinitas: as retas* $x=-3$ *e* $x=0$ *são assíntotas verticais do gráfico de f.*

Analisando a continuidade de f em $x = \left\{-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right\}$ *temos:*

$$* \ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$* \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$* \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \frac{x^2+1}{x+3} = \frac{\frac{\pi^2}{4}+1}{-\frac{\pi}{2}+3} = \frac{\pi^2+4}{12-\pi}.$$

Como $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x)$, *$f$ é descontínua em* $-\dfrac{\pi}{2}$. *Esta descontinuidade é do tipo salto.*

$* f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

$* \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \text{cotg}\, x = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

$* \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \text{cossec}\, x = \text{cossec}\frac{\pi}{2} = 1.$

Como $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x)$ *, f é descontínua em* $\frac{\pi}{2}$*. Esta descontinuidade é do tipo salto.*

Logo, f é contínua em $(-\infty, \pi) - \left\{-3, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$.

$b)$*Remova, onde for possível, as descontinuidades de* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}, & se\ x < 0 \\ \dfrac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}, & se\ x \geq 0 \end{cases}$.

Classificamos a descontinuidade de uma função f em um número a como removível se $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe, mas f(a) não está definido.*
Analisando o domínio da função f temos:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \neq 0, x < 0\ \vee x^2 - 4x + 3 \neq 0, x \geq 0\}$
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, x \neq 1\ e\ x \neq 3\}$
$D(f) = \mathbb{R} - \{-1,1,3\}$

Com isso, concluimos que f é descontínua em nos números $a = \{-1,1,3\}$.
Além disso, como $f(0)$ *está definido, caso exista descontinuidade em 0, esta não será removível.*

Analisando as descontinuidades em $a = \{-1,1,3\}$ *temos:*

$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)}$; *se* $x \to -1$*, então* $x \neq -1$. *Portanto ,* $x + 1 \neq 0$

$\lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)} = \lim_{x \to -1} (x - 2) = -1 - 2 = -3.$

$*$ *Como* $\lim_{x \to -1} f(x)$ *existe e* $f(-1)$ *não está definido, então f possui uma descontinuidade removível em* -1.

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)}$; *se* $x \to 1$*, então* $x \neq 1$. *Portanto ,* $x - 1 \neq 0$

$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{1 - 3} = -\frac{1}{2}.$

$*$ *Como* $\lim_{x \to 1} f(x)$ *existe e* $f(1)$ *não está definido, então f possui uma descontinuidade removível em* 1.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{\overbrace{x-1}^{\substack{2\\ \uparrow}}}{\underbrace{x^2-4x+3}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$

$Como \lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty, então\ f\ possui\ uma\ descontinuidade\ infinita\ em\ 3.$
$Logo, f\ só\ possui\ duas\ descontinuidades\ removíveis. Removendo\ essas$
$descontinuidades\ definimos\ uma\ nova\ função\ f^*\ da\ seguinte\ forma:$

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x+1}, & se\ x<0\ e\ x\neq -1 \\ \quad -3 \quad, & se\ x=-1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-4x+3}, & se\ x\geq 0\ e\ x\neq 1 \\ \quad -\dfrac{1}{2} \quad, & se\ x = 1 \end{cases}$$

***Questão* 2.**

$a)\ Sejam\ f, g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ funções\ contínuas\ tais\ que\ f(a) < g(a)\ e\ f(b) > g(b).$
$Mostre\ que\ existe\ c\in(a,b)\ tal\ que\ f(c) = g(c).$

$Se\ f\ e\ g\ são\ funções\ contínuas\ definidas\ em\ \mathbb{R}, então\ f\ e\ g\ são\ contínuas\ em\ \mathbb{R}.$
$Portanto, estas\ funções\ são\ contínuas\ no\ intervalo\ fechado\ [a,b].$

$Considere\ a\ função\ h(x) = f(x) - g(x). Como\ h\ é\ definida\ pela\ diferença\ entre$
$funções\ contínuas\ em\ [a,b]\ então\ h\ é\ contínua\ em\ [a,b]. Logo,$

$h(a) = f(a) - g(a) \Rightarrow h(a) < 0$
$h(b) = f(b) - g(b) \Rightarrow h(b) > 0$

$Como\ h\ é\ uma\ função\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [a,b]\ e\ 0\ é\ um\ número$
$entre\ h(a)\ e\ h(b)\ então, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário, existe\ algum$
$número\ c\in(a,b)\ tal\ que\ h(c) = 0.$

$Onde\ h(c) = 0 \Rightarrow f(c) - g(c) = 0 \therefore f(c) = g(c).$

$b)\ Calcule\ \lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x).[\cos(1+\log_2 x)].$

$\forall x\in\mathbb{R}, com\ x>0\ temos:$

$$-1 \leq \cos(1+\log_2 x) \leq 1$$

$Se\ x\to 0^+, então\ \operatorname{sen} x > 0\ e, portanto,$

$$-\operatorname{sen} x \leq (\operatorname{sen} x).[\cos(1+\log_2 x)] \leq \operatorname{sen} x$$

$Sejam\ f(x) = -\operatorname{sen} x, g(x) = (\operatorname{sen} x).[\cos(1+\log_2 x)]\ e\ h(x) = \operatorname{sen} x. Então,$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$Se\ f(x)\leq g(x)\leq h(x)\ \forall x\in\mathbb{R}, com\ x>0, exceto\ possivelmente\ em\ 0, e\ ainda,$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = 0, pelo\ Teorema\ do\ Confronto, temos\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0.$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x).[\cos(1+\log_2 x)] = 0$$

***Questão* 3.**

$a)$ *Determine as coordenadas dos pontos onde as assíntotas horizontais do gráfico de* $f(x) = \dfrac{3x+4}{\sqrt{4x^2-7}}$ *intercepta o eixo das ordenadas.*

Domínio da função f: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{\sqrt{7}}{4} \ \ ou \ \ x > \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right\}$

Dizemos que a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal do gráfico da função* f *se* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2-7}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2\left(1-\frac{7}{4x^2}\right)}} \ ; \ \sqrt{4x^2} = 2|x|.\, se\ x \to \infty, então\ \sqrt{4x^2} = 2x.$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{2x\sqrt{1-\frac{7}{4x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{2\sqrt{1-\frac{7}{4x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 + \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x}}{2\sqrt{\lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{7}{4x^2}}}$$

$$= \frac{3+0}{2\sqrt{1-0}} = \frac{3}{2}.$$

Logo, a reta $y = 3/2$ *é assíntota horizontal do gráfico de* $f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2-7}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2\left(1-\frac{7}{4x^2}\right)}} \ ; \ \sqrt{4x^2} = 2|x|.\, se\ x \to -\infty, então\ \sqrt{4x^2} = -2x.$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{-2x\sqrt{1-\frac{7}{4x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{-2\sqrt{1-\frac{7}{4x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x}}{-2\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7}{4x^2}}}$$

$$= \frac{3+0}{-2\sqrt{1-0}} = -\frac{3}{2}.$$

Logo, a reta $y = -3/2$ é assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$.

Interseções das assíntotas horizontais com o eixo das ordenadas:

$$A = (0, 3/2) \ \ e \ \ B = (0, -3/2)$$

b) Mostre que a reta $x = -2$ é a única assíntota vertical do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$.

Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função $f(x)$ se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Pela definição supracitada, as assíntotas verticais ocorrem nos pontos de descontinuidade da função f. Neste caso, analisando o domínio de f, temos:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 \neq 0\}$
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \ e \ x \neq 1\}$

Logo, f é descontínua em -2 e 1. Verificando a descontinuidade ...

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}\ ; \quad \text{se } x \to 1, \text{então } x \neq 1 \text{ e portanto, } x-1 \neq 0.$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to1} x + \lim\limits_{x\to1} 1}{\lim\limits_{x\to1} x + \lim\limits_{x\to1} 2}$$

$$= \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

Portanto, a reta $x = 1$ não é assíntota vertical do gráfico de $f(x)$.

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+}\frac{\overbrace{x^2-1}^{\to 3}}{\underbrace{x^2+x-2}_{\to 0^-}} = -\infty$$

Portanto, a reta $x = -2$ é assíntota vertical do gráfico de $f(x)$ e como em 1 f possui uma descontinuidade removível, então a reta $x = -2$ é a única assíntota vertical do gráfico de $f(x)$.

***Questão* 4.**

$a)\ Calcule\ \lim_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+2)x+2a}{a^4-x^4}$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{a^4-x^4}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-2)}{(a^2-x^2)(a^2+x^2)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-2)}{(a-x)(a+x)(a^2+x^2)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-2)}{-(x-a)(a+x)(a^2+x^2)};\quad *\ Obs.: se\ x\to a, então\ x\neq a\ e\ portanto, x-a\neq 0.$$
$$=\lim_{x\to a}-\frac{x-2}{(a+x)(a^2+x^2)}$$
$$=\frac{\lim_{x\to a}(-x+2)}{\lim_{x\to a}(a+x)\times\lim_{x\to a}(a^2+x^2)}$$
$$=\frac{\lim_{x\to a}-x+\lim_{x\to a}2}{\left[\lim_{x\to a}a+\lim_{x\to a}x\right]\times\left[\lim_{x\to a}a^2+\lim_{x\to a}x^2\right]}$$
$$=\frac{-a+2}{[a+a].[a^2+a^2]}=\frac{-a+2}{4a^3}=-\frac{a-2}{4a^3}$$

$b)\ Calcule\ \lim_{x\to -1^+}|x^2-9x-10|-2$

$$*\ Obs.: |x^2-9x-10|=\begin{cases}x^2-9x-10, & x\leq 1\ ou\ x\geq 10\\ -(x^2-9x-10), & 1<x<10\end{cases}.$$

$*\ Obs.: se\ x\to 1^+, então\ x>1. Portanto, |x^2-9x-10|=-(x^2-9x-10).$

$$\lim_{x\to -1^+}|x^2-9x-10|-2=\lim_{x\to -1^+}(-x^2+9x+10-2)$$
$$=\lim_{x\to -1^+}(-x^2+9x+8)$$
$$=\lim_{x\to -1^+}-x^2+\lim_{x\to -1^+}9x+\lim_{x\to -1^+}8$$
$$=-(-1)^2+9\times(-1)+8$$
$$=-1-9+8$$
$$=-2.$$

***Questão* 5.**

$a)\ Se\ f(x)=[\![x]\!]+[\![-x]\!], mostre\ que\ \lim_{x\to 2}([\![x]\!]+[\![-x]\!])\ existe, mas\ que$ é $diferente\ de\ f(2).$

$f(2)=[\![2]\!]+[\![-2]\!]=2-2=0$

$*\ Obs.: se\ x\to 2^+, então\ x>2\ e, portanto, [\![x]\!]=2. Por\ outro\ lado, -x<-2\ e,$
$portanto, [\![-x]\!]=-3. Logo,$

$\lim_{x\to 2^+}(\llbracket x\rrbracket + \llbracket -x\rrbracket) = \lim_{x\to 2^+}\llbracket x\rrbracket + \lim_{x\to 2^+}\llbracket -x\rrbracket = 2 - 3 = -1.$

$*\,Obs.:$ *se* $x \to 2^-$, *então* $x < 2$ *e, portanto,* $\llbracket x\rrbracket = 1$. *Por outro lado,* $-x > -2$ *e, portanto,* $\llbracket -x\rrbracket = -2$. *Logo,*

$\lim_{x\to 2^-}(\llbracket x\rrbracket + \llbracket -x\rrbracket) = \lim_{x\to 2^-}\llbracket x\rrbracket + \lim_{x\to 2^-}\llbracket -x\rrbracket = 1 - 2 = -1.$

Como os limites laterais de f *em* 2 *existem e são iguais, isto é,* $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$ *então* $\lim_{x\to 2} f(x)$ *existe e* $\lim_{x\to 2} f(x) = -1$.

Entretanto, $f(2) \neq \lim_{x\to 2} f(x)$. *Ou seja,* f *é descontínua em* 2.

b) Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right)$ *ou mostre que ele não existe.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right).\frac{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}}{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+ax-(x^2+bx)}{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{ax-bx}{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x(a-b)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{b}{x}\right)}}\ ;\ *\,Obs.: \sqrt{x^2} = |x|\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x(a-b)}{|x|\sqrt{1+\frac{a}{x}} + |x|\sqrt{1+\frac{b}{x}}}; \text{se } x\to\infty, \text{então } |x| = x.\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x(a-b)}{x\sqrt{1+\frac{a}{x}} + x\sqrt{1+\frac{b}{x}}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{x}} + \sqrt{1+\frac{b}{x}}}\\
&= \frac{\lim_{x\to\infty} a - \lim_{x\to\infty} b}{\sqrt{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}} + \sqrt{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}}}\\
&= \frac{a-b}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}}\\
&= \frac{a-b}{2}.
\end{aligned}$$

14.2 1ª Prova – 18 de Fevereiro de 2017

***Questão* 1.**

$a)$ *Determine os valores de* c *para que a função* f *seja contínua em* $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} |2x-3|, & x \geq -2 \\ cx+1, & x < -2 \end{cases}.$$

$b)$ *Encontre os valores de* a *para que* f *seja contínua em* $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & se\ x < a \\ -1, & se\ x \geq a \end{cases}.$$

***Questão* 2.**

$a)$ *Mostre que a função* $f(x) = x^3 - 4x + 2$ *possui três raízes reais distintas.*

$b)$ *Determine as assíntotas horizontais do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{[\![x]\!]}{x^2+1}$.

***Questão* 3.**

$a)$ *Determine os valores de* a *para que o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2ax+a}$ *tenha apenas uma assíntota vertical. Para cada valor de* a *dê a equação da assíntota.*

$b)$ *Encontre o valor do inteiro positivo* n *para que a reta* $y = 1$ *seja assíntota horizontal do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^n-1}$.

***Questão* 4.**

$$a)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-1}}{5x+4}$$

$$b)\ \lim_{x\to1} \operatorname{tg}\left[\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\cdot\frac{\pi}{2}\right];$$

$$c)\ \lim_{x\to2} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}};$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$

***Questão* 1.**

(a) *Determine os valores de c para que a função f seja contínua em* $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} |2x-3|, & x \geq -2 \\ cx+1, & x < -2 \end{cases}.$$

$$* \; Obs.: |2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & se\ x \geq 3/2 \\ -(2x-3), & se\ x < -3/2 \end{cases}.$$

f é uma função definida por partes, onde a função modular $|2x-3|$ *é contínua em* $\mathbb{R}$ *assim como a função polinomial* $(cx+1)$, *mas como estas funções estão definidas em intervalos diferentes, concluímos apenas que f é contínua em* $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. *Portanto, para que f seja contínua em* $\mathbb{R}$ *é condição suficiente que f seja contínua em* -2. *Logo,* $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$.

$* \; f(-2) = |2 \times (-2) - 3| = |-4-3| = |-7| = 7.$

$* \; \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} |2x-3| = \lim_{x \to -2^+} -(2x-3) = -(-4-3) = 7$

$* \; \lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (cx+1) = -2c+1.$

Primeiramente, $\lim_{x \to -2} f(x)$ *deve existir e para tanto ...*

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$$
$$-2c+1 = 7$$
$$2c = -6 \therefore c = -3$$

Com $c = -3$, *temos* $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 7$, *ou seja, f é contínua em* -2 *e, com a continuidade analisada acima, concluimos que f é contínua em* $\mathbb{R}$ *para* $c = -3$.

(b) *Encontre os valores de a para que f seja contínua em* $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & se\ x < a \\ -1, & se\ x \geq a \end{cases}.$$

f é uma função definida por partes, onde a primeira sentença é uma função polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$. *Logo f é contínua em* $(-\infty, a)$. *Já a segunda sentença é uma função constante, também contínua em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, f é contínua em* $(a, +\infty)$. *Com essa análise, para que f seja contínua em* $\mathbb{R}$ *é condição suficiente que f seja contínua em a. Logo,* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$* \; f(a) = -1$

$* \; \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} -1 = -1.$

$* \; \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} (x^2+2x) = a^2+2a$

Primeiramente, $\lim_{x \to a} f(x)$ *deve existir e para tanto ...*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$
$$a^2+2a = -1$$
$$a^2+2a+1 = 0$$
$$(a+1)^2 = 0 \therefore a = -1$$

Com $a = -1$ *temos* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = -1$, *ou seja, f é contínua em a e, com o intervalo de continuidade definido anteriormente, f é contínua em* $\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{Questão\ 2.}$

(a) *Mostre que a função* $f(x) = x^3 - 4x + 2$ *possui três raízes reais distintas.*

f *é uma função polinomial e, portanto, contínua em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *é contínua em todo intervalo fechado* $I \subset \mathbb{R}$.

$* \; f(0) = 0^3 - 4 \times 0 + 2 = 2$
$* \; f(1) = 1^3 - 4 \times 1 + 2 = -1$
$* \; f(2) = 2^3 - 4 \times 2 + 2 = 2$
$* \; f(-3) = (-3)^3 - 4 \times (-3) + 2 = -13$

Como f *é contínua em todo intervalo fechado* $I \subset \mathbb{R}$, *então* f *é contínua nos intervalos fechados* $[-3,0]$, $[0,1]$ *e* $[1,2]$. *E ainda,* 0 *é um número entre* $f(-3)$ *e* $f(0)$, *assim como, entre* $f(0)$ *e* $f(1)$ *e entre* $f(1)$ *e* $f(2)$ *então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existem números* $c_1 \in (-3,0)$, $c_2 \in (0,1)$ *e* $c_3 \in (1,2)$ *tais que* $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$. *Ou seja,* f *possui três raízes reais distintas.*

(b) *Determine as assíntotas horizontais do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{[\![x]\!]}{x^2+1}$.

Dizemos que a reta $y = L$ *é assíntota horizontal do gráfico da função* f *se* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Sobre a função $[\![x]\!]$ *temos a seguinte desigualdade:*

$$x - 1 < [\![x]\!] \leq x$$

Como $(x^2+1) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *então temos*

$$\frac{x-1}{x^2+1} < \frac{[\![x]\!]}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$$

Seja $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ *e* $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, *então*

$$g(x) < f(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{0-0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{0-0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$Se\ g(x) < f(x) \leq h(x), para\ todo\ x \in \mathbb{R}\ e\ \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = 0, assim\ como$ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = 0, pelo\ Teorema\ do\ Confronto\ temos$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{[\![x]\!]}{x^2+1} = 0 \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{[\![x]\!]}{x^2+1} = 0$$

$Logo, a\ reta\ y = 0\ \text{é}\ a\ \text{única}\ \text{assíntota}\ horizontal\ do\ \text{gráfico}\ de\ f(x)$

Questão 3.

(a) *Determine os valores de a para que o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2ax+a}$ tenha apenas uma assíntota vertical. Para cada valor de a dê a equação da assíntota.*

Domínio da função f:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2ax + a \neq 0\}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2-2ax+a}$$

Vamos analisar duas situações distintas: a primeira considerando que f possui apenas uma descontinuidade e a segunda que possui duas descontinuidades sendo uma delas removível.

Situação 1. Se f possui apenas uma descontinuidade, implica dizer que $x^2 - 2ax + a$ possui raíz única com multiplicidade 2. Isto é, $(x^2 - 2ax + a)$ é um quadrado perfeito.

$$(x^2 - 2ax + a) = (x-a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a = x^2 - 2ax + a^2$$
$$a = a^2$$
$$a^2 - a = 0$$
$$a(a-1) = 0$$
$$\therefore a = 0 \ \ ou\ \ a = 1$$

$*\ Para\ a = 0, temos:$

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2} \quad ; \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{\overbrace{x^2+x-2}^{\to -2}}{\underbrace{x^2}_{\to 0^+}} = -\infty$$

$Logo, a\ reta\ x = 0\ \text{é}\ \text{assíntota}\ vertical\ \text{única}\ do\ \text{gráfico}\ de\ f\ para\ a = 0.$

$*\ Para\ a = 1, temos:$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} \ ; D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x+2}^{\substack{3\\ \uparrow}}}{\underbrace{x-1}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$

Logo, a reta $x = 1$ é assíntota vertical única do gráfico de f para $a = 1$.

Situação 2. Se f possui duas descontinuidades sendo uma delas removível, então, numerador e denominador tem raíz em comum. Como na situação 1 já foi apresentado o caso em que $x = 1$ era raiz comum a ambos, resta analisar quando $x = -2$ é raiz do denominador.

$$x^2 - 2ax + a = 0$$
$$(-2)^2 - 2a(-2) + a = 0$$
$$4 + 4a + a = 0$$
$$5a = -4 \therefore a = -4/5$$

$*$ *Para $a = -4/5$ temos:*

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{4}{5}} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)\left(x - \frac{2}{5}\right)}; D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \; e \; x \neq \frac{2}{5}\right\}$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)\left(x-\frac{2}{5}\right)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-1}{x-\frac{2}{5}} = \frac{-3}{-\frac{12}{5}} = \frac{5}{4}.$$

Logo, a reta $x = -2$ não é assíntota vertical do gráfico de f para $a = -4/5$.

$$\lim_{x\to \frac{2}{5}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{2}{5}^+} \frac{\overbrace{x^2+x-2}^{\substack{-36/25\\ \uparrow}}}{\underbrace{x^2+\frac{8}{5}x-\frac{4}{5}}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = -\infty$$

Logo, a reta $x = \frac{2}{5}$ é assíntota vertical única do gráfico de f para $a = -4/5$.

(b) Encontre o valor do inteiro positivo n para que a reta $y = 1$ seja assíntota horizontal do gráfico da função $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^n - 1}$.

Se a reta $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico da função f, então

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^n-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{x^{n-2}-\frac{1}{x^2}}$$

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, então $\lim_{x\to\infty}\left(x^{n-2} - \frac{1}{x^2}\right)$ existe e $\lim_{x\to\infty}\left(x^{n-2} - \frac{1}{x^2}\right) \neq 0$, e ainda,

$\lim_{x\to\infty}\left(x^{n-2} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$. *Logo,*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{n-2}-\frac{1}{x^2}\right)=1\,;como\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0, então\ \lim_{x\to\infty}\left(x^{n-2}-\frac{1}{x^2}\right)=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}x^{n-2}=1.$$
Isso implica dizer que $x^{n-2}=x^0$ *e portanto,* $n=2$.

***Questão* 4.**

$$(a)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-1}}{5x+4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-1}}{5x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(5+\frac{4}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}}{x\left(5+\frac{4}{x}\right)};\quad se\ x\to-\infty, então\ |x|=-x.$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}}{x\left(5+\frac{4}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}}{5+\frac{4}{x}}$$
$$=-\frac{\sqrt{\lim_{x\to-\infty}3-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to-\infty}5+\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}}$$
$$=-\frac{\sqrt{3-0}}{5+0}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

$$(b)\ \lim_{x\to1}\operatorname{tg}\left[\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.\frac{\pi}{2}\right];$$

Seja $g(x)=\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.\frac{\pi}{2}$ *e* $f(x)=\operatorname{tg}x$. *Então,* $\lim_{x\to1}\operatorname{tg}\left[\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.\frac{\pi}{2}\right]=\lim_{x\to1}f(g(x))$.

$$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

$*$ *Seja* $t=\sqrt[6]{x}$. *Se* $x\to1$, *então* $t\to1$. *Ajustando o limite, obtemos ...*

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{t\to1}\frac{t-1}{t^2-1}=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to1}\frac{1}{t+1}=\frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to1}g(x)=\frac{\pi}{2}.\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$$

Como f *é contínua em* $\frac{\pi}{4}$ *e* $\lim_{x\to1} g(x) = \frac{\pi}{4}$, *então* $\lim_{x\to1} f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$
Em outras palavras,

$$\lim_{x\to1} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to1} g(x)\right) = \text{tg}\left[\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.\frac{\pi}{2}\right] = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

$(c)\ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}};$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \lim_{x\to2}\left[\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}.\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}\right]$$
$$= \lim_{x\to2}\frac{(x-2)\big(\sqrt{2}+\sqrt{x}\big)}{(2-x)\big(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}\big)}$$
$$= \lim_{x\to2}\frac{(x-2)\big(\sqrt{2}+\sqrt{x}\big)}{-(x-2)\big(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}\big)};\quad \textit{se } x\to 2, \textit{então } x\neq 2 \textit{ portanto}, x-2\neq 0$$
$$= \lim_{x\to2} -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}$$
$$= -\frac{\lim_{x\to2}\sqrt{2}+\lim_{x\to2}\sqrt{2}}{\lim_{x\to2}\sqrt[3]{x^2}+\lim_{x\to2}\sqrt[3]{2x}+\lim_{x\to2}\sqrt[3]{4}}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}}$$
$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt[3]{4}} = -\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3.2^{\frac{2}{3}}} = -\frac{2^{\frac{5}{6}}}{3}.$$

$(d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}.\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x^2+x+1-x^2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)};\quad \textit{se } x\to+\infty, \textit{então } \sqrt{x^2} = |x| = x.$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}} + \lim_{x\to+\infty} 1}{\lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+0+0}+1}{1+0} = \frac{2}{1} = 2.$$

14.3 2ª Prova – 24 de Março de 2017

Questão 1.

a) *Dada a relação* $x^2y^2 + xy = 2$, *determine os pontos da curva onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.*

b) *Mostre que as retas normais à curva* $y = (x^2 - 1)^2 . (x + 1)^3$ *nos pontos onde ela toca o eixo das abscissas são verticais.*

Questão 2.

a) *Dada* $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x\,, & se\ 0 < x \leq \pi/4 \\ -\operatorname{cotg} x\,, & se\ \pi/4 < x < \pi/2 \end{cases}$, *determine a função* $f'(x)$.

b) *Calcule a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e pela reta normal a* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *em* $x = \pi/4$.

Questão 3.

a) *Encontre a derivada da função* $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{tg}(4x)}{1 + \operatorname{tg}(4x)}}$.

b) *Calcule a derivada de* $y = \dfrac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^{3x} - a^{-3x}}$.

Questão 4.

a) *Seja* $f(x) = \operatorname{sen}^2(2x) . \sqrt[3]{\cos(2x)}$, *com* $x \in [0, \pi]$. *Encontre* $f'(x)$ *e determine onde* f *é diferenciável.*

b) *Encontre a equação da reta tangente à curva* $x.e^y + y.e^x = 1$ *no ponto* $(0,1)$

Questão 5.

a) *Usando a definição de derivada, mostre que existe uma reta tangente ao gráfico de* $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ *que passa pelo ponto* $(1,2)$. *Dê uma equação para esta reta.*

b) *Use diferenciação implícita para mostrar que se* P *é um ponto do círculo* $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, *então a reta tangente em* P *é perpendicular ao raio* CP, *onde* a, b, R *são constantes reais e* $C(a, b)$ *é o centro do círculo.*

***Questão* 1.**

(a) *Dada a relação* $x^2y^2 + xy = 2$, *determine os pontos da curva onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.*

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2y^2) + \frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(2)$$
$$2xy^2 + 2x^2yy' + y + xy' = 0$$
$$y' = -\frac{2xy^2 + y}{2x^2y + x}$$
$$y' = -\frac{y(2xy+1)}{x(2xy+1)} \; ; \quad se\ (2xy+1) \neq 0,$$
$$y' = -\frac{y}{x}$$

Se a reta tangente a um ponto da curva é paralela à bissetriz dos quadrantes pares então, neste ponto $y' = -1$.

$$y' = -1 \Rightarrow -\frac{y}{x} = -1 \therefore y = x$$

Substituindo na expressão da curva $y = x$, *obtemos:*

$$x^4 + x^2 = 2$$
$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

Seja $a = x^2, a \geq 0$. *Então,*

$$a^2 + a - 2 = 0$$
$$\Delta = 9$$
$$a = \frac{-1 \pm 3}{2} \longrightarrow a = 1$$

$*$ *Obs.:* $a = -2$ *não satisfaz a condição* $a \geq 0$.

Para $a = 1$, *temos* $x = \pm 1$, *como* $y = x$, *então os pontos onde a reta tangente a curva é paralela à bissetriz dos quadrantes pares* $(y = -x)$ *são:*

$$A = (1,1)\ e\ B = (-1,-1)$$

(b) *Mostre que as retas normais à curva* $y = (x^2 - 1)^2.(x + 1)^3$ *nos pontos onde ela toca o eixo das abscissas são verticais.*

Pontos onde a curva toca o eixo das abscissas: $A(1,0)$ *e* $B(-1,0)$

Mostrar que as retas normais à curva nos pontos A e B são verticais é o equivalente dizer que as retas tangentes em A e B são horizontais, uma vez que num mesmo ponto as retas tangente e normal são ortogonais.

$$y' = 2(x^2 - 1).(2x).(x + 1)^3 + (x^2 - 1)^2.3.(x + 1)^2.1$$

$$y' = (x^2 - 1)(x+1)^2[4x(x+1) + 3(x^2 - 1)]$$
$$y' = (x^2 - 1)(x+1)^2(7x^2 + 4x - 3)$$

$$y'_A = y'(1) = 0 \quad e \quad y'_B = y'(-1) = 0$$

Logo, as retas tangentes nos pontos onde a curva toca o eixo das abscissas são horizontais e, consequentemente, as retas normais nesses pontos são verticais.

Questão 2.

(a) *Dada* $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & se\ 0 < x \leq \pi/4 \\ -\operatorname{cotg} x, & se\ \pi/4 < x < \pi/2 \end{cases}$, *determine a função* $f'(x)$.

Se $0 < x + h < \pi/4$, *então*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} h}{1 - \operatorname{tg} x\,.\operatorname{tg} h} - \operatorname{tg} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg} h\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(1 - \operatorname{tg} x\,.\operatorname{tg} h).h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg} h\,.\sec^2 x}{h.(1 - \operatorname{tg} x\,.\operatorname{tg} h)} \\ &= (\sec^2 x) \times \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg} h}{h} \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x\,.\operatorname{tg} h} \end{aligned}$$

$$* \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg} h}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} h}{h} . \frac{1}{\cos h}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \times \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos h} = 1 \times 1 = 1.$$

$$f'(x) = (\sec^2 x) \times 1 \times \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x\,.0}$$
$$f'(x) = \sec^2 x$$

Se $\pi/4 < x + h < \pi/2$, *então*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{cotg}(x+h) + \operatorname{cotg} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\dfrac{1}{\operatorname{tg}(x+h)} + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\dfrac{1 - \operatorname{tg} x\,.\operatorname{tg} h}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} h} + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg} h\,(1+\operatorname{tg}^2 x)}{h(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} h).\operatorname{tg} x}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{tg} h}{h}.\frac{\sec^2 x}{(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x.\operatorname{tg} h)}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg} h}{h} \times \lim_{h\to 0} \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x.\operatorname{tg} h}$$
$$= 1 \times \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$f'(x) = \operatorname{cossec}^2 x.$

Logo, uma expressão para a derivada da função f é:

$$f'(x) = \begin{cases} \sec^2 x\,, & se\ 0 < x < \pi/4 \\ \operatorname{cossec}^2 x\,, & se\ \pi/4 < x < \pi/2 \end{cases}$$

(b) *Calcule a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e pela reta normal a* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *em* $x = \pi/4$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} |\ x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; *Ponto* $(\pi/4\,, 1)$

Coeficiente angular da reta normal ao gráfico de f em $x = \pi/4$:

$$m_n = -\frac{1}{f'(\pi/4)} = -\frac{1}{\sec^2(\pi/4)} = -\cos^2(\pi/4) = -\frac{1}{2}.$$

Equação da reta normal em $(\pi/4\,, 1)$:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - \pi/4)$$

Interseções com os eixos coordenados:

$$A = \left(0, \frac{\pi+8}{8}\right)\ e\ B = \left(\frac{\pi+8}{4}, 0\right)$$

Área do triângulo $A0B$:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi+8}{8}\right) \times \left(\frac{\pi+8}{4}\right) = \frac{(\pi+8)^2}{64}u.A$$

Questão 3.

(a) *Encontre a derivada da função* $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{tg}(4x)}{1+\operatorname{tg}(4x)}}.$

Seja $u = 4x\,, v = \dfrac{1-\operatorname{tg}(u)}{1+\operatorname{tg}(u)}, y = f(v) = \sqrt{v}$. *Pela Regra da Cadeia, temos:*

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{df}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{-4\sec^2(u)\,[1+\mathrm{tg}(u)] - 4\sec^2(u)\,[1-\mathrm{tg}(u)]}{[1+\mathrm{tg}(u)]^2} = -\frac{8\sec^2(u)}{[1+\mathrm{tg}(u)]^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\mathrm{tg}(4x)}{1-\mathrm{tg}(4x)}}.\left\{-\frac{8\sec^2(4x)}{[1+\mathrm{tg}(4x)]^2}\right\}.4$$

$$f'(x) = -16.\frac{\sec^2(4x)}{[1+\mathrm{tg}(4x)]^2}.\sqrt{\frac{1+\mathrm{tg}(4x)}{1-\mathrm{tg}(4x)}}$$

(b) *Calcule a derivada de* $y = \dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{3x}-a^{-3x}}$. $D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$$y = \frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{3x}-a^{-3x}} \times \frac{a^{3x}}{a^{3x}}$$

$$y = \frac{a^{6x}+1}{a^{6x}-1}$$

$$y' = \frac{6a^{6x}.\ln a\,(a^{6x}-1) - 6a^{6x}\ln a\,(a^{6x}+1)}{(a^{6x}-1)^2}$$

$$y' = -\frac{12a^{6x}}{(a^{6x}-1)^2}.\ln a$$

***Questão* 4.**

(a) *Seja* $f(x) = \mathrm{sen}^2(2x).\sqrt[3]{\cos(2x)}$, *com* $x \in [0,\pi]$. *Encontre* $f'(x)$ *e determine onde* f *é diferenciável.* $D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2\,\mathrm{sen}(2x)\cos(2x).\sqrt[3]{\cos(2x)} + \mathrm{sen}^2(2x).\frac{1}{3}[\cos(2x)]^{-\frac{2}{3}}.[-\mathrm{sen}(2x)].2$$

$$f'(x) = \frac{6\,\mathrm{sen}(2x)\cos^2(2x) - 2\,\mathrm{sen}^3(2x)}{3\sqrt[3]{\cos^2(2x)}};\ D(f') = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ com\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Com $x \in [0,\pi]$ *e sabendo que* $D(f') = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ com\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, *concluimos que* f *é diferenciável em* $\left(0,\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$.

(b) *Encontre a equação da reta tangente à curva* $x.e^y + y.e^x = 1$ *no ponto* $(0,1)$

Verificação: $0.e^1 + 1.e^0 = 0 + 1 = 1$ (*ponto pertence à curva*).

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\frac{d}{dx}(xe^y) + \frac{d}{dx}(ye^x) = \frac{d}{dx}(1)$$
$$e^y + xe^y y' + y'e^x + ye^x = 0$$
$$y' = -\frac{e^y + ye^x}{e^x + xe^y}$$

Coeficiente angular da reta tangente em $(0,1)$:

$$y' = -\frac{e^1 + 1e^0}{e^0 + 0e^1} = -\frac{e+1}{1+0} = -(e+1)$$

Equação da reta tangente:

$$y - 1 = -(e+1).(x-0)$$
$$y = -x(e+1) + 1$$

Questão 5.

(a) *Usando a definição de derivada, mostre que existe uma reta tangente ao gráfico de* $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ *que passa pelo ponto* $(1,2)$. *Dê uma equação para esta reta.*

Pela definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h-1} - \sqrt[3]{x-1}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h-1} - \sqrt[3]{x-1}}{h}.\frac{\sqrt[3]{(x+h-1)^2} + \sqrt[3]{(x+h-1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+h-1)^2} + \sqrt[3]{(x+h-1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-1-(x-1)}{h\left[\sqrt[3]{(x+h-1)^2} + \sqrt[3]{(x+h-1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}\right]}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left[\sqrt[3]{(x+h-1)^2} + \sqrt[3]{(x+h-1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}\right]}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h-1)^2} + \sqrt[3]{(x+h-1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Equação geral de uma reta que passa pelo ponto $(1,2)$:

$$y - 2 = m(x-1)$$

Se essa reta é tangente ao gráfico de f *num ponto* (x,y) *tal que* $y = f(x)$, *então* $m = f'(x)$. *Logo,*

$$f(x) - 2 = f'(x).(x-1)$$
$$\sqrt[3]{x-1} - 2 = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}(x-1)$$

$$3(x-1)-6\sqrt[3]{(x-1)^2}=(x-1)$$

Sendo $x \neq 1$, *temos*:

$$3-6\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1}=1$$
$$2=6\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1}$$
$$\frac{1}{3}=\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^1}$$
$$\frac{1}{3}=(x-1)^{-\frac{1}{3}}$$
$$\left[\frac{1}{3}\right]^{-3}=\left[(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-3}$$
$$27=x-1$$
$$x=28$$

Logo, a reta tangente ao gráfico de $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ *no ponto de abscissa* $x=28$ *passa pelo ponto* $(1,2)$. *A equação dessa reta é dada por*:

$$y-2=f'(28).(x-1)$$
$$y-2=\frac{1}{3\sqrt[3]{(28-1)^2}}(x-1)$$
$$y=\frac{1}{27}(x-1)+2$$
$$y=\frac{1}{27}x+\frac{53}{27}$$

(b) *Use diferenciação implícita para mostrar que se* P *é um ponto do círculo* $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, *então a reta tangente em* P *é perpendicular ao raio* CP, *onde* a,b,R *são constantes reais e* $C(a,b)$ *é o centro do círculo.*

Seja o ponto $P(x_o,y_o)$ *um ponto do círculo. Então* $(x_o-a)^2+(y_o-b)^2=R^2$. *Derivando implicitamente a expressão da curva, temos*:

$$\frac{d}{dx}(x-a)^2+\frac{d}{dx}(y-b)^2=\frac{d}{dx}(R^2)$$
$$2(x-a)+2(y-b).y'=0$$
$$y'=-\frac{x-a}{y-b}$$

No ponto (x_o,y_o) *temos* $y'=-\frac{x_o-a}{y_o-b}$, *coeficiente angular da reta tangente.*

O coeficiente angular da reta que representa o segmento CP *é*:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_o-b}{x_o-a}$$

$O\ produto\ dos\ coeficientes\ angulares$ é:

$$-\frac{x_o - a}{y_o - b} \times \frac{y_o - b}{x_o - a} = -1$$

$Portanto, a\ reta\ tangente\ em\ P$ é $perpendicular\ ao\ raio\ CP.$

14.4 2ª Prova – 25 de Março de 2017

Questão 1.

a) *Para cada ponto de uma curva, a razão entre a diferença (abscissa menos ordenada) e a soma de suas coordenadas é igual ao cubo da ordenada do ponto. Mostre que não há reta tangente horizontal a essa curva.*

b) *Determine as equações das retas normais ao gráfico da função* $f(x) = \operatorname{sen} x \,.\cos x$ *no intervalo* $0 \leq x \leq \pi$, *que são verticais.*

Questão 2.

a) *Obtenha a função* $f'(x)$ *para* $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & se\ x > 1 \\ 2x, & se\ x \leq 1. \end{cases}$

b) *Mostre que são ortogonais as retas tangentes a* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *no ponto de intersecção de seus gráficos.*

Questão 3.

a) *Calcule a derivada de* $y = \operatorname{tg}\left[\operatorname{sen}\sqrt{\sec(x^2+1)}\right]$.

b) *Determine a intersecção das retas tangentes à curva* $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$ *nos pontos de ordenada* 1.

Questão 4.

a) *Sabendo que* $\dfrac{d}{dx}(|x|) = \dfrac{x}{|x|}$, *para* $x \neq 0$ *e usando a regra da cadeia, determine os pontos do gráfico de* $f(x) = a^{|\operatorname{sen} x|}, x \in [0,2\pi]$ *onde a reta tangente é horizontal.*

b) *Encontre uma função cúbica* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *cujo gráfico tenha retas tangentes horizontais nos pontos* $(0,0)$ *e* $(-2,6)$.

Questão 5.

a) *Ache uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $\sqrt[3]{xy} = 14x + y$ *no ponto* $(2,-32)$.

b) *Use a definição de derivada para mostrar que a reta que tangencia o gráfico da função* $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$ *no ponto de abscissa* $x = 3$ *tem mais dois contatos com o gráfico. Dê as abscissas dos pontos de contato.*

***Questão* 1.**

a) Para cada ponto de uma curva, a razão entre a diferença (abscissa menos ordenada) e a soma de suas coordenadas é igual ao cubo da ordenada do ponto. Mostre que não há reta tangente horizontal a essa curva.

Para cada ponto $P(x,y)$ da curva temos:

$$\frac{x-y}{x+y} = y^3 \tag{1}$$

$$x - y = xy^3 + y^4 \ \ ; \ \ x + y \neq 0 \tag{2}$$

$$x = \frac{y(1+y^3)}{1-y^3} \ ; y \neq 1 \ e \ y \neq 0 \tag{3}$$

Derivando implicitamente a expressão da curva em relação a x, temos:

$$\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(xy^3) + \frac{d}{dx}(y^4)$$
$$1 - y' = y^3 + 3xy^2y' + 4y^3y'$$
$$y' = \frac{1-y^3}{1+3xy^2+4y^3}$$

Se a curva $\mathcal{C}$ admite alguma reta tangente horizontal em um ponto $P(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, então, $y' = 0$ neste ponto. Logo,

$$\frac{1-y^3}{1+3xy^2+4y^3} = 0 \Leftrightarrow y^3 = 1 \therefore y = 1.$$

Porém, note que se $P(x,y)$ pertence à curva então satisfaz as condições impostas anteriormente, ou seja, $x + y \neq 0, y \neq 1$ e $y \neq 0$ e, portanto, como não há ponto cuja ordenada vale 1, concluimos que não existe ponto à curva cuja reta tangente é horizontal.

** Obs.: As três formas de reescrever a expressão da curva, apresentarão a mesma conclusão obtida anteriormente!*

b) Determine as equações das retas normais ao gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x \, . \cos x$ no intervalo $0 \leq x \leq \pi$, que são verticais.

** Os pontos onde a reta normal é vertical, a reta tangente é horizontal.*

$f'(x) = \cos x \, . \cos x + \operatorname{sen} x \, (-\operatorname{sen} x)$
$f'(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

Os pontos da função f onde a reta tangente é horizonta, temos $f'(x) = 0$. Logo,
$f'(x) = 0 \Longrightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$

$$\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x \ ; \cos x \neq 0$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 1 \Longrightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1$$

$Com\ 0 \leq x \leq \pi, temos\ portanto\ x = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}.$

$A\ reta\ normal\ nesses\ pontos\ é\ vertical\ com\ equação\ x = x_0, onde\ x_0\ é\ a\ abscissa$
$do\ ponto. Portanto, as\ retas\ normais\ são\ as\ retas\ verticais\ x = \frac{\pi}{4}\ e\ x = \frac{3\pi}{4}.$

Questão 2.

$a)\ Obtenha\ a\ função\ f'(x)\ para\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & se\ x > 1 \\ 2x, & se\ x \leq 1. \end{cases}$

$Pela\ definição\ de\ função\ derivada, temos:$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$Se\ x + h > 1, temos:$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h};\quad * se\ h \to 0, então\ h \neq 0. \\ &= \lim_{h \to 0} (2x + h) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

$Se\ x + h < 1, temos:$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h - 2x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h};\quad * se\ h \to 0, então\ h \neq 0. \\ &= \lim_{h \to 0} 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

$Uma\ expressão\ para\ a\ derivada\ da\ função\ f\ é:$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & se\ x > 1 \\ 2, & se\ x < 1 \end{cases}$$

$b)$ *Mostre que são ortogonais as retas tangentes a* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *no ponto de intersecção de seus gráficos.*

No ponto de intersecção, temos $f(x) = g(x)$. *Isto é,*

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt{x}}\ ; \quad x > 0$$
$$x^{\frac{5}{2}} = 1 \therefore x = 1.$$

Ponto $P(1,1)$.

Coeficiente angular das retas tangentes aos gráficos de f *e* g *no ponto* P:

$f'(x) = 2x \implies f'(1) = 2$
$g'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}} \implies g'(1) = -\dfrac{1}{2}$

Duas retas são ditas ortogonais se o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1. *Logo,*

$$f'(1) \times g'(1) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Portanto, as retas tangentes aos gráficos de f *e* g *no ponto de interseção são ortogonais.*

Questão 3.

$a)$ *Calcule a derivada de* $y = \operatorname{tg}\left[\operatorname{sen}\sqrt{\sec(x^2+1)}\right]$.

Sejam $u = x^2 + 1, v = \sec(u), z = \sqrt{v}$ *e* $w = \operatorname{sen}(z)$, *então* $y = \operatorname{tg}(w)$.

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\cdot\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = [\sec^2(w)].\cos(z).\frac{1}{2\sqrt{v}}.\sec(u).\operatorname{tg}(u).2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x.\sec^2\left[\operatorname{sen}\sqrt{\sec(x^2+1)}\right].\cos\sqrt{\sec(x^2+1)}.\sec(x^2+1).\tan(x^2+1)}{2\sqrt{\sec(x^2+1)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x.\sec^2\left[\operatorname{sen}\sqrt{\sec(x^2+1)}\right].\cos\sqrt{\sec(x^2+1)}.\sec(x^2+1).\tan(x^2+1)}{\sqrt{\sec(x^2+1)}}$$

$b)$ *Determine a intersecção das retas tangentes à curva* $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$ *nos pontos de ordenada* 1.

$$y = 1 \Longrightarrow \frac{1+3x^2}{3+x^2} = 1 \Longrightarrow 1+3x^2 = 3+x^2 \Longrightarrow 2x^2 = 2 \Longrightarrow x^2 = 1 \therefore x = \pm 1$$

$$Pontos\ A(1,1)\ e\ B(-1,1).$$

Coeficiente angular das retas tangentes à curva y nos pontos A e B:

$$y' = \frac{6x(3+x^2) - 2x(1+3x^2)}{(3+x^2)^2}$$
$$y' = \frac{16x}{(3+x^2)^2}$$
$$y'_A = \frac{16}{(3+1^2)^2} = \frac{16}{16} = 1.$$
$$y'_B = \frac{-16}{(3+(-1)^2)^2} = -\frac{16}{16} = -1.$$

Equação das retas tangentes nos pontos A e B:

Ponto A $\quad r_1: y - 1 = 1(x-1)$
$\qquad\qquad r_1: y = x$

Ponto B $\quad r_2: y - 1 = -1(x+1)$
$\qquad\qquad r_2: y = -x$

Intersecção das retas tangentes:

$$x = -x$$
$$2x = 0$$
$$x = 0$$

Ponto de intersecção : $P(0,0)$.

Questão 4.

$a)$ *Sabendo que* $\dfrac{d}{dx}(|x|) = \dfrac{x}{|x|}$, *para* $x \neq 0$ *e usando a regra da cadeia, determine os pontos do gráfico de* $f(x) = a^{|\operatorname{sen} x|}, x \in [0,2\pi]$ *onde a reta tangente é horizontal.*

$$f'(x) = a^{|\operatorname{sen} x|}.\frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|}.\cos x\ ;\ \ \operatorname{sen} x \neq 0.$$

Onde a reta tangente é horizontal, $f'(x) = 0$. *Ou seja,*

$$a^{|\operatorname{sen} x|}.\frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|}.\cos x = 0$$

$*$ *Como* $a^{|\operatorname{sen} x|} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *com* $a > 0$ *e* $a \neq 1$ *e com a restrição* $\operatorname{sen} x \neq 0$ *para a função derivada, então* ...

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$Com\ x \in [0,2\pi], temos\ \ x = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$

$b)$ *Encontre uma função cúbica* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *cujo gráfico tenha retas tangentes horizontais nos pontos* $(0,0)$ *e* $(-2,6)$.

Primeira informação: os pontos $(0,0)$ *e* $(-2,6)$ *pertencem ao gráfico da função. Ou seja, se* $y = f(x)$, *então* $f(0) = 0$ *e* $f(-2) = 6$. *Logo,*

$f(0) = a.0^3 + b.0^2 + c.0 + d = 0 \therefore d = 0.$
$f(-2) = a.(-2)^3 + b.(-2)^2 + c.(-2) = 6$

$$-8a + 4b - 2c = 6 \quad Eq.1$$

Segunda informação: as retas tangentes em $x = 0$ *e* $x = -2$ *são horizontais. Ou seja,* $f'(0) = f'(-2) = 0$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f'(0) = 3a.0^2 + 2b.0 + c = 0 \therefore c = 0.$
$f'(-2) = 3a(-2)^2 + 2b.(-2) = 0$

$$12a - 4b = 0 \Longrightarrow b = 3a \quad Eq.2$$

$$\begin{cases} -8a + 4b = 6 \\ \quad b = 3a \end{cases} \rightarrow -8a + 12a = 6 \longrightarrow 4a = 6 \therefore a = \frac{3}{2} \Longrightarrow b = \frac{9}{2}$$

A função cúbica em questão é $y = \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2.$

Questão 5.

$a)$ *Ache uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $\sqrt[3]{xy} = 14x + y$ *no ponto* $(2,-32)$.

Verificação: $\sqrt[3]{-64} = 28 - 32$

$$-4 = -4 \ \ ; Ponto\ (2,-32)\ pertence\ à\ curva!$$

Derivando implicitamente a expressão da curva temos:

$$\frac{d}{dx}(xy)^{\frac{1}{3}} = \frac{d}{dx}(14x) + \frac{d}{dx}(y)$$
$$\frac{1}{3}(xy)^{-\frac{2}{3}}.(y + xy') = 14 + y'$$
$$(xy)^{-\frac{2}{3}}.(y + xy') = 42 + 3y'$$
$$y' = \frac{42 - y(xy)^{-\frac{2}{3}}}{x(xy)^{-\frac{2}{3}} - 3} = \frac{42\sqrt[3]{(xy)^2} - y}{x - 3\sqrt[3]{(xy)^2}}$$

$No\ ponto\ P(2,-32), temos:$

$$y' = \frac{42\sqrt[3]{(-64)^2} - (-32)}{2 - 3\sqrt[3]{(-64)^2}} = \frac{42 \times 16 + 32}{2 - 3 \times 16} = -\frac{704}{46} = -\frac{352}{23}.$$

$Equação\ da\ reta\ tangente\ no\ ponto\ (2,-32):$

$$y - (-32) = -\frac{352}{23}(x-2)$$
$$y = -\frac{352}{23}x + \frac{704}{23} + 32$$
$$y = -\frac{352}{23}x + \frac{1440}{23}$$

$b)$ $Use\ a\ definição\ de\ derivada\ para\ mostrar\ que\ a\ reta\ que\ tangencia\ o\ gráfico\ da\ função\ f(x) = |x^2 - 5x + 4|\ no\ ponto\ de\ abscissa\ x = 3\ tem\ mais\ dois\ contatos\ com\ o\ gráfico.$ $Dê\ as\ abscissas\ dos\ pontos\ de\ contato.$ $D(f) = \mathbb{R}$

$*\ Ponto\ de\ abscissa\ x = 3:\ \ P(3,2).$

$$f(x) = |x^2 - 5x + 4| = \begin{cases} x^2 - 5x + 4, & x \leq 1\ ou\ x \geq 4 \\ -(x^2 - 5x + 4), & 1 < x < 4 \end{cases}$$

$O\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ que\ tangencia\ o\ gráfico\ de\ f\ no\ ponto\ de\ abscissa\ x = 3\ é\ dado\ por:$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-(3+h)^2 + 5(3+h) - 4 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 15 + 5h - 6}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} -\frac{h(h+1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (-h - 1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

$Equação\ da\ reta\ tangente:$

$$y - 2 = -1(x - 3)$$
$$y = -x + 5$$

$As\ demais\ interseções\ que\ a\ reta\ tangente\ em\ x = 3\ pode\ ter\ com\ o\ gráfico\ de\ f\ se\ dá\ para\ x < 1\ ou\ x > 4.$ $Logo,$

$$-x + 5 = x^2 - 5x + 4$$
$$x^2 - 4x - 1 = 0$$
$$\Delta = 20$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$
$$x_1 = 2 + \sqrt{5} \quad e \quad x_2 = 2 - \sqrt{5}$$

Onde x_1 *e* x_2 *são as abscissas dos pontos de contato entre a reta tangente em* $x = 3$ *e o gráfico de* f.

14.5 3ª Prova – 28 de Abril de 2017

Questão 1.

$a)$ *Sabendo que a função* $f(x) = \ln\left(\ln\left|\frac{x^2+2}{x-1}\right|\right)$ *é contínua em* $x \neq 1$, *determine onde ela é diferenciável.*

$b)$ *Determine, caso existam, as retas tangentes ao gráfico de* $y = \log_{10}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ *que são horizontais.*

Questão 2.

$a)$ *Suponha que uma bola de neve esteja se derretendo, com o raio decrescendo a uma velocidade constante, passando de* $30cm$ *para* $20cm$ *em* 45 *minutos. Qual a taxa de variação do volume quando o raio está com* $25cm$?

$b)$ *Um farol giratório completa uma volta a cada* 15 *segundos. O farol está a* 60 *metros de* P, *o ponto mais próximo de uma praia retilínea. Determine a razão em que um raio de luz do farol está se movendo ao longo da praia em um ponto* Q, *a* 150 *metros de* P.

Questão 3.

$a)$ *Para quais valores de a e b a função* $f(x) = axe^{bx^2}$ *possui valor máximo igual a* 1 *no ponto de abscissa* 2?

$b)$ *Determine os valores de máximo e mínimo absolutos de* $F(x) = \frac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$ *no intervalo* $[0,2\pi]$.

Questão 4.

$a)$ *Defina* $\arccos x$ *como sendo o número* $y \in [0,\pi]$, *tal que* $\cos y = x$ *e prove que* $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$b)$ *Use derivação logarítmica para determinar uma equação da reta tangente à curva* $y = \frac{x^2.\sqrt{x+3}.\cos(\pi x)}{(x^3+1).e^{x-1}}$.

Questão 5.

$a)$ *Mostre que qualquer função da forma* $y = A.\operatorname{senh}(mx) + B.\cosh(mx)$ *satisfaz a equação* $y'' = m^2y$ *e encontre* y *de forma que* $y'' = 9y, y(0) = -4$ *e* $y'(0) = 6$.

b) Uma cápsula espacial tem o formato de um cilindro circular reto com uma semiesfera em cada uma das bases. Ocilindro possui 4 metros de altura e 2 metros de raio da base. Use aproximação linear para estimar o aumento da área da superfície do objeto se for aplicada uma camada isolante térmica de 0,5cm de espessura.

Questão 1.

a) Sabendo que a função $f(x) = \ln\left(\ln\left|\frac{x^2+2}{x-1}\right|\right)$ *é contínua em* $x \neq 1$*, determine onde ela é diferenciável.*

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln\left|\frac{x^2+2}{x-1}\right|} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)} \cdot \frac{2x(x-1) - 1.(x^2+2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln\left|\frac{x^2+2}{x-1}\right|} \cdot \frac{x-1}{x^2+2} \cdot \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-2}{[(x^2+2)(x-1)].\ln\left|\frac{x^2+2}{x-1}\right|}$$

De posse do domínio da função f*, e analisando a função derivada, concluimos que* $D(f) = D(f')$*. Isto é, a função* f *é diferenciável onde está definida, ou seja,* f *é diferenciável em seu domínio, isto é,* $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

b) Determine, caso existam, as retas tangentes ao gráfico de $y = \log_{10}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ *que são horizontais.*

Domínio da função: $D(y) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2-1}{2x} > 0\right\}$

$+++++(-1)------(1)++++ \quad (x^2-1)$

$-----------(0)++++++++ \quad (2x)$

$-----(-1)++(0)--(1)++++ \quad (x^2-1)/2x$

$D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

$$y' = \frac{1}{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right).\ln 10} \cdot \frac{2x(2x) - 2(x^2-1)}{(2x)^2}$$

$$y' = \frac{2x}{(x^2-1).\ln 10} \cdot \frac{2x^2+2}{(2x)^2}$$

$$y' = \frac{2(x^2+1)}{2x(x^2-1).\ln 10}$$

$$y' = \frac{x^2+1}{x(x^2-1).\ln 10}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0\,; \quad \nexists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0$

Logo, o gráfico da função $y = \log_{10}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ *não possui reta tangente horizontal.*

***Questão* 2.**

a) Suponha que uma bola de neve esteja se derretendo, com o raio decrescendo a uma velocidade constante, passando de 30*cm para* 20*cm em* 45 *minutos. Qual a taxa de variação do volume quando o raio está com* 25*cm?*

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r_f - r_i}{\Delta t} = \frac{20-30}{45} = -\frac{10}{45} = -\frac{2}{9}\,cm/min$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

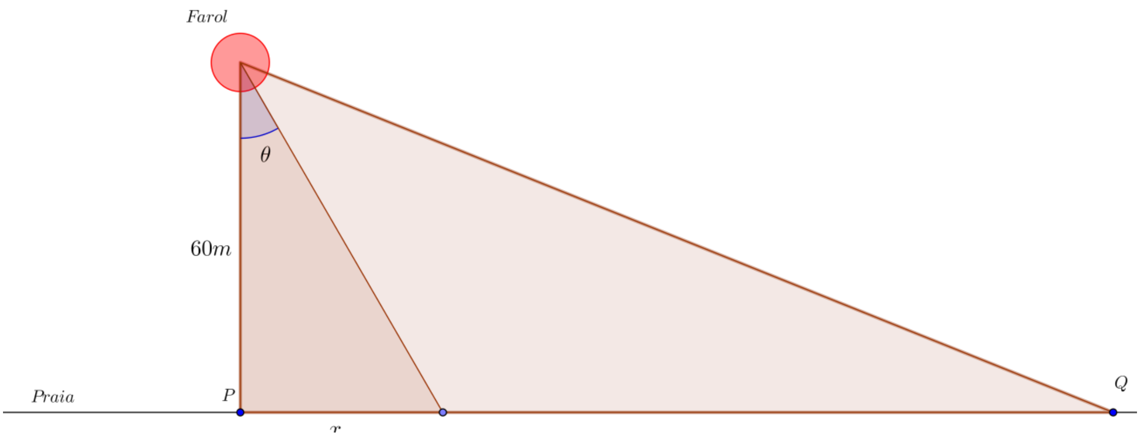
Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}.\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dV}{dt} = (4\pi r^2).\left(-\frac{2}{9}\right)$$

Quando $r = 25cm$, *a taxa de variação do volume* (dV/dt) é:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=25cm} = (4\pi \times 25^2).\left(-\frac{2}{9}\right)$$
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=25cm} = -\frac{5000\pi}{9}\,cm^3/min$$

b) Um farol giratório completa uma volta a cada 15 *segundos. O farol está a* 60 *metros de P, o ponto mais próximo de uma praia retilínea. Determine a razão em que um raio de luz do farol está se movendo ao longo da praia em um ponto Q, a* 150 *metros de P.*



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{15}\,rad/s$$

Pela ilustração tiramos a relação entre as variáveis x e θ *dada pela expressão:*

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{60}$$
$$x = 60.\operatorname{tg}\theta$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{dx}{dt} = 60.\sec^2\theta.\frac{d\theta}{dt}$$

Quando $x = 150m$, *temos* $\operatorname{tg}\theta = 5/2$ *e, usando a identidade trigonométrica, obtemos:*

$$\sec^2\theta = 1 + \text{tg}^2\theta = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4}$$

Logo,

$$\frac{dx}{dt} = 60.\frac{29}{4}.\frac{2\pi}{15}$$
$$\frac{dx}{dt} = 58\pi\, m/s$$

Questão 3.

a) Para quais valores de a e b a função $f(x) = axe^{bx^2}$ *possui valor máximo igual a 1 no ponto de abscissa 2?*

$$f(2) = 1 \Rightarrow 2ae^{4b} = 1$$

f é uma função definida pelo produto de uma função polinomial contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$*, por uma função exponencial também contínua e derivável em* $\mathbb{R}$*. Logo, f é contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$*.*

"Se f possui um máximo ou mínimo local em c e $f'(c)$ *existir, então* $f'(c) = 0$*"*
(Teorema de Fermat)

Daqui concluimos que $f'(2) = 0$*. Logo,*

$f'(x) = ae^{bx^2} + ax.(2bx).e^{bx^2}$
$f'(2) = ae^{4b} + 4abe^{4b}$
$f'(2) = e^{4b}(a + 4ab) = 0 \therefore (a + 4ab) = 0$
$a + 4ab = 0$

$$a(1+4b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (não satisfaz a condição!)} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \therefore b = -\frac{1}{4}.$$

$$2ae^{4.\left(-\frac{1}{4}\right)} = 1 \Rightarrow 2ae^{-1} = 1 \therefore a = \frac{e}{2}.$$

b) Determine os valores de máximo e mínimo absolutos de $F(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$ *no intervalo* $[0,2\pi]$*.*

$D(F) = \mathbb{R}$

Como F é contínua em $\mathbb{R}$*, então F é contínua no intervalo fechado* $[0,2\pi]$*.*
Pelo Teorema do Valor Extremo, F assume um valor máximo absoluto F(c) e um valor mínimo absoluto F(d) em algum número c e d, com $c, d \in [0,2\pi]$*.*

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de F nos extremos do intervalo:

$$F(0) = \frac{\cos 0}{2 + \operatorname{sen} 0} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$
$$F(2\pi) = \frac{\cos 2\pi}{2 + \operatorname{sen} 2\pi} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$

2. Os valores de F nos números crítico de F em $(0,2\pi)$*:*

$$F'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x\,(2 + \operatorname{sen} x) - \cos x\,(\cos x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

$$F'(x) = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x}{(2+\operatorname{sen} x)^2}$$
$$F'(x) = \frac{-1 - 2\operatorname{sen} x}{(2+\operatorname{sen} x)^2}$$
$$F'(x) = -\frac{1 + 2\operatorname{sen} x}{(2+\operatorname{sen} x)^2}$$

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde, ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe"

Como F é diferenciável em $\mathbb{R}$, se F possui um número crítico c, então $F'(c)$ existe e, portanto, $F'(c) = 0$.

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 + 2\operatorname{sen} x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2} \therefore x = \left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}.$

$$F\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{2+\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$F\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{2+\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Comparando os valores obtidos ns etapas 1 e 2 concluimos que $\left(-\sqrt{3}/3\right)$ é o valor mínimo absoluto e $\left(\sqrt{3}/3\right)$ é o valor máximo absoluto de F no intervalo fechado $[0,2\pi]$.

Questão 4.

a) Defina $\arccos x$ como sendo o número $y \in [0,\pi]$, tal que $\cos y = x$ e prove que $\dfrac{d}{dx}(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{1}{\frac{d}{dx}(\cos y)} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y}$$

$\operatorname{sen} y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$;

$*$ *Como $y \in [0,\pi]$ então, $\operatorname{sen} y \geq 0$ e, portanto, $\operatorname{sen} y = +\sqrt{1-\cos^2 y}$.*
Sendo $\cos y = x$, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Use derivação logarítmica para determinar uma equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{x^2.\sqrt{x+3}.\cos(\pi x)}{(x^3+1).e^{x-1}}$.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\,, x \neq -1\}$$

$$\ln y = \ln\left[\frac{x^2.\sqrt{x+3}.\cos(\pi x)}{(x^3+1).e^{x-1}}\right]$$
$$\ln y = \ln x^2 + \ln(x+3)^{\frac{1}{2}} + \ln[\cos(\pi x)] - \ln(x^3+1) - \ln e^{x-1}$$
$$\ln y = \ln x^2 + \frac{1}{2}\ln(x+3) + \ln[\cos(\pi x)] - \ln(x^3+1) - (x-1)$$
Por diferenciação logarítmica, temos:
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2}.(2x) + \frac{1}{2}.\frac{1}{(x+3)}.1 + \frac{1}{\cos(\pi x)}.[-\pi\,\mathrm{sen}(\pi x)] - \frac{1}{(x^3+1)}.(3x^2) - 1$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+3)} - \pi.\mathrm{tg}(\pi x) - \frac{3x^2}{(x^3+1)} - 1$$
$$y' = \frac{x^2.\sqrt{x+3}.\cos(\pi x)}{(x^3+1).e^{x-1}}\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+3)} - \pi.\mathrm{tg}(\pi x) - \frac{3x^2}{(x^3+1)} - 1\right]$$
Dado um ponto (x_0, y_0) do gráfico da função, a equação da reta tangente à curva é dada pela expressão:
$$y - y_0 = y'(x_0).(x - x_0)$$
$$y - y_0 = y_0\left[\frac{2}{x_0} + \frac{1}{2(x_0+3)} - \pi.\mathrm{tg}(\pi x_0) - \frac{3x_0^2}{(x_0^3+1)} - 1\right].(x - x_0)$$
$$y = y_0\left[\frac{2}{x_0} + \frac{1}{2(x_0+3)} - \pi.\mathrm{tg}(\pi x_0) - \frac{3x_0^2}{(x_0^3+1)} - 1\right].(x - x_0) + y_0$$

Questão 5.

a) Mostre que qualquer função da forma $y = A.\mathrm{senh}(mx) + B.\cosh(mx)$ satisfaz a equação $y'' = m^2 y$ e encontre y de forma que $y'' = 9y, y(0) = -4$ e $y'(0) = 6$.

$$y' = m.A.\cosh(mx) + m.B.\mathrm{senh}(mx)$$
$$y'' = m^2.A.\mathrm{senh}(mx) + m^2.B.\cosh(mx)$$
$$y'' = m^2[A.\mathrm{senh}(mx) + B.\cosh(mx)]$$
$$y'' = m^2 y$$

$$y(0) = A.\mathrm{senh}(0) + B.\cosh(0) = 0 + B = B.\ \ y(0) = -4 \therefore B = -4.$$
$$y'(0) = m.A.\cosh(0) + m.B.\mathrm{senh}(0) = m.A + 0 = m.A$$
$$y'(0) = 6 = m.A$$
$$y'' = m^2 y = 9y \Longrightarrow m^2 = 9 \therefore m = \pm 3$$

Para $m = 3$, temos $A = 2$ e para $m = -3$ temos $A = -2$. Logo, temos duas soluções possíveis:

$$y_1 = 2.\mathrm{senh}(3x) - 4.\cosh(3x)$$
$$y_2 = -2.\mathrm{senh}(-3x) - 4.\cosh(-3x)$$

Entretanto, como $\mathrm{senh}(-3x) = -\mathrm{senh}(3x)$ e $\cosh(-3x) = \cosh(3x)$, então $y_2 = y_1$. E portanto, temos apenas uma solução para questão

$$y = 2.\mathrm{senh}(3x) - 4.\cosh(3x)$$

$b)$ *Uma cápsula espacial tem o formato de um cilindro circular reto com uma semiesfera em cada uma das bases. Ocilindro possui* 4 *metros de altura e* 2 *metros de raio da base. Use aproximação linear para estimar o aumento da área da superfície do objeto se for aplicada uma camada isolante térmica de* 0,5*cm de espessura.*

$A_T = \pi r^2 h + 2\pi r^2 + 2\pi r^2$
$A_T = \pi r^2 h + 4\pi r^2 \; ; \quad h = 4m.$
$A_T(r) = 8\pi r^2$

$A_T(2) = 32\pi m^2$
$A'_T(r) = 16\pi r \implies A'_T(2) = 32\pi$

Por aproximação linear, ou linearização de A_T *em* 2, *temos*:

$L(r) = A_T(2) + A'_T(2).(r-2)$
$L(r) = 32\pi + 32\pi(r-2)$

Se a camada isolante térmica tem 0,5*cm de espessura, então* $r = 2{,}005m$. *Logo,*

$L(2{,}005) = 32\pi + 32\pi.(2{,}005 - 2)$
$L(2{,}005) = 32\pi + 32\pi.0{,}005$
$L(2{,}005) = 32{,}16\pi$

Logo, o aumento da área da superfície do objeto foi de $0{,}16\pi m^2$.

14.6 3ª Prova – 29 de Abril de 2017

***Questão* 1.**

a) Determine uma equação para a reta tangete ao gráfico de $y = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$, *com* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *no ponto em que a ordenada é zero.*

b) Seja $F(x) = \ln[f(x)]$. *Sabendo que a reta* $y = 3$ *é tangente ao gráfico de* $y = f(x)$ *em* $x = 2$, *determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $F(x)$ *em* $x = 2$.

***Questão* 2.** *Dois atletas partem ao mesmo tempo, um no sentido horário e outro no sentido* anti-horário, *de dois pontos diametralmente opostos de uma pista circular, com* 100 *metros de raio, a uma mesma velocidade, e de tal modo que o segmento de reta definido por suas posições se afasta do centro da pista a uma velocidade de* $4\,m/s$.

a) Determine a velocidade com que os atletas se aproximam um do outro no instante em que o segmento de reta definido por suas posições está a 60 *metros do centro da pista.*

b) Se o treinador dos atletas estiver no ponto onde eles vão se encontrar, qual a taxa de variação do ângulo sob o qual ele vê os atletas, no instante referido no item (a)?

***Questão* 3.**

a) Determine os valores máximos e mínimos absolutos de $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos(2x)$, *para* $|x| \leq \pi$.

b) Seja $f(x) = x^2 + px + q$. *Ache os valores de p e q tais que* $f(1) = 3$ *seja um valor extremo de f no intervalo* $[0,2]$. *Este valor é máximo ou mínimo?*

***Questão* 4.**

a) Mostre que $D_x[\operatorname{arctg}(e^x)] = \dfrac{\operatorname{sech}(x)}{2}$

b) Qual o valor de $a \in \mathbb{R}$ *para o qual* $y = a.x^x + e^x$ *tem reta tangente, em* $x = 1$, *paralela á reta* $y = 2x + 3$?

***Questão* 5.**

a) Se $x = \ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)$, *mostre que* $\sec\theta = \cosh x$.

b) Se o preço de uma passagem de ônibus de Maceió para Recife for fixado em x reais, uma empresa de transporte coletivo obtém uma receita mensal de $R(x) = 1{,}5x - 0{,}01x^2$ *(em milhares de reais). Dê uma estimativa da variação da receita mensal se o preço for aumentado de R\$50,00 para R\$52,00. Use aproximação linear.*

***Questão* 1.**

a) Determine uma equação para a reta tangete ao gráfico de $y = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$, *com* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *no ponto em que a ordenada é zero.*

$D(y) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Ponto em questão:

$$y = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| = 0$$
$$|\sec x + \operatorname{tg} x| = e^0 = 1$$
$$\left|\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right| = 1$$
$$\left|\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right|^2 = 1^2$$
$$\frac{1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1$$
$$1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$$
$$1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$
$$2\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x = 0$$
$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$$
$$\operatorname{sen} x\,(\operatorname{sen} x + 1) = 0$$
$$\operatorname{sen} x = 0 \quad ou \quad \operatorname{sen} x = -1$$

Considerando $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *o ponto em questão é o ponto* $(0,0)$.

$$y' = \frac{1}{\sec x + \operatorname{tg} x}.(\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x)$$
$$y' = \frac{\sec x\,(\operatorname{tg} x + \sec x)}{\sec x + \operatorname{tg} x}\ ;\ *\ (\sec x + \operatorname{tg} x) \neq 0, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$
$$y' = \sec x$$
$$y'(0) = \sec 0 = 1.$$

Equação da reta tangente em $(0,0)$:

$$y - 0 = 1(x - 0)$$
$$y = x$$

b) Seja $F(x) = \ln[f(x)]$. *Sabendo que a reta* $y = 3$ *é tangente ao gráfico de* $y = f(x)$ *em* $x = 2$, *determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $F(x)$ *em* $x = 2$.

Como a reta $y = 3$ *é tangente ao gráfico de* f *no ponto de abscissa* $x = 2$, *então o ponto* $(2,3)$ *pertence ao gráfico de* f *e neste ponto a reta tangente é horizontal e, portanto,* $f'(2) = 0$.

$F(2) = \ln[f(2)] = \ln 3\ ;\ $ *ponto* $(2, \ln 3)$.

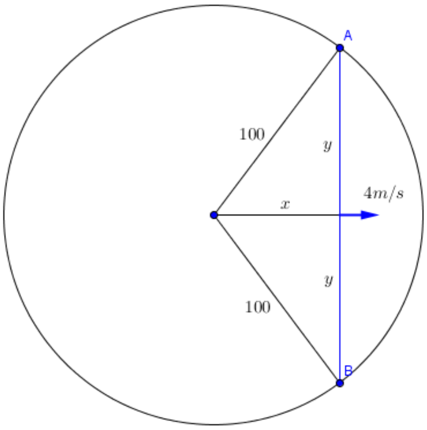
$$F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$F'(2) = \frac{f'(2)}{f(2)} = \frac{0}{3} = 0.$$

Equação da reta tangente ao gráfico de F no ponto de abscissa $x = 2$.

$$y - \ln 3 = 0(x - 2)$$
$$y = \ln 3$$

***Questão* 2.** *Dois atletas partem ao mesmo tempo, um no sentido horário e outro no sentido* anti-horário, *de dois pontos diametralmente opostos de uma pista circular, com* 100 *metros de raio, a uma mesma velocidade, e de tal modo que o segmento de reta definido por suas posições se afasta do centro da pista a uma velocidade de* $4\,m/s$.

$a)$ *Determine a velocidade com que os atletas se aproximam um do outro no instante em que o segmento de reta definido por suas posições está a* 60 *metros do centro da pista.*



Pela ilustração acima, temos $\dfrac{dx}{dt} = 4\,m/s$ *e a relação entre as variáveis* x, y *e* R *é dada pela expressão:*

$$x^2 + y^2 = 100^2$$

Derivando implicitamente a expressão em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(y^2) = \frac{d}{dt}(100^2)$$
$$2x.\frac{dx}{dt} + 2y.\frac{dy}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}.\frac{dx}{dt} = -\frac{4x}{y}$$

No instante em que $x = 60m$, *temos* $y = 80m$. *Logo,*

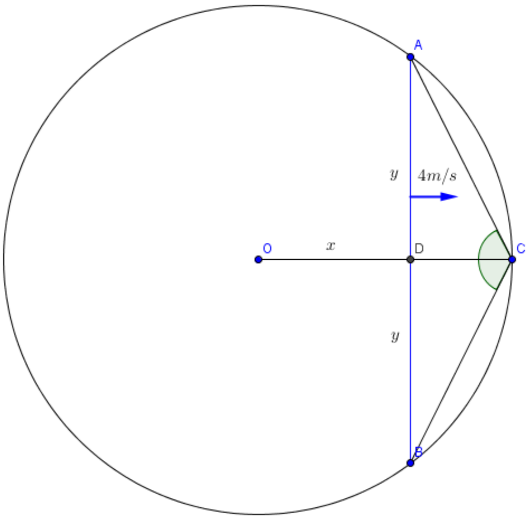
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{4 \times 60}{80} \therefore \frac{dy}{dt} = -3\,m/s$$

Sendo S *a distância entre os dois atletas, temos que* $S = 2y$ *e, portanto,*

$$\frac{dS}{dt} = 2.\frac{dy}{dt} = -6\,m/s$$

Ou seja, os atletas se aproximam à taxa de $6\,m/s$ *no instante em que estão a* 60 *metros do centro da pista. O sinal negativo indica que a distância está diminuindo.*

$b)$ *Se o treinador dos atletas estiver no ponto onde eles vão se encontrar, qual a taxa de variação do ângulo sob o qual ele vê os atletas, no instante referido no item* (a)?



Seja $\theta = A\hat{C}B$, como o triângulo ABC é isósceles, então $A\hat{C}D = D\hat{C}B = \frac{\theta}{2}$.

O segmento $\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC} = 100$. Logo, $\overline{DC} = 100 - x$.

A relação entre as variáveis x, y e θ é dada pela seguinte expressão:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{100 - x}$$

Derivando implicitamente a expressão em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{100 - x}\right)$$

$$\frac{1}{2}.\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right).\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}.(100 - x) - y.\frac{d}{dt}(100 - x)}{(100 - x)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left[\frac{\frac{dy}{dt}.(100 - x) + y.\frac{dx}{dt}}{(100 - x)^2}\right]$$

No instante referido no item (a), temos $\frac{dx}{dt} = 4\,m/s$ e $\frac{dy}{dt} = -3\,m/s$.

Com $x = 60m$ e $y = 80m$, obtemos:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{80}{100 - 60} = \frac{80}{40} = 2$$

$$\sec^2\frac{\theta}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sec^2\frac{\theta}{2} = 1 + 2^2 = 5.$$

Com isso ...

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{5}\left[\frac{-3(100 - 60) + 80 \times 4}{(100 - 60)^2}\right]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{5}\left[\frac{-120 + 320}{1600}\right]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2 \times 200}{5 \times 1600}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\,rad/s$$

***Questão* 3.**

$a)$ *Determine os valores máximos e mínimos absolutos de* $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos(2x)$, *para* $|x| \le \pi$.

f *é uma função contínua no intervallo fechado* $[-\pi, \pi]$. *Pelo Teorema do Valor Extremo,* f *assume um valor máximo absoluto* $f(c)$ *e um valor mínimo absoluto* $f(d)$ *em algum número* c *e* d, *com* $c, d \in [-\pi, \pi]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado:
1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo.*
$f(-\pi) = 2\operatorname{sen}(-\pi) + \cos(-2\pi) = 0 + 1 = 1$
$f(\pi) = 2\operatorname{sen}(\pi) + \cos(2\pi) = 0 + 1 = 1$
2. *Os valores de* f *nos números críticos de* f *em* $(-\pi, \pi)$.

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*".

$f'(x) = 2\cos x - 2\operatorname{sen}(2x)$
$f'(x) = 2\cos x - 4\operatorname{sen} x \cos x$
$f'(x) = 2\cos x\,(1 - 2\operatorname{sen} x)$

Como f *é uma função diferenciável em* $\mathbb{R}$, *se* f *possui um número crítico* c *então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \quad ou \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \therefore x = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\pi) = -2 - 1 = -3$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) = 2 - 1 = 1$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Comparando os valores obtidos nas etapas 1 *e* 2 *concluimos que* (-3) *é o valor mínimo absoluto e* $\left(\frac{3}{2}\right)$ *é o valor máximo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[-\pi, \pi]$.

$b)$ *Seja* $f(x) = x^2 + px + q$. *Ache os valores de* p *e* q *tais que* $f(1) = 3$ *seja um valor extremo de* f *no intervalo* $[0,2]$. *Este valor é máximo ou mínimo?*

Se f *possui um valor extremo* 3 *em* $x = 1$, *então* 1 *é um número crítico de* f. *Como* f *é polinomial e, portanto, contínua e derivável em* $\mathbb{R}$, *se* 1 *é número crítico de* f *então,* $f'(1)$ *existe e* $f'(1) = 0$.

$f(1) = 1^2 + p \times 1 + q = 1 + p + q = 3$

$f'(x) = 2x + p$
$f'(1) = 2 + p = 0 \therefore p = -2.$

$1 + p + q = 3$
$1 + (-2) + q = 3$
$q = 4$

$f(x) = x^2 - 2x + 4 \;\; e \;\; f'(x) = 2x - 2$

Analisando a primeira derivada de f, temos:

$- - - - - - - (1) + + + + + + + + \quad f'(x) = 2x - 2$

A mudança no sinal da derivada de f em 1 de negativa para positiva, indica que em $x = 1$ temos um ponto de mínimo local de f.

Outra maneira de chegar a esta conclusão é pelo Método do Intervalo Fechado, onde $f(0) = 4, f(2) = 4$ e $f(1) = 3$ e comparando os valores obtidos, 3 é o valor mínimo absoluto do intervalo fechado $[0,2]$ e mínimo local da função f.

Questão 4.

a) Mostre que $D_x[\text{arctg}(e^x)] = \dfrac{\text{sech}(x)}{2}$

$$D_x[\text{arctg}(e^x)] = \frac{1}{1 + e^{2x}} . e^x = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{1}{\frac{1}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x}} = \frac{1}{e^{-x} + e^x}$$

$$\frac{\text{sech}(x)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

Logo, $D_x[\text{arctg}(e^x)] = \dfrac{\text{sech}(x)}{2}$.

b) Qual o valor de $a \in \mathbb{R}$ para o qual $y = a.x^x + e^x$ tem reta tangente, em $x = 1$, paralela á reta $y = 2x + 3$?

Em resumo ... determine o valor de a tal que $y'(1) = 2$. Esta é a interpretação do enunciado.

Primeiramente vamos precisar determinar a derivada da função $g(x) = x^x$.
$\ln g(x) = x . \ln x$
Por diferenciação logarítmica, temos:
$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \ln x + 1$$
$g'(x) = g(x)[\ln x + 1] \therefore D_x[x^x] = x^x(\ln x + 1)$

$$y' = a.x^x.(\ln x + 1) + e^x$$
$$y'(1) = a + e = 2$$
$$\therefore$$
$$a = 2 - e.$$

***Questão* 5.**

$a)\ Se\ x = \ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)\,, mostre\ que\ \sec\theta = \cosh x.$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$e^x = e^{\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)} = \sec\theta + \operatorname{tg}\theta$

$e^{-x} = e^{-\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)} = \dfrac{1}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta}$

$$\cosh x = \frac{(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) + \dfrac{1}{\sec\theta + \operatorname{tg}\theta}}{2} = \frac{(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)^2 + 1}{2(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)}$$

$$\cosh x = \frac{\sec^2\theta + 2\sec\theta\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}^2\theta + 1}{2(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)}\ ;\ \operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cosh x = \frac{2\sec^2\theta + 2\sec\theta\operatorname{tg}\theta}{2(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)}$$

$$\cosh x = \frac{2\sec\theta\,(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)}{2(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)}$$

$\cosh x = \sec\theta.$

$b)$ *Se o preço de uma passagem de ônibus de Maceió para Recife for fixado em x reais, uma empresa de transporte coletivo obtém uma receita mensal de* $R(x) = 1{,}5x - 0{,}01x^2$ *(em milhares de reais). Dê uma estimativa da variação da receita mensal se o preço for aumentado de* $R\$50{,}00$ *para* $R\$52{,}00$. *Use aproximação linear.*

Quando $x = 50$, *temos* $R(50) = 1{,}5 \times 50 - 0{,}01 \times 50^2 = 75 - 25 = 50.$

$R'(x) = 1{,}5 - 0{,}02x\ ;\ R'(50) = 1{,}5 - 1{,}0 = 0{,}5.$

A linearização ou aproximação linear de R em $x = 50$ é dada por:

$L(x) = R(50) + R'(50).(x - 50)$

$L(x) = 50 + 0{,}5(x - 50)$

$L(52) = 50 + 0{,}5(52 - 50)$

$L(52) = 50 + 1{,}0$

$L(52) = 51.$

Logo, a variação da receita mensal se o preço for aumentado de $R\$50{,}00$ *para* $R\$52{,}00$ *é dado por* $L(52) - R(50) = 51 - 50 = 1$. *Ou seja, a variação da receita é de 1 milhar de reais.*

14.7 4ª Prova – 19 de Maio de 2017

***Questão* 1**. *Dividindo − se um arame de comprimento L em duas partes, faz − se com uma delas uma circunferência e com a outra, um quadrado. Em que ponto se deve cortar o arame para que a soma das áreas geradas seja mínima?*

***Questão* 2**

$a)$ *Use o Cálculo para demonstrar a Identidade Fundamental Trigonométrica*: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

$b)$ *Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que*, $\forall x > 0, \sqrt{x+1} < \dfrac{x+2}{2}$.

***Questão* 3**

$a)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (1 + \cos x)^{\operatorname{tg} x}$.

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + ax)^{\frac{b}{x}}$.

***Questão* 4**

$a)$ *Determine* $f(x)$, *sabendo que* $f'(x) = \sec^2 x + \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x}$ *e que* $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

$b)$ *Se* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, *determine a, b e c de modo que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em* $(1,2)$ *e que a inclinação da reta tangente no ponto de inflexão seja* -2.

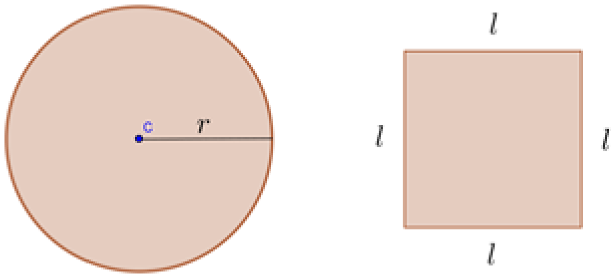
***Questão* 5** *Dada a função* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2}, & se\ x \geq -2\ e\ x \neq 0 \\ 1, & se\ x \leq -2 \end{cases}$,

(i) *Determine os intervalos onde ela é crescente e os intervalos onde ela é decrescente*;
(ii) *Descreva as concavidades*;
(iii) *Encontre seus pontos de máximo e mínimo relativos e absolutos, se existirem*;
(iv) *Determine suas assíntotas, se existirem*;
(v) *Aponte seus pontos de inflexão, caso existam.*

DADO: $f'(x) = 1 - 8x^{-3}$.

De posse destas informações, trace o gráfico de f.

Questão 1. *Dividindo − se um arame de comprimento L em duas partes, faz − se com uma delas uma circunferência e com a outra, um quadrado. Em que ponto se deve cortar o arame para que a soma das áreas geradas seja mínima?*



$*$ *Vamos considerar que uma parte x do fio será usada para fazer o círculo, enquanto que a parte* $y = L - x$ *será usada na confecção do quadrado. Logo,*

$$C = 2\pi r = x \quad e \quad P = 4l = L - x$$

−*Dessas expressões, tiramos os valores de r e l em função do pedaço do fio:*

$$r = \frac{x}{2\pi} \;\; e \;\; l = \frac{L - x}{4}$$

$*$ *A área total obtida pelo círculo mais o quadrado é:*

$$A = A_{Círculo} + A_{Quadrado}$$

$$A = \pi r^2 + l^2$$

$$A = \pi \cdot \frac{x^2}{4\pi^2} + \left(\frac{L - x}{4}\right)^2$$

$$A = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(L - x)^2}{16}$$

$$A'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{(L - x)}{8}$$

$$A'(x) = \frac{x(4 + \pi) - \pi L}{8\pi}$$

−*Analisando o comportamento (sinal) de* $A'(x)$*, temos:*

$$- - - - - - - - - - - - \left(\frac{\pi L}{4 + \pi}\right) + + + + + + + + + \quad A'(x) = x\left(\frac{4 + \pi}{8\pi}\right) - \frac{15}{2}$$

−*Da análise acima, concluímos que em* $x = \pi L/(4 + \pi)$ *temos a área total sendo mínima. Logo, o arame deve ser cortado em dois pedaços, um medindo* $\pi L/(4 + \pi)$ *cm e o outro medindo* $4L/(4 + \pi)$ *cm.*

***Questão* 2**

$a)$ *Use o Cálculo para demonstrar a Identidade Fundamental Trigonométrica*:
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Considere $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ *, com* f *contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \,.\cos x + 2.\cos x\,.(-\operatorname{sen} x)$
$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x\,.\cos x - 2 \operatorname{sen} x\,.\cos x$
$f'(x) = 0.$

A consequência do Teorema do Valor Médio nos diz que:

"*Se* $f'(x) = 0$, *para todo* x *em um intervalo* (a, b), *então* f é *constante em* (a, b)."

Logo, f é *constante em* $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. *Portanto,* $f(x) = C$ *onde* C é *uma constante*.

$$f(0) = \operatorname{sen}^2 0 + \cos^2 0 = 0^2 + 1^2 = 1 = C$$

Ou seja, $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$b)$ *Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que,* $\forall x > 0, \sqrt{x+1} < \dfrac{x+2}{2}$.
Considere $f(x) = \sqrt{x+1} - \dfrac{x+2}{2}$, *cujo domínio* é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.
f *será dita contínua onde estiver definida, isto* é, *em seu domínio. Logo,* f é *contínua em* $[-1, \infty)$.
$f(0) = \sqrt{0+1} - \dfrac{0+2}{2} = 1 - 1 = 0.$
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2}$; $\quad D(f') = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
$f'(0) = 0$ *e* $f'(x) < 0$, *se* $x > 0$.

Pelo domínio da função derivada, concluímos que f é *derivável em* $(-1, \infty)$.

Logo, f é *uma função que satisfaz as seguintes hipóteses*:

1. f é *contínua no intervalo fechado* $[0, x]$;
2. f é *derivável no intervalo aberto* $(0, x)$;

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe algum $c \in (0, x)$ *tal que*
$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$
Note que se $x > 0$, *então* $f'(x) < 0$ *e, portanto,* $f'(c) < 0$. *Então* ...

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < 0 \Rightarrow \frac{f(x) - 0}{x} < 0 \therefore f(x) < 0.$$

$$f(x) < 0 \Longrightarrow \sqrt{x+1} - \frac{x+2}{2} < 0, se\ x > 0$$
$$\sqrt{x+1} < \frac{x+2}{2}, \forall x > 0$$

***Questão* 3**

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1+\cos x)^{\operatorname{tg} x}$. *Indeterminação do tipo* "1^∞"

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1+\cos x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\ln(1+\cos x)^{\operatorname{tg} x}} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x . \ln(1+\cos x)};$$

Calculando o limite do expoente, temos …

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x\,.\ln(1+\cos x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(1+\cos x)}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}}{-\operatorname{cossec}^2 x} = \frac{\frac{1}{1+0}}{1^2} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1+\cos x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x . \ln(1+\cos x)} = e^1 = e.$$

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{b}{x}}$. *Indeterminação do tipo* "1^∞"

$$\lim_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{b}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+ax)^{\frac{b}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{b.\ln(1+ax)}{x}};$$

Calculando o limite do expoente, temos …

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{b.\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{b.\frac{a}{1+ax}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{ab}{1+ax} = \frac{ab}{1+0} = ab.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{b}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{b.\ln(1+ax)}{x}} = e^{ab}.$$

***Questão* 4**

$a)$ *Determine* $f(x)$, *sabendo que* $f'(x) = \sec^2 x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x}$ *e que* $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

$$f'(x) = \sec^2 x + \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \sec^2 x + 2 \operatorname{sen} x$$

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ *é dada por*:

$$f(x) = \operatorname{tg} x - 2\cos x + C$$

Como $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, *temos* ...

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{3} + C$$
$$\sqrt{3} = \sqrt{3} - 2 \times \frac{1}{2} + C$$
$$C = 1$$

Portanto,

$$f(x) = \operatorname{tg} x - 2\cos x + 1$$

b) Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, *determine* a, b *e* c *de modo que o gráfico de* f *tenha um ponto de inflexão em* $(1,2)$ *e que a inclinação da reta tangente no ponto de inflexão seja* -2.

Do enunciado temos as seguintes informações: $f(1) = 2$ *e* $f'(1) = -2$.

$f(1) = a + b + c = 2 \qquad (Eq.1)$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$f'(1) = 3a + 2b + c = -2 \ (Eq.2)$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Se $a > 0$, *temos* $\quad - - - - - (-b/3a) + + + + + \quad f''(x)$
Se $a < 0$, *temos* $\quad + + + + + (-b/3a) - - - - - \quad f''(x)$

Em ambos os casos, em $x = -b/3a$ *ocorre mudança no sinal da derivada. Ou seja, há mudança na direção da concavidade de* f *em* $x = -b/3a$ *e, portanto, é um ponto de inflexão. Como este ponto de inflexão foi dado em* $x = 1$, *temos*:

$$-\frac{b}{3a} = 1 \implies 3a + b = 0 \ (Eq.3)$$

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 3a + 2b + c = -2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2a + b = -4 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \therefore a = 4 \ e \ b = -12$$

$$a + b + c = 2$$
$$4 - 12 + c = 2 \therefore c = 10$$

Logo, $\quad f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 10x.$

$$a = 4 \ ; \quad b = -12 \ ; \quad c = 10$$

$\boldsymbol{Quest}$**ão 5** $Dada\ a\ função\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2}, & se\ x \geq -2\ e\ x \neq 0 \\ 1, \ se\ x \leq -2 \end{cases},$

(i) $Determine\ os\ intervalos\ onde\ ela$ é $crescente\ e\ os\ intervalos\ onde\ ela$ é $decrescente;$
(ii) $Descreva\ as\ concavidades;$
$(iii) Encontre\ seus\ pontos\ de\ máximo\ e\ mínimo\ relativos\ e\ absolutos, se\ existirem;$
$(iv) Determine\ suas\ assíntotas, se\ existirem;$
$(v) Aponte\ seus\ pontos\ de\ inflexão, caso\ existam.$

$\boldsymbol{DADO}: f'(x) = 1 - 8x^{-3}.$

$De\ posse\ destas\ informações, trace\ o\ gráfico\ de\ f.$

$Domínio\ da\ função: \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}.$

$Interseções\ com\ os\ eixos\ coordenados: Não\ há\ interseções!$

$$Explicação: a\ expressão\ \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2} > 0, se\ x \geq -2\ e\ x \neq 0$$

$(i) Intervalos\ de\ crescimento\ e\ decrescimento:$

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}, \qquad x > -2\ e\ x \neq 0$$

$$\begin{array}{ll} (-2) - - - - - (2) + + + + + + & (x^3 - 8) \\ (-2) - - (0) + + + + + + + + + & x^3 \\ (-2) + + (0) - - (2) + + + + + + & f'(x) \end{array}$$

f é $crescente\ onde\ f' > 0, ou\ seja, f$ é $crescente\ em\ (-2,0) \cup (2, \infty);$
f é $decrescente\ onde\ f' < 0, ou\ seja, f$ é $decrescente\ em\ (0,2).$

$(ii)\ Concavidades:$

$$f''(x) = \frac{24}{x^4}, \qquad x > -2\ e\ x \neq 0$$

$f'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$

$f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ em\ (-2,0) \cup (0, \infty).$

$(iii)\ Pontos\ de\ Máximo\ e\ Mínimo\ Relativos\ e\ Absolutos.$

$Pelo\ Teste\ da\ Primeira\ Derivada\ \big(2, f(2)\big)$ é $um\ ponto\ de\ mínimo\ relativo.$
$Ponto\ de\ mínimo: (2,5).$

$Como\ f$ é $crescente\ em\ (2, \infty), então\ f\ não\ possui\ ponto\ de\ máximo\ absoluto\ e,$
$como\ f(2) > f(x), se\ x \leq -2, então\ f\ não\ possui\ ponto\ de\ mínimo\ absoluto.$

(iv) *Assíntotas*:

$Assíntotas\ Verticais$: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

$*\ Obs.: Estas\ assíntotas\ ocorrem\ nas\ descontinuidades\ da\ função.$

$Analisando\ a\ descontinuidade\ de\ f\ em\ 0, temos:$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{x^3 + 2x^2 + 4}^{\substack{4 \\ \uparrow}}}{\underbrace{x^2}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}}} = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\overbrace{x^3 + 2x^2 + 4}^{\substack{4 \\ \uparrow}}}{\underbrace{x^2}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}}} = +\infty$$

$Portanto, a\ reta\ x = 0\ é\ assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ da\ função\ f.$

$Assíntotas\ Horizontais$: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (1) = 1.$$

$y = 1\ é\ assíntota\ horizontal\ do\ gráfico\ de\ f.$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 4x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x + 4}{2} = \lim_{x \to \infty} (3x + 2) = \infty.$$

$Logo, não\ existe\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ da\ função\ f.$

$Assíntota\ Oblíqua$: $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2} = (x + 2) + \frac{4}{x^2}$$

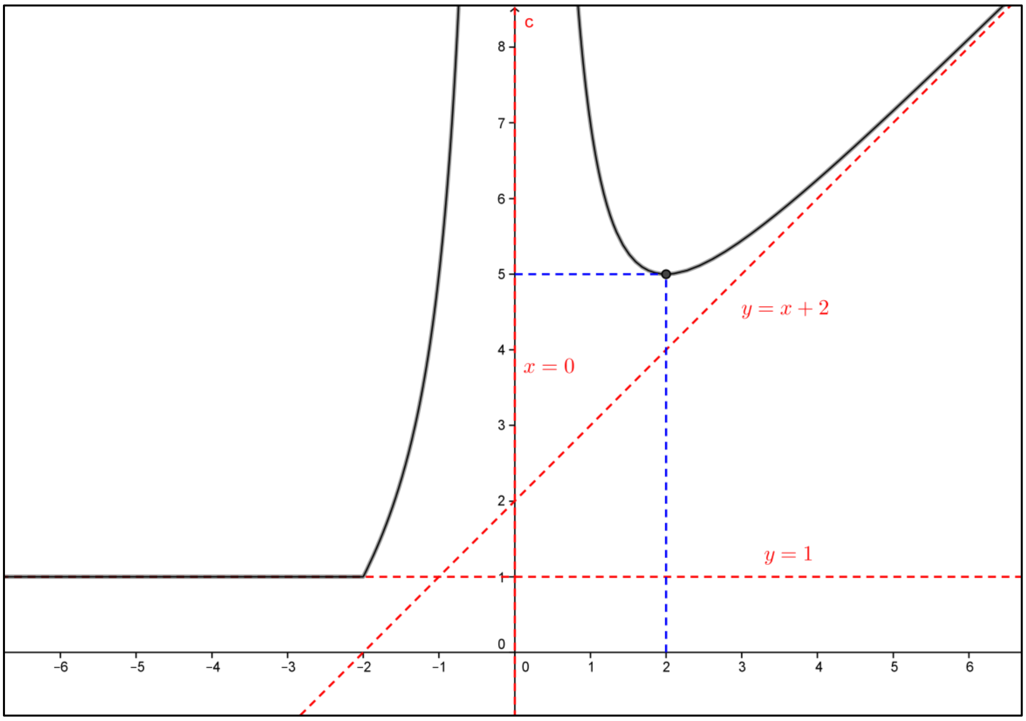
$$f(x) - (x + 2) = \frac{4}{x^2}$$

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

$Portanto, a\ reta\ y = x + 2\ é\ assíntota\ oblíqua\ ao\ gráfico\ de\ f.$

(v) *Pontos de Inflexão*:

$*\ Como\ não\ há\ mudança\ na\ direção\ da\ concavidade\ da\ função\ f, então\ f$
$não\ possui\ pontos\ de\ inflexão!$


c
$x = 0$
$y = x + 2$
$y = 1$

14.8 4ª Prova – 20 de Maio de 2017

$\boldsymbol{Questão\ 1}.$ $Encontre\ o\ trapézio\ de\ maior\ área\ que\ pode\ ser\ inscrito\ em\ um\ semicírculo\ de\ raio\ R, com\ uma\ das\ bases\ sobre\ o\ diâmetro\ do\ círculo.$

$\boldsymbol{Questão\ 2}$

$a)\ Use\ o\ Teorema\ de\ Rolle\ para\ mostrar\ que\ a\ função\ f(x) = \operatorname{senh} x\ \ não\ tem\ duas\ raízes\ reais.$

$b)\ Use\ o\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ para\ provar\ que\ não\ existe\ uma\ função\ derivável\ em\ todo\ o\ conjunto\ dos\ reais\ cujo\ gráfico\ contém\ os\ pontos$ $(0, -1)\ e\ (2{,}4)\ e\ cujas\ tangentes\ têm\ inclinação\ menor\ que\ 2.$

$\boldsymbol{Questão\ 3}$

$$a) Calcule\ \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right]^x$$

$$b)\ Calcular\ \lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotg}(2x)\,.\operatorname{arctg} x$$

$\boldsymbol{Questão\ 4}$

$$a)\ Seja\ f''(x) = e^x + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3} + 3\cos(x) - \frac{\pi}{2}, com\ f'(0) = -1\ e\ f(0) = e^2.$$

$Determine\ f(x).$

$b)\ Dê\ as\ abscissas\ dos\ pontos\ de\ inflexão\ da\ curva\ y = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}, sendo\ a\ e\ b\ constantes.$

$\boldsymbol{Questão\ 5}.$ $Considere\ a\ função\ f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x-2)^2}\ e\ determine:$

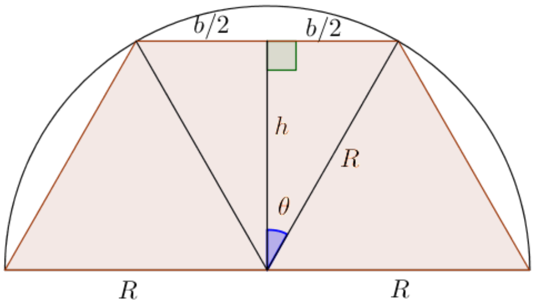
$i) Os\ intervalos\ de\ crescimento\ e\ decrescimento;$
$ii) Os\ intervalos\ onde\ a\ concavidade\ é\ voltada\ para\ cima\ ou\ para\ baixo;$
$iii) As\ assíntotas, se\ existirem;$
$iv) Os\ pontos\ de\ máximo\ e\ de\ mínimo\ relativos\ e\ absolutos, se\ existirem;$
$v) Os\ pontos\ de\ inflexão, se\ existirem.$

$$DADOS: f'(x) = \frac{-4(x^3 - 3x^2 + 6x - 4)}{x^3.(x-2)^3}\ \ e\ \ f''(x) = 6.x^{-4} + 6.(x-2)^{-4}.$$

$OBSERVAÇÃO: 1\ é\ raíz\ do\ polinômio\ que\ figura\ como\ numerador\ em\ f'(x).$

$De\ posse\ destas\ informações, trace\ o\ gráfico\ de\ f.$

Questão 1. *Encontre o trapézio de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio R, com uma das bases sobre o diâmetro do círculo.*



$$A = \frac{(B+b)h}{2} \quad ; \quad onde\ B = 2R.$$

$$* \operatorname{sen}\theta = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{R} = \frac{b}{2R} \therefore b = 2R.\operatorname{sen}\theta$$

$$* \cos\theta = \frac{h}{R} \therefore h = R.\cos\theta$$

$$A(\theta) = \frac{(2R + 2R.\operatorname{sen}\theta)R.\cos\theta}{2}$$

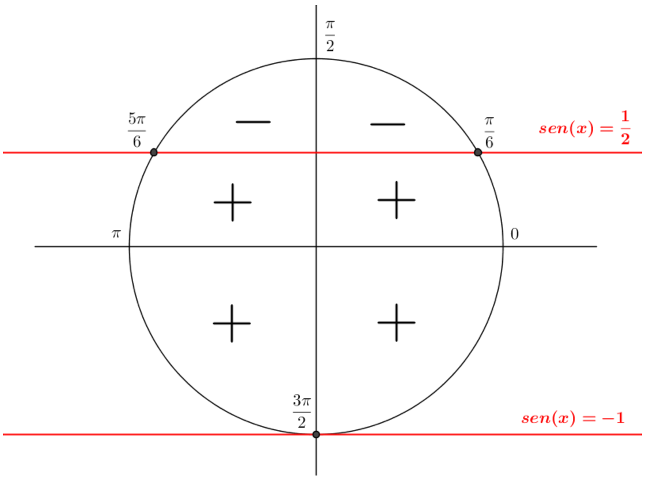
$$A(\theta) = R^2(1+\operatorname{sen}\theta).\cos\theta \quad , \qquad 0 < \theta < \pi/2$$

$$A'(\theta) = R^2[\cos\theta\,.\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)]$$
$$A'(\theta) = R^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta)$$
$$A'(\theta) = R^2(-2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta + 1)$$

Seja $x = \operatorname{sen}\theta$ *, então ...*

$$A'(x) = R^2(-2x^2 - x + 1)$$
$$+ + + + (-1) - - - - - (1/2) + + + + + \quad A'(x)$$

A análise acima é em relação a x, portanto devemos converter essa informação para a variável θ. Como $x = \operatorname{sen}\theta$ *, a análise da função quadrática convertida no ciclo trigonométrico nos dá a seguinte representação:*



Logo, pelo Teste da Primeira Derivada, $\theta = \pi/6$ *é o ângulo que maximiza a expressão da área e, portanto,* $A(\pi/6)$ *é a maior valor de área que o trapézio inscrito pode assumir.*

$$A\left(\frac{\pi}{6}\right) = R^2\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right).\cos\frac{\pi}{6} = R^2\left(1+\frac{1}{2}\right).\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\ u.A$$

Questão 2

$a)$ *Use o Teorema de Rolle para mostrar que a função* $f(x) = \operatorname{senh} x$ *não tem duas raízes reais.*

Suponhamos que f *possui duas raízes reais* a *e* b*, tais que* $f(a) = f(b)$*, com* $a \neq b$*.*

f *é uma função contínua e derivável em* $\mathbb{R}$ *e, portanto,* f *satisfaz as seguintes hipoteses:*

1. f *é contínua no intervalo fechado* $[a, b]$;
2. f *é derivável no intervalo aberto* (a, b);
3. $f(a) = f(b)$.

Então, pelo Teorema de Rolle, existe algum $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$*. Contudo,*

$$f'(x) = \cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Portanto, por contradição, f *não possui duas raízes reais.*

$b)$ *Use o Teorema do Valor Médio para provar que não existe uma função derivável em todo o conjunto dos reais cujo gráfico contém os pontos* $(0, -1)$ *e* $(2,4)$ *e cujas tangentes têm inclinação menor que* 2.

Seja uma função f *derivável em* $\mathbb{R}$*. Se* f *é derivável em* $\mathbb{R}$*, então* f *é contínua em* $\mathbb{R}$*. Logo,* f *é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:*

1. f *é contínua no intervalo fechado* $[0,2]$;
2. f *é derivável no intervalo aberto* $(0,2)$;

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe algum $c \in (0,2)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - (-1)}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Logo, deve existir algum ponto $c \in (0,2)$ *tal que* $f'(c) = 2{,}5 > 2$*. E, portanto, não existe uma função conforme foi definida cujas tangentes têm inclinação menor que* 2*, uma vez que, existe pelo menos um número* c *onde* $f'(c) > 2$*.*

Questão 3

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right]^x$ *; indeterminação do tipo* "1^∞"

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right]^x = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right]^x} = e^{\lim_{x\to+\infty} x.\ln\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right]};$$

Calculando o limite do expoente, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} x.\ln\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right]}{\frac{1}{x}}\ ;\ \textit{Usando a Regra de L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}\times\frac{1}{2}\times\left[\left(-\frac{1}{x^2}\right)a^{\frac{1}{x}}\ln a+\left(-\frac{1}{x^2}\right)b^{\frac{1}{x}}\ln b\right]}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}\ln a+b^{\frac{1}{x}}\ln b}{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{a^0\ln a+b^0\ln b}{a^0+b^0}$$

$$= \frac{\ln a+\ln b}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(ab) = \ln\sqrt{ab}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right]^x = e^{\lim_{x\to+\infty} x.\ln\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right]} = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

$b)$ *Calcular* $\lim_{x\to0^+}\operatorname{cotg}(2x)\,.\operatorname{arctg}x$; "$\infty\times0$"

$$\lim_{x\to0^+}\operatorname{cotg}(2x)\,.\operatorname{arctg}x = \lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{arctg}x}{\operatorname{tg}(2x)}\ ;\ \textit{Usando a Regra de L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{2\sec^2(2x)}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+0^2}}{2\sec^2 0} = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to0^+}\operatorname{cotg}(2x)\,.\operatorname{arctg}x = \frac{1}{2}.$$

Questão 4

$a)$ *Seja* $f''(x) = e^x + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3} + 3\cos(x) - \frac{\pi}{2}$, *com* $f'(0) = -1$ *e* $f(0) = e^2$.
Determine $f(x)$.

A antiderivada mais geral de f'' *é dada por:*

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times x^{\frac{5}{3}} + 3\,\mathrm{sen}(x) - \frac{\pi}{2}x + C$$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}} + 3\,\text{sen}(x) - \frac{\pi}{2}x + C$$
$$f'(0) = e^0 + \frac{1}{5} \times 0^{\frac{5}{3}} + 3\,\text{sen}(0) - \frac{\pi}{2} \times 0 + C = -1$$
$$1 + 0 + 0 - 0 + C = -1$$
$$C = -2$$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}} + 3\,\text{sen}(x) - \frac{\pi}{2}x - 2$$

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ é dada por

$$f(x) = e^x + \frac{3}{8} \times \frac{1}{5} \times x^{\frac{8}{3}} - 3\cos(x) - \frac{\pi}{4}x^2 - 2x + D$$
$$f(x) = e^x + \frac{3}{40}x^{\frac{8}{3}} - 3\cos(x) - \frac{\pi}{4}x^2 - 2x + D$$
$$f(0) = e^0 + \frac{3}{40} \times 0^{\frac{8}{3}} - 3\cos(0) - \frac{\pi}{4} \times 0^2 - 2 \times 0 + D = e^2$$
$$1 + 0 - 3 - 0 - 0 + D = e^2$$
$$D = e^2 + 2$$

Portanto,
$$f(x) = e^x + \frac{3}{40}x^{\frac{8}{3}} - 3\cos(x) - \frac{\pi}{4}x^2 - 2x + (e^2 + 2)$$

$b)$ *Dê as abscissas dos pontos de inflexão da curva* $y = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$, *sendo a e b constantes.*

$*$ *Obs.:* $D(y) = \mathbb{R}$ *e* $y = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$y' = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} . \left[-2\left(\frac{x-a}{b}\right).\left(\frac{1}{b}\right)\right]$$
$$y' = y.\left[-\frac{2}{b^2}.(x-a)\right]$$
$$y' = -\frac{2}{b^2}[y.(x-a)]$$

$$y'' = -\frac{2}{b^2}[y'.(x-a) + y]$$
$$y'' = -\frac{2}{b^2}\left[-\frac{2}{b^2}y.(x-a).(x-a) + y\right]$$
$$y'' = -\frac{2}{b^2}y\left[-2\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1\right]$$

$$-2\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \left(\frac{x-a}{b}\right)^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{x-a}{b} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \therefore x = a \pm \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

$$\boldsymbol{x_1 = a - \frac{b\sqrt{2}}{2} \quad e \quad x_2 = a + \frac{b\sqrt{2}}{2}}$$

Estudo do sinal da Segunda Derivada (Estudo da Concavidade):

$$\begin{array}{ll} - - - - - - - - - - - - - - - - - & (-2y/b^2) \\ + + + + (x_1) - - - - (x_2) + + + + + & \left[-2\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1\right] \\ - - - - (x_1) + + + + (x_2) - - - - - & y'' \end{array}$$

Como ocorre mudança na direção da concavidade da função y em x_1 e em x_2, e ambos pertencem ao domínio da função, então x_1 e x_2 são as abscissas dos pontos de inflexão da função y.

$$x_1 = a - \frac{b\sqrt{2}}{2} \quad e \quad x_2 = a + \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

***Questão* 5.** *Considere a função* $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ *e determine:*

i) Os intervalos de crescimento e decrescimento;
ii) Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo;
iii) As assíntotas, se existirem;
iv) Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem;
v) Os pontos de inflexão, se existirem.

DADOS: $f'(x) = \frac{-4(x^3 - 3x^2 + 6x - 4)}{x^3.(x-2)^3}$ *e* $f''(x) = 6.x^{-4} + 6.(x-2)^{-4}$.

OBSERVAÇÃO: 1 é *raíz do polinômio que figura como numerador em* $f'(x)$.

De posse destas informações, trace o gráfico de f.

Domínio da função: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 2\}$
Imagem da função: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$.

Interseções com os eixos coordenado: Não existem interseções com os eixos coordenados, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in D(f)$ e $f(0)$ não está definido.

i) Crescimento e Decrescimento

$$f'(x) = \frac{-4(x^3 - 3x^2 + 6x - 4)}{x^3.(x-2)^3} = \frac{-4(x-1)(x^2 - 2x + 4)}{x^3.(x-2)^3}$$

$$\begin{array}{ll} + + + + + + + + (1) - - - - - - - - - & [-4(x-1)] \\ + + + + + + + + + + + + + + + + + + + & (x^2 - 2x + 4) \\ - - - (0) + + + + + + + + + + + + + + & x^3 \\ - - - - - - - - - - - - (2) + + + + + & (x-2)^3 \\ + + + (0) - - - (1) + + (2) - - - - - & f'(x) \end{array}$$

f é crescente onde $f' > 0$, ou seja, f é crescente em $(-\infty, 0) \cup (1,2)$ e
f é decrescente onde $f' < 0$, ou seja, f é decrescente em $(0,1) \cup (2, \infty)$.

$ii) Concavidade:$

$$f''(x) = 6.x^{-4} + 6.(x-2)^{-4} = \frac{6}{x^4} + \frac{6}{(x-2)^4}$$

$$f''(x) > 0, \forall x \in D(f)$$

$Logo, f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ em\ (-\infty, 0) \cup (0,2) \cup (2, \infty).$

$iii)\ Assíntotas$

$Assíntotas\ Verticais: \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$
$*\ Obs.: Esta\ assíntotas\ ocorrem\ nas\ descontinuidades\ da\ função.$

$Analisando\ as\ descontinuidade\ de\ f\ em\ 0\ e\ em\ 2, temos:$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{x^2 + (x-2)^2}^{\uparrow\, 4}}{\underbrace{x^2(x-2)^2}_{\downarrow\, 0^+}} = +\infty$$

$Logo, a\ reta\ x = 0\ é\ assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ de\ f.$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{\overbrace{x^2 + (x-2)^2}^{\uparrow\, 4}}{\underbrace{x^2(x-2)^2}_{\downarrow\, 0^+}} = +\infty$$

$Logo, a\ reta\ x = 2\ é\ assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ de\ f.$

$Assíntotas\ Horizontais: \lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + (x-2)^2}{x^2(x-2)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 4x + 4}{x^4 - 2x^3 + 4x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{4}{x^4}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} =$$

$$\frac{\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^3} + \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^4}}{\lim_{x \to \infty} 1 - \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + (x-2)^2}{x^2(x-2)^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 4x + 4}{x^4 - 2x^3 + 4x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{4}{x^4}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} =$$

$$\frac{\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x^3} + \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x^4}}{\lim_{x \to -\infty} 1 - \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$Logo, a\ reta\ y = 0\ é\ a\ única\ assíntota\ horizontal\ do\ gráfico\ de\ f.$

$iv)$ *Pontos de Máximo e de Mínimo Relativos e Absolutos*:

$$f'(x) = \frac{-4(x^3 - 3x^2 + 6x - 4)}{x^3.(x-2)^3} = \frac{-4(x-1)(x^2 - 2x + 4)}{x^3.(x-2)^3}$$

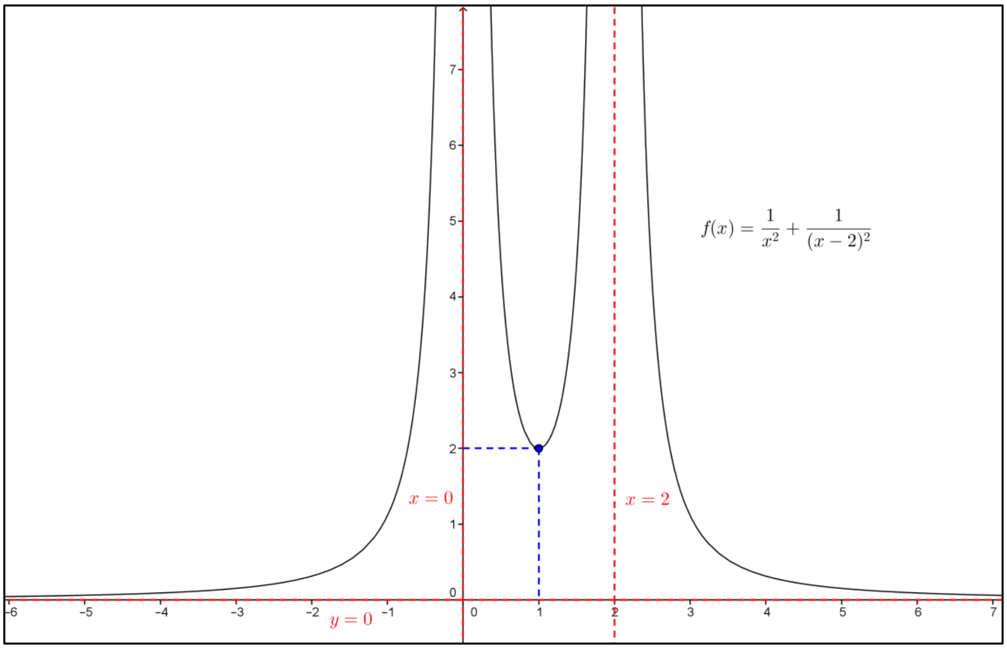
$+ + + + + + + + (1) - - - - - - - - - \quad [-4(x-1)]$
$+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + \quad (x^2 - 2x + 4)$
$- - -(0) + + + + + + + + + + + + + + + \quad x^3$
$- - - - - - - - - - - - (2) + + + + + \quad (x-2)^3$
$+ + +(0) - - - (1) + + (2) - - - - - \quad f'(x)$

Pelo Teste da Primeira Derivada, em $x = 1$ *temos um ponto de mínimo local.*
Ponto de mínimo local: $(1,2)$.

Como $f(x) > 0, \forall x \in D(f)$, *então* f *não possui ponto de mínimo absoluto. Além disso, as descontinuidades infinitas em* 0 *e em* 2 *nos faz concluir que* f *não possui ponto de máximo absoluto. Logo,* f *não possui pontos nem de máximo e nem de minimo absolutos.*

$v)$*Pontos de Inflexão*:

$*$ *Como não há mudança na direção da concavidade da função* f, *então* f *não possui pontos de inflexão*!



14.9 Reavaliação da 1ª Média – 26 de Maio de 2017

Questão 1.

$a)$ Calcule $\lim_{x \to 0} [\![e^x]\!]$.

$b)$ Seja $f(x) = \dfrac{\sec(4x)}{\operatorname{tg}(4x)}, 0 \leq x \leq \pi$. Determine os pontos nos quais $y = f(x)$ tem reta tangente horizontal.

Questão 2.

$a)$ Sendo $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, encontre $y'(1)$.

$b)$ Use a definição para calcular a derivada da função $f(x) = x^{-1/3}$.

Questão 3.

$a)$ Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{(3 - x^3)^4 - 16}{x^3 - 1}$.

$b)$ A função de Bessel de ordem 0, $y = f(x)$, satisfaz a equação diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ para todos os valores de x e seu valor em 0 é $J(0) = 1$.

$i)$ Determine $J'(0)$ $\quad$ $ii)$ Use a diferenciação implícita para encontrar $J''(0)$.

Questão 4.

$a)$ Indique, se existirem, os pontos do gráfico de $f(x) = x(x^2 + x + 1)e^{2/x}$ onde a reta tangente é horizontal.

$b)$ Determine, se existirem, as assíntotase horizontais e verticais da função

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x} - x, & se\ x \geq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & se\ x < 0 \end{cases}$$

Questão 5.

$a)$ (ANULADA!) A função f definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - x}{x - 8}$ é contínua em $x = 8$. Mostre que a descontinuidade é removível e redefina $f(8)$ de modo a remové − la.

$*$ Erro de digitação ... o enunciado correto é está a seguir:

"A função f definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 8}$ é descontínua em $x = 8$. Mostre que a descontinuidade é removível e redefina $f(8)$ de modo a remové − la."

$b)$ *Considere a função* $f(x) = \mathrm{tg}^2\, x$ *e determine uma equação para a reta normal ao gráfico de* f', *no ponto de* f' *em* $x = \frac{\pi}{3}$.

Questão 1.

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0}[\![e^x]\!]$.

$\lim_{x\to 0^+}[\![e^x]\!] = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$

$*\ Se\ x \to 0^+, então\ e^x \to 1^+. Logo, [\![e^x]\!] = 1.$

$\lim_{x\to 0^-}[\![e^x]\!] = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0.$

$*\ Se\ x \to 0^-, então\ e^x \to 1^-. Logo, [\![e^x]\!] = 0.$

$Como\ \lim_{x\to 0^+}[\![e^x]\!] \neq \lim_{x\to 0^-}[\![e^x]\!], então\ \lim_{x\to 0}[\![e^x]\!]$ *não existe!*

$b) Seja\ f(x) = \dfrac{\sec(4x)}{\text{tg}(4x)}, 0 \leq x \leq \pi. Determine\ os\ pontos\ nos\ quais\ y = f(x)$ *tem reta tangente horizontal.*

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ \ com\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f'(x) = \frac{4\sec(4x).\text{tg}^2(4x) - 4\sec^3(4x)}{\text{tg}^2(4x)}$$
$$f'(x) = \frac{4\sec(4x)\,[\text{tg}^2(4x) - \sec^2(4x)]}{\text{tg}^2(4x)}$$
$$f'(x) = \frac{4\sec(4x)}{\text{tg}^2(4x)}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{4\sec(4x)}{\text{tg}^2(4x)} = 0 \Leftrightarrow \sec(4x) = 0 \therefore \nexists x \in \mathbb{R} \mid \sec(4x) = 0.$$

$Logo, f$ *não possui pontos onde a reta tangente é horizontal.*

Questão 2.

$a)$ *Sendo* $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, *encontre* $y'(1)$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}.\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{1}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1}}\right)$$
$$y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$
$$y'(1) = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

$b) Use\ a\ definição\ para\ calcular\ a\ derivada\ da\ função\ f(x) = x^{-1/3}.$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x+\Delta x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+\Delta x}}{\Delta x . \sqrt[3]{x+\Delta x} . \sqrt[3]{x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+\Delta x}}{\Delta x . \sqrt[3]{x+\Delta x} . \sqrt[3]{x}} . \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} . \sqrt[3]{x+\Delta x} + \sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} . \sqrt[3]{x+\Delta x} + \sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x - (x+\Delta x)}{\Delta x . \sqrt[3]{x+\Delta x} . \sqrt[3]{x} . \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} . \sqrt[3]{x+\Delta x} + \sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} \right)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x . \sqrt[3]{x+\Delta x} . \sqrt[3]{x} . \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} . \sqrt[3]{x+\Delta x} + \sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} \right)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\sqrt[3]{x+\Delta x} . \sqrt[3]{x} . \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} . \sqrt[3]{x+\Delta x} + \sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} \right)} \\
&= -\frac{1}{\sqrt[3]{x} . \sqrt[3]{x} . \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \right)} \\
&= -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \\
&= -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}.
\end{aligned}
$$

$Logo, f'(x) = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}.$

***Questão* 3.**

$a)\ Calcule\ \lim_{x \to 1} \frac{(3-x^3)^4 - 16}{x^3 - 1}.$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{(3-x^3)^4 - 16}{x^3 - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{[(3-x^3) - 2][(3-x^3)^3 + 2(3-x^3)^2 + 4(3-x^3) + 8]}{x^3 - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(1-x^3)[(3-x^3)^3 + 2(3-x^3)^2 + 4(3-x^3) + 8]}{-(1-x^3)} \\
&= \lim_{x \to 1} -[(3-x^3)^3 + 2(3-x^3)^2 + 4(3-x^3) + 8] \\
&= -[(3-1^3)^3 + 2(3-1^3)^2 + 4(3-1^3) + 8] \\
&= -[8+8+8+8] \\
&= -32.
\end{aligned}
$$

$b)\ A\ função\ de\ Bessel\ de\ ordem\ 0, y = f(x), satisfaz\ a\ equação\ diferencial$
$xy'' + y' + xy = 0\ para\ todos\ os\ valores\ de\ x\ e\ seu\ valor\ em\ 0\ é\ J(0) = 1.$

$i)\ Determine\ J'(0)$ $\quad ii)\ Use\ a\ diferenciação\ implícita\ para\ encontrar\ J''(0).$

$Substituindo\ J(0) = 1\ na\ equação\ diferencial, obtemos:$

$$0 \times y''(0) + y'(0) + 0 \times 1 = 0$$
$$0 + y'(0) + 0 = 0$$
$$y'(0) = J'(0) = 0.$$

$Derivando\ implicitamente\ a\ expressão\ da\ curva, temos:$

$$\frac{d}{dx}(xy'') + \frac{d}{dx}(y') + \frac{d}{dx}(xy) = 0$$
$$y'' + xy''' + y'' + y + xy' = 0$$
$$y''(0) + 0 \times y''(0) + y''(0) + 1 + 0 \times y'(0) = 0$$
$$y''(0) + 0 + y''(0) + 1 + 0 = 0$$
$$2y''(0) = -1$$
$$y''(0) = J''(0) = -1/2$$

Questão 4.

$a)\ Indique, se\ existirem, os\ pontos\ do\ gráfico\ de\ f(x) = x(x^2 + x + 1)e^{2/x}\ onde$
$a\ reta\ tangente\ é\ horizontal.$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

$$f'(x) = [(x^2 + x + 1) + x(2x + 1)]e^{2/x} + x(x^2 + x + 1).\left(-\frac{2}{x^2}\right).e^{2/x}.$$
$$f'(x) = (3x^2 + 2x + 1)e^{2/x} - \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x}{x^2}e^{2/x}$$
$$f'(x) = e^{2/x}\left(3x^2 + 2x + 1 - \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x}{x^2}\right)$$
$$f'(x) = \frac{e^{2/x}}{x^2}(3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 - 2x)$$
$$f'(x) = \frac{e^{2/x}}{x^2}(3x^4 - x^2 - 2x)$$
$$f'(x) = \frac{e^{2/x}}{x}(3x^3 - x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - x - 2 = 0$$

$Note\ que\ x = 1\ é\ raiz\ do\ polinômio\ (3x^3 - x - 2). Usando\ o\ dispositivo\ de$
$Briot - Ruffini, obtemos:$

$$(3x^3 - x - 2) = (x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$$

$Logo\ o\ ponto\ \big(1, f(1)\big) = (1{,}3e^2)\ é\ o\ ponto\ onde\ a\ reta\ tangente\ é\ horizontal.$

$b)\ Determine, se\ existirem, as\ assíntotase\ horizontais\ \ e\ \ verticais\ da\ função$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x} - x, se\ x \geq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad se\ x < 0 \end{cases}.\ D(f) = \mathbb{R}$$

Assíntotas horizontais: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L.$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+1/x}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

A reta $y = 1/2$ *é assíntota horizontal da função* f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x};$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, *temos*:

$$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$$

Se $x < 0$, *então ...*

$$-\frac{1}{x} \ge \frac{\operatorname{sen} x}{x} \ge \frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{x} \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le -\frac{1}{x}$$

Seja $g(x) = 1/x$ *e* $h(x) = -1/x$.

Se $g(x) \le f(x) \le h(x)$ *para todo* $x < 0$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$, *então pelo Teorema do Confronto*,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

A reta $y = 0$ *é assíntota horizontal da função* f.

Assíntotas verticais: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$;

∗ *Ocorrem nas descontinuidades da função!*

Em posse do domínio de f, *o único número possível de descontinuidade é o* 0, *pois é onde ocorre mudança de comportamento da função. Logo*,

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \sqrt{0^2+0}-0 = 0.$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Logo, a reta $x = 0$ *não é assíntota vertical da função* f.

***Questão* 5.**

$a)$ $(ANULADA!)$ $A\ função\ f\ definida\ por\ f(x) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-x}{x-8}$ $é\ contínua\ em\ x = 8.$
$Mostre\ que\ a\ descontinuidade\ é\ removível\ e\ redefina\ f(8)\ de\ modo\ a\ remové-la.$
$*\ Erro\ de\ digitação\ \ldots\ o\ enunciado\ era\ o\ que\ segue:$

$"A\ função\ f\ definida\ por\ f(x) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}$ $é\ descontínua\ em\ x = 8. Mostre\ que$
$a\ descontinuidade\ é\ removível\ e\ redefina\ f(8)\ de\ modo\ a\ remové-la."$

$Dizemos\ que\ a\ descontinuidade\ de\ f\ em\ um\ número\ a\ é\ removível\ se\ \lim\limits_{x\to a} f(x)$
$existe, porém\ \ f(a)\ não\ está\ definido, ou\ caso\ esteja, \lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a).$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 8} f(x) &= \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}\\
&= \lim_{x\to 8}\left[\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2}{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2}\right]\\
&= \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(x-8).\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2\right)}\\
&= \lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right).\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2\right)}\\
&= \lim_{x\to 8}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right).\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2\right)}\\
&= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4\right)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{8}}+2\right)}\\
&= \frac{1}{(4+4+4)\left(\sqrt{4}+2\right)}\\
&= \frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

$Como\ \lim\limits_{x\to 8} f(x)\ \ existe, porém\ f(8)\ não\ está\ definido, então\ a\ descontinuidade$
$em\ 8\ é\ dita\ removível\ e\ podemos\ redefinir\ f(8)\ de\ modo\ que\ f\ seja\ contínua$
$em\ 8.$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}, & se\ x \neq 8\\[2mm] \dfrac{1}{48}, & se\ x = 8\end{cases}$$

$b)$ *Considere a função* $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ *e determine uma equação para a reta normal ao gráfico de* f'*, no ponto de* f' *em* $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Equação da reta normal ao gráfico de f' *no ponto em que* $x = \pi/3$:

$$y - f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)} \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$f'(x) = 2\operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x$
$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \sec^2\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}.$
$f''(x) = 2[\sec^4 x + 2\sec^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x]$
$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\sec^4\frac{\pi}{3} + 2\sec^2\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}\right] = 2[2^4 + 2 \times 2^2 \times 3] = 2[16 + 24] = 80$

Equação da reta normal ...

$$y - 8\sqrt{3} = -\frac{1}{80}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$y = -\frac{1}{80}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 8\sqrt{3}$$

14.10 Reavaliação da 1ª Média – 27 de Maio de 2017

***Questão* 1.**

$a)$ *O ponto onde a abscissa é dada por* $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ *e a ordenada é dada por* $\lim_{x\to -\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ *pertence a uma circunferência centrada na origem. Qual é a sua equação?*

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sec\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}$.

***Questão* 2.**

$a)$ *Seja* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua que satisfaz às seguintes condições:* $g(0) = -1$ *e* $g(1) = 2$. *Prove que existe* $c \in (0,1)$ *tal que* $g(c) = c^2$.

$b)$ *Use a definição de derivada para calcular a derivada de* $f(x) = \operatorname{tg} x$.

***Questão* 3.**

$a)$ *Seja* $f(x) = \operatorname{sen}^4(3x) - \cos^4(3x)$. *Mostre que* $f'(x) = 6.\operatorname{sen}(6x)$.

$b)$ *Seja* $G(x) = f\big(f(x)\big)$. *Se o coeficiente angular da reta tangente à curva* $y = f(x)$ *no ponto* $(2,1)$ *é* 5, *determine o valor de* $G'(2)$, *sabendo que* $f'(1) = 4$.

***Questão* 4.**

$a)$ *Determine os pontos da lemniscata* $2.(x^2+y^2)^2 = 25.(x^2-y^2)$, *fora do eixo das ordenadas, onde a reta tangente à curva é horizontal.*

$b)$*Ache os dois pontos de intersecção da reta tangente à curva* $y = (2x+1)^2.\cos^2 x$ *no ponto* $(0,1)$ *com a elipse* $2x^2 + y^2 = 1$.

***Questão* 5.**

$a)$ *Determine as abscissas dos pontos nos quais as retas tangente às curvas* $y = e^{x^4 - x}$ *e* $y = x.(x^3-1)$ *são paralelas.*

$b)$*Caso existam, determine as assíntotas horizontais e verticais da curva seguinte:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}, & se\ x \geq 1 \\ 3x, & se\ x < 1. \end{cases}$$

***Questão* 1.**

a) O ponto onde a abscissa é dada por $\lim_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ *e a ordenada é dada por* $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ *pertence a uma circunferência centrada na origem. Qual é a sua equação?*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{x\to 2}\left[\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}.\frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}\right]\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{(4-x^2)} \quad ;* \quad \begin{array}{l} Se\ x\to 2, então\ x\neq 2.\\ Logo, (4-x^2)\neq 0.\end{array}\\ &= \lim_{x\to 2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)\\ &= 3+\sqrt{9}\\ &= 6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} &= \lim_{x\to -\infty}\frac{3^{-x}(3^{2x}-1)}{3^{-x}(3^{2x}+1)}\\ &= \lim_{x\to -\infty}\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} \quad ;* \quad \begin{array}{l} Se\ x\to -\infty, então\ 3^{2x}\to 0.\\ Logo, \lim_{x\to -\infty} 3^{2x}=0.\end{array}\\ &= \frac{0-1}{0+1}\\ &= -1.\end{aligned}$$

Ponto $(6,-1)$.
Equação da circunferência centrada na origem:

$$R^2 = x^2+y^2$$
$$R^2 = 6^2+(-1)^2$$
$$R^2 = 37$$

$$x^2+y^2 = 37$$

É *aquação da circunferência centrada na origem que contem o ponto* $(6,-1)$.

b) Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sec\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sec\left(e^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to 0} x^3.\cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right);$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, *com* $x\neq 0$, *temos*:

$$-1\le \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\le 1$$

Se $x^3>0$, *então*..

$$-x^3\le x^3\cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\le x^3$$

$Seja\ f(x) = -x^3, g(x) = x^3 \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\ e\ h(x) = x^3.$

$Se\ f(x) \le g(x) \le h(x)\ quando\ x\ está\ próximo\ de\ 0$ $pela\ direita$ $e, \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = 0, então\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0. (Teorema\ do\ Confronto)$

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 . \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = 0.$$

$Se\ x^3 < 0, então..$

$$-x^3 \ge x^3 \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \ge x^3$$

$$x^3 \le x^3 \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \le -x^3$$

$Seja\ f(x) = x^3, g(x) = x^3 \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\ e\ h(x) = -x^3.$

$Se\ f(x) \le g(x) \le h(x)\ quando\ x\ está\ próximo\ de\ 0$ $pela\ esquerda$ $e, \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x) = 0, então\ \lim_{x\to 0^-} g(x) = 0. (Teorema\ do\ Confronto)$

$$\lim_{x\to 0^-} x^3 . \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = 0.$$

$Como\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x), então\ \lim_{x\to 0} g(x)\ existe\ e\ \lim_{x\to 0} g(x) = 0. Portanto,$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sec\left(e^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to 0} x^3 . \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = 0.$$

$Quest$ão 2.

$a)\ Seja\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ uma\ função\ contínua\ que\ satisfaz\ às\ seguintes\ condições:$
$g(0) = -1\ e\ g(1) = 2. Prove\ que\ existe\ c \in (0,1)\ tal\ que\ g(c) = c^2.$

$Seja\ h(x) = g(x) - x^2, e\ h\ é\ uma\ função\ contínua\ em\ \mathbb{R}, pois\ h\ é\ dada\ pela\ diferença\ entre\ funções\ contínuas\ em\ \mathbb{R}. Logo, h\ é\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [0,1].$
$h(0) = g(0) - 0^2 = -1 - 0 = -1.$
$h(1) = g(1) - 1^2 = 2 - 1^2 = 1.$

$Como\ h\ é\ uma\ função\ continua\ no\ intervalo\ fechado\ [0,1]\ e\ 0\ é\ um\ número\ entre\ h(0)\ e\ h(1), pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário, existe\ algum\ c \in (0,1)\ tal\ que\ h(c) = 0. De\ modo\ que\ h(c) = 0 \Longrightarrow g(c) - c^2 = 0. Portanto,$

$$g(c) = c^2, para\ algum\ c \in (0,1)$$

$b)\ Use\ a\ definição\ de\ derivada\ para\ calcular\ a\ derivada\ de\ f(x) = \operatorname{tg} x.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x . \operatorname{tg} \Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x + \operatorname{tg}^2 x \,.\, \operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x[1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} \Delta x]}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x \,(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\Delta x[1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} \Delta x]}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x \,.\, \sec^2 x}{\Delta x[1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} \Delta x]}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} \times \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} \Delta x}\right]$$

$$* \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} . \frac{1}{\cos \Delta x} = 1 \times 1 = 1.$$

$$* \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} \Delta x} = \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \times 0} = \frac{\sec^2 x}{1 - 0} = \sec^2 x.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} \times \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} \Delta x}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} \times \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} \Delta x} = 1 \times \sec^2 x = \sec^2 x.$$

Logo, $f'(x) = \sec^2 x.$

***Questão* 3.**

$a)$ *Seja* $f(x) = \operatorname{sen}^4(3x) - \cos^4(3x)$. *Mostre que* $f'(x) = 6.\operatorname{sen}(6x)$.

$f(x) = [\operatorname{sen}^2(3x) - \cos^2(3x)].[\operatorname{sen}^2(3x) + \cos^2(3x)]$
$f(x) = -[\cos^2(3x) - \operatorname{sen}^2(3x)] \times 1$
$f(x) = -\cos(6x)$
$f'(x) = -6 \times (-\operatorname{sen}(6x))$
$f'(x) = 6\operatorname{sen}(6x)$

$b)$ *Seja* $G(x) = f(f(x))$. *Se o coeficiente angular da reta tangente à curva* $y = f(x)$ *no ponto* $(2,1)$ *é* 5, *determine o valor de* $G'(2)$, *sabendo que* $f'(1) = 4$.

Do enunciado, temos $f(2) = 1, f'(2) = 5$ *e* $f'(1) = 4$. *Logo,*

$G'(x) = f'(f(x)).f'(x)$
$G'(2) = f'(f(2)).f'(2)$
$G'(2) = f'(1) \times 5$
$G'(2) = 4 \times 5$
$G'(2) = 20.$

***Questão* 4.**

$a)$ *Determine os pontos da lemniscata* $2.(x^2 + y^2)^2 = 25.(x^2 - y^2)$, *fora do eixo das ordenadas, onde a reta tangente à curva é horizontal.*

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$2\frac{d}{dx}(x^2+y^2)^2 = 25.\frac{d}{dx}(x^2-y^2)$$
$$4(x^2+y^2)(2x+2yy') = 25(2x-2yy')$$
$$4(x^2+y^2)(x+yy') = 25(x-yy')$$
$$y'[4y(x^2+y^2)+25y] = 25x-4x(x^2+y^2)$$
$$y' = \frac{25x-4x(x^2+y^2)}{25y+4y(x^2+y^2)}\ ;\ \ y \neq 0.$$

$y' = 0 \Longrightarrow 25x - 4x(x^2+y^2) = 0$

$$25-4(x^2+y^2) = 0$$
$$x^2+y^2 = \frac{25}{4}$$

Substituindo na expressão da curva, obtemos:

$$2.\left(\frac{25}{4}\right)^2 = 25.\left(x^2-\left(\frac{25}{4}-x^2\right)\right)$$
$$\frac{25}{8} = 2x^2-\frac{25}{4}$$
$$2x^2 = \frac{75}{8}$$
$$x^2 = \frac{75}{16} \therefore x = \pm\frac{5\sqrt{3}}{4}$$
$$y^2 = \frac{25}{16} \therefore y = \pm\frac{5}{4}$$

Pontos $A\left(\frac{5\sqrt{3}}{4},\frac{5}{4}\right), B\left(\frac{5\sqrt{3}}{4},-\frac{5}{4}\right), C\left(-\frac{5\sqrt{3}}{4},\frac{5}{4}\right)$ *e* $D\left(-\frac{5\sqrt{3}}{4},-\frac{5}{4}\right)$.

b)Ache os dois pontos de intersecção da reta tangente à curva $y = (2x+1)^2.\cos^2 x$ *no ponto* $(0,1)$ *com a elipse* $2x^2+y^2 = 1$.

$y' = 4(2x+1)\cos^2 x - 2(2x+1)\operatorname{sen} x \,.\cos x$

$y'(0) = 4(0+1)\cos^2 0 - 2(0+1)\operatorname{sen} 0\,.\cos 0$
$y'(0) = 4-0$
$y'(0) = 4.$

Equação da reta tangente à curva no ponto $(0,1)$:

$$y-1 = 2(x-0)$$
$$y = 4x+1$$

Intersecção entre a reta tangente e a elipse:

$$2x^2+(4x+1)^2 = 1$$
$$2x^2+16x^2+8x+1 = 1$$
$$18x^2+8x = 0$$
$$2x(9x+4) = 0$$

$$x = 0 \; e \; x = -\frac{4}{9}$$
$$y = 1 \; e \; y = -\frac{7}{9}$$
Pontos de intersecção: $A(0,1)$ *e* $B\left(-\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}\right)$.

***Questão* 5.**

a) Determine as abscissas dos pontos nos quais as retas tangente às curvas $y = e^{x^4-x}$ *e* $y = x.(x^3-1)$ *são paralelas.*

$y_1' = e^{x^4-x}.(4x^3-1)$
$y_2' = (x^3-1) + x(3x^2)$

Nos pontos onde as retas tangentes são paralelas ...

$$y_1' = y_2'$$
$$e^{x^4-x}.(4x^3-1) = x^3 - 1 + 3x^3$$
$$e^{x^4-x}.(4x^3-1) = 4x^3 - 1$$
$$(4x^3-1).\left(e^{x^4-x} - 1\right) = 0$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 4^{-\frac{1}{3}}$$
$$e^{x^4-x} - 1 = 0$$
$$e^{x^4-x} = 1$$
$$e^{x^4-x} = e^0$$
$$x^4 - x = 0$$
$$x(x^3-1) = 0$$
$$x = 0 \; e \; x = 1.$$

Nos pontos de abscissas $x = \left\{0, 4^{-\frac{1}{3}}, 1\right\}$ *as retas tangentes à curva são parelelas.*

b) Caso existam, determine as assíntotas horizontais e verticais da curva seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}, & se \; x \geq 1 \\ 3x, & se \; x < 1. \end{cases}$$

Assíntotas horizontais: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1.$$

Logo, a reta $y = 1$ *é assíntota horizontal do gráfico da função* f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x = -\infty.$$

$Assíntotas\ verticais$: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$;

$*$ $Ocorrem\ nas\ descontinuidades\ da\ função$!

$Em\ posse\ do\ domínio\ de\ f$, o único número possível de descontinuidade é o 1, $pois$ é $onde\ ocorre\ mudança\ de\ comportamento\ da\ função$. $Logo$,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1 - 2 + 1}{1 + 2 + 1} = \frac{0}{4} = 0.$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3x = 3 \times 1 = 3.$$

$Logo$, $a\ reta\ x = 1$ $não$ é $assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ de\ f$.

14.11 Reavaliação da 2ª Média – 26 de Maio de 2017

Questão 1.

$a)$ *Encontre os pontos sobre a parábola* $y = 1 - x^2$, *tais que o triângulo* ABC *formado pelo eixo* x *e as retas tangentes nesses pontos seja equilátero.*

$b)$ *Use aproximação linear para estimar* $\sqrt[5]{99.999}$.

Questão 2.

$a)$ *Calcule* $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg}(2x)}$.

$b)$ *Determine os pontos nos quais o gráfico de* $y = \ln(x^2)$ *possui reta tangente passando pela origem.*

Questão 3.

$a)$ *Determine a função* $y = f(x)$ *tal que* $f(0) \neq 1$, *sabendo que a reta tangente a seu gráfico num ponto* (x, y) *tem inclinação dada por* $y' = \sqrt{x + 1}$.

$b)$ *Use derivadas para mostrar que* $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right) - \dfrac{\pi}{4}$.

Questão 4.

$a)$ *Usando a regra de L'Hôpital, ache* $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x$.

$b)$ *Tome todas as informações necessárias e trace o gráfico de* $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Questão 5.

$a)$ *Encontre as dimensões do cone de volume máximo que tenha uma área lateral igual a* 1.

$b)$ *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de* $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$ *no intervalo* $[0,4]$.

***Questão* 1.**

a) Encontre os pontos sobre a parábola $y = 1 - x^2$, *tais que o triângulo ABC formado pelo eixo x e as retas tangentes nesses pontos seja equilátero.*

Seja A e B os pontos sobre o eixo x e C a interseção entre as retas que definem os lados AC e BC do triângulo. Como o triângulo é equilátero, então seus ângulos internos medem $60°$ *e, portanto, a inclinação da reta tangente à parábola que representa um dos lados do triângulo é* $60°$ *e a inclinação da outra reta é* $120°$.

Procuramos os pontos da parábola tais que:

$$y' = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} \ e \ \ y' = \operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$$
$$y' = -2x$$
$$\therefore$$
$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pontos de tangência: $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$ *e* $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

As retas tangentes no pontos P e Q juntamento com o eixo x delimitam o triângulo equilátero ABC.

b) Use aproximação linear para estimar $\sqrt[5]{99.999}$.

Considere $f(x) = \sqrt[5]{x}$.

Sabendo que $f(100.000) = f(10^5) = 10$ *e* $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$; $f'(10^5) = \frac{1}{5 \times 10^4}$.
A aproximação linear ou linearização de f em $x = 10^5$ *é dada por:*

$$L(x) = f(10^5) + f'(10^5).(x - 10^5)$$
$$L(x) = 10 + \frac{1}{5 \times 10^4}(x - 10^5)$$
$$\sqrt[5]{99.999} \approx L(10^5 - 1) = 10 - \frac{1}{5 \times 10^4} = 10 - 2 \times 10^{-5}$$

***Questão* 2.**

a) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg}(2x)}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg}(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\cos x}{\cos 2x} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\right];$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\cos 2x} = \frac{\cos 0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}.\frac{x}{x}.\frac{2x}{2x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}.\frac{x}{\operatorname{sen} x}.\frac{2x}{x}\right] = 1\times 1\times 2 = 2.$$

$*\ Obs.: Limite\ Fundamental\ Trigonométrico\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} kx}{kx} = 1, k\neq 0.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg}(2x)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x}{\cos 2x}.\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos 2x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x} = 1\times 2 = 2.$$

$b)$ *Determine os pontos nos quais o gráfico de* $y = \ln(x^2)$ *possui reta tangente passando pela origem.*

$$D(y) = \{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$$

Equação geral de uma reta que passa pela origem:

$$y = mx$$

Se esta reta é tangente é tangente ao gráfico de $\ln(x^2)$ *em algum ponto* $(x, \ln x^2)$, *então* $m = y'$ *nesse ponto.*

$$\ln(x^2) = \left(\frac{1}{x^2}.2x\right).x$$
$$\ln(x^2) = 2$$
$$x^2 = e^2$$
$$x = \pm e$$

Pontos onde a reta tangente passa pela origem : $A(-e, 2)$ *e* $B(e, 2)$.

***Questão* 3.**

$a)$ *Determine a função* $y = f(x)$ *tal que* $f(0)\neq 1$, *sabendo que a reta tangente a seu gráfico num ponto* (x, y) *tem inclinação dada por* $y' = \sqrt{x+1}$.

A expressão mais geral para a antiderivada de y' *é dada por:*

$$y = f(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$
$$f(0) = \frac{2}{3} + C\neq 1$$
$$\therefore C\neq\frac{1}{3}$$
$$f(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C,\qquad C\neq 0$$

Caso fosse para determinar $y = f(x)$ *tal que* $f(0) = 1$, *então* $C = \frac{1}{3}$ *e, portanto*

$$f(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$$

$b)$ *Use derivadas para mostrar que* $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{\pi}{4}.$

Sejam f *e* g *funções tais que* $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ *e* $g(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ *onde* $D(f) = \mathbb{R}$ *e* $D(g) = \mathbb{R} - \{1\}$. *Então,*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}} \cdot \left[\frac{\sqrt{1+x^2} - x.\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x)}{1+x^2}\right]$$

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2}.\left[\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$$

$$g'(x) = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} \cdot \left[\frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\right]$$

$$g'(x) = \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Logo, $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

"*Se* $f'(x) = g'(x)$ *para todo* x *em um intervalo* (a,b) *então* $f - g$ é *constante em* (a,b); *isto* é, $f(x) = g(x) + C$, *em que* C é *uma constante*"

No caso em questão $f'(x) = g'(x)$ *para todo* $x \in (-\infty, +\infty)$ *então* $f - g$ é *constante em* $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. *Logo,* $f(x) = g(x) + C$, *onde* C é *uma constante a ser determinada. Note, que devido ao domínio da função* g *podemos ter valores distintos para* C *caso* $x \in (-\infty, 1)$ *ou caso* $x \in (1, +\infty)$.

Calculando a expressão para $x = 0$, *obtemos o valor de* C *caso* $x \in (-\infty, 1)$.

$$f(0) = g(0) + C$$
$$\operatorname{arcsen} 0 = \operatorname{arctg} 1 + C$$
$$0 = \frac{\pi}{4} + C \ \therefore C = -\frac{\pi}{4}$$

Logo, $f(x) = g(x) - \frac{\pi}{4}$ *e, portanto,*

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{\pi}{4}, \forall x \in (-\infty, 1)$$

Caso $x \in (1, +\infty)$, *calculando o valor da identidade para* $x = \sqrt{3}$, *temos:*

$$f(\sqrt{3}) = g(\sqrt{3}) + C$$
$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\frac{\pi}{3} = \operatorname{arctg}\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}\right) + C$$
$$C = \frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}(-2-\sqrt{3})$$

$*$ *Como a função* $\operatorname{arctg} x$ *é uma função ímpar, então*:

$$C = \frac{\pi}{3} + \operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})$$

$\operatorname{tg}\theta = 2+\sqrt{3}$; $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta \therefore \sec^2\theta = 8+4\sqrt{3}$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{8+4\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad e \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Calculando a expressão $\operatorname{sen} 2\theta$ *temos*:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2.\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{2} \therefore 2\theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } 2\theta = \frac{5\pi}{6}$$

Como $\operatorname{sen}\theta > \frac{1}{2}$ *então* $\theta > \frac{\pi}{6}$. *Logo*,

$$2\theta = \frac{5\pi}{6} \therefore \theta = \frac{5\pi}{12}$$

Portanto, $C = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$

Então, para $x \in (1,+\infty)$, *temos*:

$$f(x) = g(x) + \frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{3\pi}{4}, \forall x \in (1,+\infty)$$

$*$ *Poderíamos obter os mesmos resultados calculando o limite da expressão* $f - g$ *quando* $x \to 1^+$ *e quando* $x \to 1^-$. *Demonstrando*:

$$\lim_{x\to 1^-}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] = \lim_{x\to 1^-}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \lim_{x\to 1^-}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$= \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] = \lim_{x\to 1^+}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \lim_{x\to 1^+}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$= \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

$*$ *Portanto, a identidade exposta é válida somente para* $x \in (-\infty, 1)$.

***Questão* 4.**

$a)$ *Usando a regra de L'Hôpital, ache* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x.\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[x.\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x.\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+3}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{1} = 3.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[x.\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]} = e^3.$$

$b)$ *Tome todas as informações necessárias e trace o gráfico de* $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

1. *Domínio da função*: $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$.

2. *Interseções com os eixos coordenados*: $f(x)>0, \forall x\in D(f)$ *e* $f(0)$ *não está definido. Logo, não há interseções com os eixos!*

3. *Intervalos de crescimento e decrescimento*:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}};\ \ f'(x)<0, \forall x\in D(f)$$

Logo, f *é decrescente em* $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

$*$ *Consequentemente, pelo Teste da Primeira Derivada,* f *não possui pontos de máximo ou mínimo relativos.*

4. *Intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$$

$f''(x)>0$, *se* $x>-1/2$ *com* $x\neq 0$
$f''(x)<0$, *se* $x<-1/2$

f *possui concavidade voltada para cima em* $(-1/2,0)\cup(0,\infty)$
f *possui concavidade voltada para baixo em* $(-\infty,-1/2)$.

Como ocorre mudança na direção da concavidade em $x=-1/2$ *e este número pertence ao domínio de* f*, então* f *possui um ponto de inflexão em* $-1/2$.

Ponto de inflexão: $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{e^2}\right)$.

5. *Assíntotas*:

5.1 *Assíntota vertical*:

A reta $x = a$ é *assíntota vertical de* f *se* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

$*$ *Pela definição de continuidade, as assíntotas verticais ocorrem nas descontinuidades da função. Verificando a reta* $x = 0$, *temos*:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Portanto, a reta $x = 0$ é *assíntota vertical do gráfico de* f.

5.2 *Assíntota horizontal*:

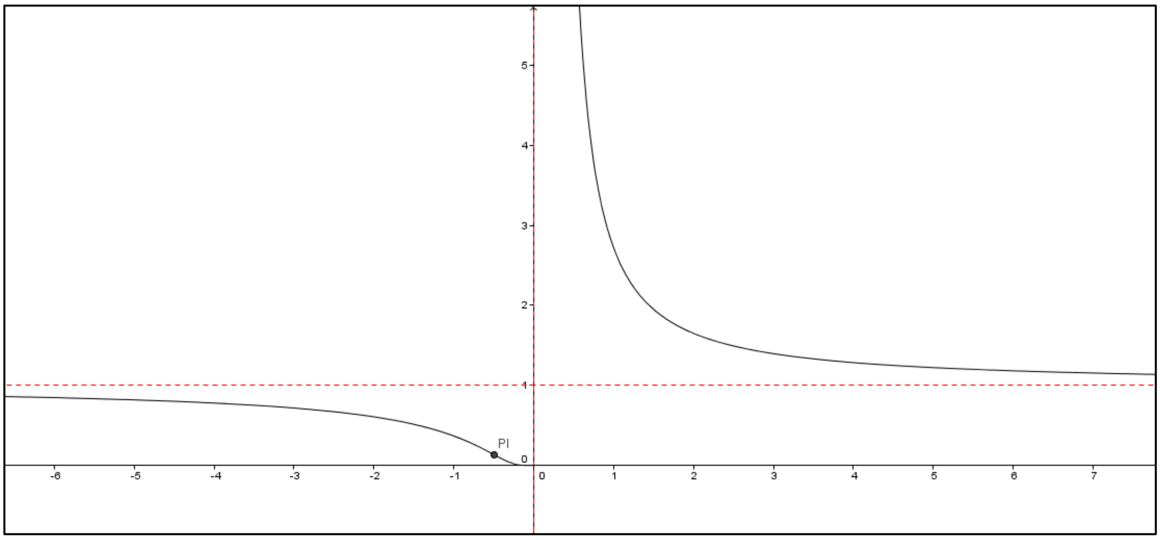
A reta $y = L$ é *assíntota horizontal de* f *se, somente se* $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ *ou* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Portanto, a reta $y = 1$ é *assíntota horizontal do gráfico de* f.

6. *Esboço Gráfico*



***Questão* 5.**

a) Encontre as dimensões do cone de volume máximo que tenha uma área lateral igual a 1.

Área Lateral do Cone: $A_L = \pi r g \ ; \ g = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$A_L = \pi r\sqrt{r^2+h^2} = 1$$
$$\left(\pi r\sqrt{r^2+h^2}\right)^2 = 1$$
$$\pi^2 r^2(r^2+h^2) = 1$$
$$h^2 = \frac{1}{\pi^2 r^2} - r^2$$
$$h^2 = \frac{1-\pi^2 r^4}{\pi^2 r^2}$$
$$h = \frac{\sqrt{1-\pi^2 r^4}}{\pi r} \qquad (I)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 . \frac{\sqrt{1-\pi^2 r^4}}{\pi r}$$
$$V(r) = \frac{1}{3} r\sqrt{1-\pi^2 r^4}$$
$$V'(r) = \frac{1}{3}\left[\sqrt{1-\pi^2 r^4} + r . \frac{1}{2\sqrt{1-\pi^2 r^4}} . (-4\pi^2 r^3)\right]$$
$$V'(r) = \frac{1}{3}\left[\frac{1-\pi^2 r^4 - 2\pi^2 r^4}{\sqrt{1-\pi^2 r^4}}\right]$$
$$V'(r) = \frac{1-3\pi^2 r^4}{3\sqrt{1-\pi^2 r^4}} = \frac{\left(1-\sqrt{3}.\pi.r^2\right)\left(1+\sqrt{3}.\pi.r^2\right)}{3\sqrt{(1-\pi r^2)(1+\pi r^2)}}$$

Estudo do sinal da função derivada de V:

$$-----\left(-3^{-\frac{1}{4}}.\pi^{-\frac{1}{2}}\right)++++\left(3^{-\frac{1}{4}}.\pi^{-\frac{1}{2}}\right)----- \qquad \left(1-\sqrt{3}.\pi.r^2\right)$$
$$+++++++++++++++++++++++++ \qquad \left(1+\sqrt{3}.\pi.r^2\right)$$
$$\left(-\pi^{-\frac{1}{2}}\right)+++++++++++++++\left(\pi^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad 3\sqrt{1-\pi^2 r^4}$$

$$\left(-\pi^{-\frac{1}{2}}\right)--\left(-3^{-\frac{1}{4}}\pi^{-\frac{1}{2}}\right)++++\left(3^{-\frac{1}{4}}\pi^{-\frac{1}{2}}\right)--\left(\pi^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad V'(r)$$

Pelo Teste da Primeira derivada, $r = 3^{-\frac{1}{4}}\pi^{-\frac{1}{2}}$ é um número crítico associado ao ponto de máximo relativo da função V e, portanto, para $r = 3^{-\frac{1}{4}}\pi^{-\frac{1}{2}}$, temos o cone de área lateral igual a 1 com a maior capacidade.

Dimensões: $r = \frac{1}{\sqrt[4]{3}.\sqrt{\pi}}$. *e* $h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}.\sqrt{\pi}}$.

$b)$ *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de* $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$ *no intervalo* $[0,4]$.

f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ pois é a diferença entre funções contínuas em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua no intervalo fechado $[0,4]$.

"*Se f é uma função contínua no intervalo fechado* $[0,4]$*, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d, tal que $c, d \in [0,4]$.*" (*Teorema do Valor Extremo*)
Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de f nos extremos do intervalo*:

$f(0) = 0 - 2\operatorname{arctg} 0 = 0$
$f(4) = 4 - 2\operatorname{arctg}(4) > 0.$

2. *Os valores de f nos números críticos de f em* $(0,4)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad D(f') = \mathbb{R}$$

"*Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe.*"

Como f é derivável em $\mathbb{R}$, se c é um número crítico de f então $f'(c)$ existe e $f'(c) = 0$. Logo,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \therefore x = 1 \quad (x = -1 \text{ não pertence ao intervalo!})$$

$$f(1) = 1 - 2\operatorname{arctg}(1) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2 concluímos que $(4 - \operatorname{arctg} 4)$ *é o valor máximo absoluto e* $(1 - \pi/2)$ *é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado* $[0,4]$.

14.12 Reavaliação da 2ª Média – 27 de Maio de 2017

***Questão* 1.**

$a)$ *Considere a função* $f(x) = \text{sen}^2 x$, *restrita ao intervalo* $[0,2\pi]$ *e dê seus intervalos de crescimento e decrescimento, os intervalos a concavidade é para cima ou para baixo, os pontos de inflexão e seus extremos absolutos e relativos.*

$b)$*Ache* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\text{tg}\, x)^{\text{cotg}\, x}$

***Questão* 2.**

$a)$ *Encontre a derivada da função* $f(x) = \dfrac{x^x.\sqrt[3]{x^2}}{(\cos x)^3}$.

$b)$*Uma partícula tem função posição dada por* $s(t) = \dfrac{3}{t^2}$, $t \geq 0$, *onde t é medido em segundos e s em metros. Use diferenciais para estimar o erro na posição do objeto, no instante* $t = 2$, *sabendo que o relógio pode estar adiantado ou atrasado em* 5 *milésimos de segundos.*

***Questão* 3.**

$a)$ *Mostre que* $\text{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \text{arcsen}\, x$, *para* $-1 < x < 1$.

$b)$ *Mostra que se* $a \neq 0$ *e* $b \neq 0$, *então existem números* α *e* β, *tais que* $a.e^x + b.e^{-x} = \alpha.\cosh(x+\beta)$.

***Questão* 4.**

$a)$ *O dono de uma chácara possui* 84m^2 *de azulejos para piscina e pretende construir uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, com profundidade de* 2m *e volume máximo. Quais devem ser as outras dimensões da piscina?*

$b)$ *Encontre a área máxima de um triângulo formado no primeiro quadrante pelos eixos coordenados e uma reta tangente ao gráfico de* $y = (x+1)^{-2}$.

***Questão* 5.**

$a)$*Verifique se a função* $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $x \in [-1,1]$ *satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Em caso afirmativo, determine o número c no aberto* $(-1,1)$ *que satisfaz a conclusão do Teorema.*

$b)$ *Seja a função* $g(x) = \text{sen}\, x.\cos x$. *Determine a função* $y = f(x)$, *tal que* $f'(x) = g(x)$ *e* $f(0) = 1$.

***Questão* 1.**

$a)$ *Considere a função* $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ *, restrita ao intervalo* $[0,2\pi]$ *e dê seus intervalos de crescimento e decrescimento, os intervalos a concavidade é para cima ou para baixo, os pontos de inflexão e seus extremos absolutos e relativos.*

$$f'(x) = 2\operatorname{sen} x \,.\cos x$$

$(0) +++ (\pi/2) +++ (\pi) --- (3\pi/2) --- (2\pi) \quad 2\operatorname{sen} x$
$(0) +++ (\pi/2) --- (\pi) --- (3\pi/2) +++ (2\pi) \quad \cos x$
$(0) +++ (\pi/2) --- (\pi) +++ (3\pi/2) --- (2\pi) \quad f'(x)$

f é *crescente em* $(0,\pi/2) \cup (\pi,3\pi/2)$ *e*
f é *decrescente em* $(\pi/2\,,\pi) \cup (3\pi/2\,,2\pi)$.

Pelo Teste da Primeira Derivada, temos:

Pontos de máximo relativo: $(\pi/2\,,1), (3\,\pi/2\,,1)$
Pontos de mínimo relativo: $(\pi,0)$

O valor máximo absoluto 1 *ocorre em* $x = \{\pi/2\,,3\pi/2\}$ *e o valor mínimo absoluto ocorre em* $x = \{0,\pi,2\pi\}$.

$$f''(x) = 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$$

$$f''(x) = 2\cos(2x)$$

$$(0) ++\left(\frac{\pi}{4}\right) --\left(\frac{\pi}{2}\right) --\left(\frac{3\pi}{4}\right) ++(\pi) ++\left(\frac{5\pi}{4}\right) --\left(\frac{3\pi}{2}\right) --\left(\frac{7\pi}{4}\right) ++(2\pi) \quad f''(x)$$

f *possui concavidade voltada para cima em* $\left(0,\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$ *e*

f *possui concavidade voltada para baixo em* $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$.

Os pontos de inflexão ocorrem onde há mudança na direção da concavidade.

Logo, f *possui pontos de inflexão em* $x = \left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$.

Pontos de inflexão: $\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{4},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ *e* $\left(\frac{7\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$.

$b)$ *Ache* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$. *Indeterminação* "∞^0"

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\ln(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\operatorname{cotg} x.\ln(\operatorname{tg} x)} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{cotg} x.\ln(\operatorname{tg} x)} .$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{cotg} x \,.\ln(\operatorname{tg} x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}}{\sec^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{cotg} x = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{cotg} x.\ln(\operatorname{tg} x)} = e^0 = 1.$$

***Questão* 2.**

$a)$ *Encontre a derivada da função* $f(x) = \frac{x^x.\sqrt[3]{x^2}}{(\cos x)^3}$.

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \ e \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x^x.x^{\frac{2}{3}}}{(\cos x)^3}$$

$$\ln f(x) = \ln\left[\frac{x^x.x^{\frac{2}{3}}}{(\cos x)^3}\right]$$

$$\ln f(x) = \ln x^x + \ln x^{\frac{2}{3}} - \ln(\cos x)^3$$

$$\ln f(x) = x.\ln x + \frac{2}{3}\ln x - 3\ln(\cos x)$$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 + \frac{2}{3x} + 3\operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = \frac{x^x.x^{\frac{2}{3}}}{(\cos x)^3}\left[\ln x + 1 + \frac{2}{3x} + 3\operatorname{tg} x\right]$$

$b)$*Uma partícula tem função posição dada por* $s(t) = \frac{3}{t^2}, t \geq 0,$ *onde* t *é medido em segundos e* s *em metros. Use diferenciais para estimar o erro na posição do objeto, no instante* $t = 2$, *sabendo que o relógio pode estar adiantado ou atrasado em* 5 *milésimos de segundos*.

Por diferenciais, temos:

$$\Delta s \cong ds$$

$$\Delta s \cong s'(t).dt$$

$$s'(t) = -\frac{6}{t^3} \therefore s'(2) = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

$$\Delta t = dt = \pm 5 \times 10^{=3} segundos$$

$$\Delta s \cong s'(2).dt$$

$$\Delta s \cong -\frac{3}{4} \times (\pm 5 \times 10^{-3})$$

$$\Delta s \cong -\frac{15}{4} \times 10^{-3} m = \pm 3{,}75 mm$$

***Questão* 3.**

$a)$ *Mostre que* $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{arcsen} x$, *para* $-1 < x < 1$.

Seja $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, *onde* $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ *e* $g(x) = \operatorname{arcsen} x$ *onde* $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2} - x.\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.(-2x)}{1-x^2}\right)$$
$$f'(x) = (1-x^2).\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se $f'(x) = g'(x)$ *para todo* x *em* $(-1,1)$ *então* $f - g$ *é constante em* $(-1,1)$.
Isto, é $f(x) = g(x) + C$, *onde* C *é uma constante*.

Sendo $x = 0$, *onde* $0 \in (-1,1)$, *temos*:

$$f(0) = g(0) + C$$
$$\operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arcsen} 0 + C$$
$$0 = 0 = C$$
$$C = 0.$$

Portanto,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{arcsen} x \text{, } para -1 < x < 1$$

$b)$ *Mostra que se* $a \neq 0$ *e* $b \neq 0$, *então existem números* α *e* β, *tais que* $a.e^x + b.e^{-x} = \alpha.\cosh(x+\beta)$.

$$a.e^x + b.e^{-x} = \frac{\alpha}{2}.\left(e^{x+\beta} + e^{-x-\beta}\right)$$
$$a.e^x + b.e^{-x} = \frac{\alpha}{2}.e^{\beta}.e^x + \frac{\alpha}{2}.e^{-\beta}.e^{-x}$$

Igualando o coeficientes dos termos exponenciais, temos:

$$a.e^x = \frac{\alpha}{2}.e^{\beta}.e^x \Rightarrow \alpha.e^{\beta} = 2a \quad (I)$$
$$b.e^{-x} = \frac{\alpha}{2}.e^{-\beta}.e^{-x} \Rightarrow \alpha.e^{-\beta} = 2b \quad (II)$$

Dividindo as equações, obtemos:

$$e^{2\beta} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 2\beta = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \therefore \beta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\alpha . e^{\beta} = 2a \Longrightarrow \alpha = \frac{2a}{e^{\beta}} = \frac{2a}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \therefore \alpha = 2\sqrt{ab}$$

Logo,

$$a.e^{x} + b.e^{-x} = 2\sqrt{ab}.\cosh\left(x + \ln\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

Questão 4.

a) O dono de uma chácara possui $84m^2$ *de azulejos para piscina e pretende construir uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, com profundidade de* $2m$ *e volume máximo. Quais devem ser as outras dimensões da piscina?*

$$A_T = 84m^2 = 2bh + 2lh + bl\ ; com\ h = 2m$$

$$84 = 4b + 4l + bl$$

$$l = \frac{84 - 4b}{(4 + b)} = \frac{4(21 - b)}{(4 + b)}$$

$$Volume\ da\ piscina:\ \ V = blh$$

$$V = 2bl$$

$$V(b) = 2b.\frac{4(21 - b)}{(4 + b)}$$

$$V(b) = 8.\frac{21b - b^2}{4 + b}$$

$$V'(b) = 8.\frac{(21 - 2b)(4 + b) - (21b - b^2)}{(4 + b)^2}$$

$$V'(b) = 8\frac{-b^2 - 8b + 84}{(4 + b)^2}$$

$$\Delta = 64 + 336 = 400$$

$$b = \frac{8 \pm 20}{-2} \therefore b_1 = 6\ e\ b_2 = -14$$

$- - - - (-14) + + + + + (6) - - - -$ $\quad 8(-b^2 - 8b + 84)$
$+ + + + + + + + (-4) + + + + + + + +$ $\quad (4 + b)^2$
$- - - - (-14) + (-4) + (6) - - - -$ $\quad V'(b)$

Pelo Teste da Primeira Derivada, temos que para $b = 6m$ *a piscina terá o* *volume máximo com área de* $84m^2$. *Logo,*

$$l = \frac{4(21-b)}{(4+b)} = \frac{4(21-6)}{4+6} = \frac{60}{10} = 6m$$

As dimensões da piscina são $6m \times 6m \times 2m$.

b) Encontre a área máxima de um triângulo formado no primeiro quadrante pelos eixos coordenados e uma reta tangente ao gráfico de $y = (x+1)^{-2}$.

Dado um ponto (a,b) *do gráfico de* $y = (x+1)^{-2}$ *temos* $b = (a+1)^{-2}$. *A equação da reta tangente ao gráfico neste ponto é dada por:*

$$y - b = y'(a).(x-a)$$

$y' = -2(x+1)^{-3}$
$y'(a) = -2(a+1)^{-3}$

$$y - \frac{1}{(a+1)^2} = -\frac{2}{(a+1)^3}(x-a)$$

Intersecção da reta tangente com os eixos coordenados:

Para $x = 0$, *temos:*

$$y = \frac{2a}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{3a+1}{(a+1)^3}$$

Para $y = 0$, *temos:*

$$x = \frac{a+1}{2} + a = \frac{3a+1}{2}$$

Área do triângulo:

$$A = \frac{1}{2}.\frac{3a+1}{(a+1)^3}.\frac{3a+1}{2}$$

$$A(a) = \frac{(3a+1)^2}{4(a+1)^3}$$

$$A'(a) = \frac{24(3a+1)(a+1)^3 - 12(3a+1)^2(a+1)^2}{16(a+1)^6}$$

$$A'(a) = \frac{6(3a+1)(a+1) - 3(3a+1)^2}{4(a+1)^4}$$

$$A'(a) = \frac{3(3a+1)[2(a+1)-(3a+1)]}{4(a+1)^4}$$

$$A'(a) = \frac{3(3a+1)(1-a)}{4(a+1)^4}$$

$- - - - (-1/3) + + + + + (1) - - - -$ $\quad 3(3a+1)(1-a)$
$+ + + + + + + + + (-1) + + + + + + + +$ $\quad 4(a+1)^4$
$- - - - (-1/3) + (-1) + + (1) - - - -$ $\quad A'(a)$

$Pelo\ Teste\ da\ Primeira\ Derivada, para\ a = 1\ temos\ o\ triângulo\ de\ área\ máxima\ definido\ pela\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ y = (1 + x)^{-2}\ e\ os\ eixos\ coordenados.$

$A\ área\ máxima\ é$

$$A = \frac{(3 \times 1 + 1)^2}{4(1 + 1)^3} = \frac{4^2}{4 \times 2^3} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} u.A$$

Questão 5.

$a) Verifique\ se\ a\ função\ f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, x \in [-1,1]\ satisfaz\ as\ hipóteses\ do\ Teorema\ de\ Rolle. Em\ caso\ afirmativo, determine\ o\ número\ c\ no\ aberto\ (-1,1)\ que\ satisfaz\ a\ conclusão\ do\ Teorema.$

$Domínio\ da\ função: D(f) = \mathbb{R}.$

$Como\ f\ é\ contínua\ onde\ está\ definida, então\ f\ é\ contínua\ em\ seu\ domínio, ou\ seja, f\ é\ contínua\ em\ \mathbb{R}. Logo, f\ é\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [-1,1].$

$$f'(x) = \frac{-2x(1 + x^2) - 2x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{4x}{(1 + x^2)^2} \quad D(f') = \mathbb{R}$$

$Como\ f'\ está\ definida\ em\ \mathbb{R}, então\ f\ é\ diferenciável\ em\ \mathbb{R}. Logo, f\ é\ derivável\ no\ intervalo\ aberto\ (-1,1).$

$Portanto, a\ função\ f\ satisfaz\ as\ hipoteses\ do\ Teorema\ de\ Rolle:$

$1. f\ é\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [-1,1];$
$2. f\ é\ derivável\ no\ intervalo\ aberto\ (-1,1);$

$Então, existe\ um\ número\ c \in (-1,1)\ tal\ que\ f'(c) = 0.$

$$f'(c) = 0 \Longrightarrow -\frac{4c}{(1 + c^2)^2} = 0 \therefore c = 0.$$

$b)\ Seja\ a\ função\ g(x) = \operatorname{sen} x\,.\cos x\,. Determine\ a\ função\ y = f(x), tal\ que\ f'(x) = g(x)\ e\ f(0) = 1.$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x\,.\cos x = 2g(x)$$

$Logo,$

$$g(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

$A\ antiderivada\ mais\ geral\ para\ a\ função\ g\ é:$

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

$Como\ f(0) = 1, temos:$

$f(0) = 1 = -\frac{1}{4}\cos 0 + C$

$$1 = -\frac{1}{4} + C \therefore C = \frac{5}{4}$$

$Portanto,$

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{5}{4}.$$

14.13 Avaliação Final – 02 de Junho de 2017

Questão 1

a) Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$.

b) Seja g uma função derivável tal que $g(0) = \pi/2$ e $g'(0) = 1$. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^{\cos[g(x)]}$ no ponto onde a abscissa é zero.

Questão 2

a) Seja $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$, com $0 < x < \pi$. Para quais valores de x a reta tangente a f é paralela à reta $y = -x + 2$?

b) Encontre a primitiva da função $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 1}$ cuja imagem em $x = 2$ é igual a 4.

Questão 3

a) Um quadro de 20cm de altura está em uma parede de tal forma que seu bordo inferior está a 60cm acima do nível do olho do observador. Determine a que distância de um ponto diretamente abaixo do cartaz o observador deve se colocar para maximizar o ângulo entre a linha de visão do topo e da base do cartaz.

b) Seja N uma reta tangente a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$. Mostre que a soma dos valores das coordenadas das intersecções de N com os eixos coordenados é igual a k.

Questão 4

a) Calcule $\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta^2}}$.

b) Use aproximações lineares para calcular $\sqrt[3]{0{,}95}$.

Questão 5

a) Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$, tais que $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que existem números k e j tais que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(k, f(k))$ é paralela à reta tangente ao gráfico de g no ponto $(j, g(j))$.

b) Determine, se existir, uma assíntota horizontal do gráfico da função $f(x) = \frac{\ln x - e^x}{e^x}$, se $x > 0$.

Questão 6

a) *Um tanque tem a forma de um cone circular reto invertido, com* 4m *de altura e raio da base* 2m. *Se entra* água *no tanque* à *razão de* $0{,}001\, m^3/min$, *em qual profundidade a* água *estará subindo com uma velocidade de* $\dfrac{1}{250\pi} m/min$?

b) *Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $y = \cos^{x}(x)$ *no ponto em que* $x = 0$.

Questão 7

a) *Defina* $f(0)$ *para que a função definida para* $x \neq 0$ *por* $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + k^3} - k}{x}$, k *constante, seja contínua em todos os reais.*

b) *Sabendo que* $|f(x) + 3| \leq \pi.(1 + \operatorname{sen} x)^4$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *encontre* $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x)$.

Questão 8

a) *Use o teste da segunda derivada (se possível) para determinar os pontos de máximo em de mínimo relativos da função* $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$, *no intervalo* $(-\pi, \pi)$.

b) *Use a definição para mostrar que a derivada de* $f(x) = \cos x$ é *igual a* $g(x) = -\operatorname{sen} x$.

Questão 9

a) *Prove que a equação* $\operatorname{arctg}(x) = 1 - x$ *tem pelo menos uma raíz real.*

b)*Determine as equações das retas horizontais tangentes ao gráfico de* $f(x) = \sec(x^2 - 1)$.
Observaçao: considere $\sec(-1) = 1{,}85$, *e* $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Questão 10

a)*Seja* $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\right)$, *mostre que todas as retas tangentes ao gráfico de* $y = f(x)$ *são paralelas.*

b) *Seja* $f(x) = \operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{2}\operatorname{cossec}^2 x$, *com* $x \in (0, \pi)$. *Determine o valor máximo absoluto de* f.

Questão 1

$a)$ *Calcule* $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} \; ; *$$

$Se\ x \to 2, então\ x \neq 2$
$Logo, (x-2) \neq 0.$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x^2 + 2x + 4}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 2}(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)}{\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4)}$$

$$= \frac{2^3 + 2 \times 2^2 + 4 \times 2 + 8}{2^2 + 2 \times 2 + 4}$$

$$= \frac{8 + 8 + 8 + 8}{4 + 4 + 4}$$

$$= \frac{32}{12}$$

$$= \mathbf{\frac{8}{3}}.$$

Questão 1.

$b)$ *Seja g uma função derivável tal que $g(0) = \pi/2$ e $g'(0) = 1$. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^{\cos[g(x)]}$ no ponto onde a abscissa é zero.*

$f(0) = e^{\cos[g(0)]} = e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = e^0 = 1.$ *Ponto de tangencia*: $(0,1)$.

$f'(x) = e^{\cos[g(x)]}.\{-\operatorname{sen}[g(x)]\}.g'(x)$

$f'(0) = e^{\cos[g(0)]}.\{-\operatorname{sen}[g(0)]\}.g'(0)$
$f'(0) = e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}.\left\{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}.1$
$f'(0) = e^0 \times (-1)$
$f'(0) = -1.$

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1)$:

$$y - 1 = -1(x - 0)$$
$$\boldsymbol{y = -x + 1}$$

Questão 2.

$a)$ *Seja* $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$, *com* $0 < x < \pi$. *Para quais valores de* x *a reta tangente a* f *é paralela à reta* $y = -x + 2$?

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Se a reta tangente ao gráfico de f *num ponto* $(x, f(x))$ *é paralela à reta* $y = -x + 2$, *então ambas possuem o mesmo coeficiente angular. Isto é, no ponto* $(x, f(x))$, *temos* $f'(x) = -1$.

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} . \cos x$$

$$f'(x) = \operatorname{cotg} x$$

$$f'(x) = -1 \Longrightarrow \operatorname{cotg} x = -1 \therefore x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Como $x \in (0, \pi)$, *então* ... $\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{4}}$.

Questão 2.

$b)$ *Encontre a primitiva da função* $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2-1}$ *cuja imagem em* $x = 2$ é *igual a* 4.

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2-1} = \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$; $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \ e \ x \neq -1]$

$*$ *Se* f é *descontínua em* $x = \{-1,1\}$ *então sua primitiva também* é *descontínua em* $x = \{-1,1\}$. *Logo ...*

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$
$$f(x) = 1 + 2.\frac{1}{x-1}$$

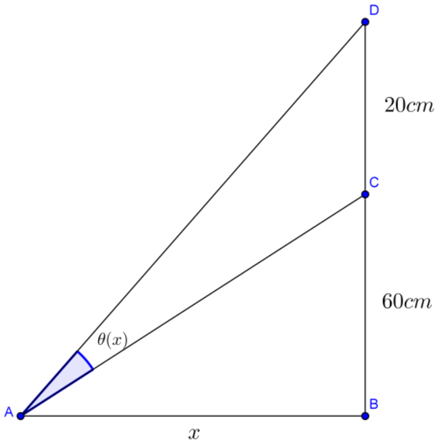
A primitiva ou antiderivada mais geral da função f é *dada por*:

$$F(x) = x + 2\ln(x-1) + C$$
$$F(2) = 2 + 2\ln 1 + C = 4$$
$$2 + 0 + C = 4$$
$$\therefore C = 2.$$

$$\boldsymbol{F(x) = x + 2\ln(x-1) + 2}$$

$$\textbf{\textit{Questão 3.}}$$

$a)$ *Um quadro de* $20cm$ *de altura está em uma parede de tal forma que seu bordo inferior está a* $60cm$ *acima do nível do olho do observador. Determine a que distância de um ponto diretamente abaixo do cartaz o observador deve se colocar para maximizar o ângulo entre a linha de visão do topo e da base do cartaz.*



Seja $\alpha = B\hat{A}C$, *então* ... $\operatorname{tg}\alpha = \frac{60}{x}$ *e, portanto,* $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{60}{x}\right)$.

Do triângulo ABD, temos:

$$\operatorname{tg}(\theta + \alpha) = \frac{80}{x}$$

$$\theta + \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{80}{x}\right)$$

$$\theta(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{60}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{80}{x}\right)$$

$$\theta(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{80}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{60}{x}\right)$$

$$\theta'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{80}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{80}{x^2}\right) - \frac{1}{1 + \left(\frac{60}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{60}{x^2}\right)$$

$$\theta'(x) = -\frac{80}{x^2 + 80^2} + \frac{60}{x^2 + 60^2}$$

$$\theta'(x) = \frac{-80(x^2 + 3600) + 60(x^2 + 6400)}{(x^2 + 6400)(x^2 + 3600)}$$

$$\theta'(x) = \frac{-20x^2 + 1000(-8 \times 36 + 6 \times 64)}{(x^2 + 6400)(x^2 + 3600)}$$

$$\theta'(x) = \frac{-20x^2 + 96000}{(x^2 + 6400)(x^2 + 3600)}$$

$$- - - - - - \left(-40\sqrt{3}\right) + + + (0) + + + \left(40\sqrt{3}\right) - - - - - - \qquad \theta'(x)$$

$*$ *Obs.: A distância* x *é positiva! Por isso o intervalo em destaque não é considerado na análise do resultado.*

Pelo Teste da Primeira Derivada para uma distância $\boldsymbol{x = 40\sqrt{3}cm}$ *do quadro, o observador terá o maior ângulo entre a linha do topo e da base do quadro.*

Questão 3.

b)Seja N uma reta tangente a $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$. *Mostre que a soma dos valores das coordenadas das intersecções de N com os eixos coordenados é igual a k.*

Seja N uma reta tangente a curva no ponto (x_0, y_0), *então* $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}=\sqrt{k}$.

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{d}{dx}\left(k^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}.y'=0$$
$$y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

No ponto (x_0, y_0) *temos* $y'=-\sqrt{y_0}/\sqrt{x_0}$.

Equação da reta tangente N:

$$y-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}.(x-x_0)$$

Intersecções da reta N com os eixos coordenados:

Para $x=0$, *temos …*

$$y=y_0+\frac{x_0\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}} \therefore y=y_0+\sqrt{x_0y_0}$$
$$Ponto\ \left(0, y_0+\sqrt{x_0y_0}\right)$$

Para $y=0$, *temos …*

$$-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0) \Longrightarrow x-x_0=\frac{y_0\sqrt{x_0}}{\sqrt{y_0}} \therefore x=x_0+\sqrt{x_0y_0}$$
$$Ponto\ \left(x_0+\sqrt{x_0y_0}, 0\right)$$

Soma das coordenadas dos pontos de intersecção:

$S=x_0+\sqrt{x_0y_0}+y_0+\sqrt{x_0y_0}$
$S=x_0+2\sqrt{x_0y_0}+y_0$
$S=\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}\right)^2$
$S=\left(\sqrt{k}\right)^2$
$S=k$

Logo, a soma dos valores das coordenadas das intersecções de N com os eixos coordenados é igual a k.

Questão 4

a) Calcule $\lim_{\theta \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta^2}}$.

$*$ *Indeterminação do tipo* "1^∞"

$$\lim_{\theta \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta^2}} = \lim_{\theta \to 0} e^{\ln\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta^2}}\right]} = \lim_{\theta \to 0} e^{\left[\frac{1}{\theta^2}.\ln\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)\right]} = e^{\lim_{\theta \to 0}\left[\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)}{\theta^2}\right]}.$$

Calculando o limite do expoente, obtemos ...

$$\lim_{\theta \to 0}\left[\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)}{\theta^2}\right] = \lim_{\theta \to 0}\frac{\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}.\frac{\theta.\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\theta^2}}{2\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0}\frac{\frac{\theta.\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\theta.\operatorname{sen}\theta}}{2\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0}\frac{\theta.\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{2\theta^2.\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0}\frac{\cos\theta - \theta.\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{4\theta.\operatorname{sen}\theta + 2\theta^2.\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0}\frac{-\theta.\operatorname{sen}\theta}{4\theta.\operatorname{sen}\theta + 2\theta^2.\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0}\frac{-1}{4 + 2\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}.\cos\theta}$$

$$= \frac{-1}{4 + 2 \times 1 \times 1}$$

$$= -\frac{1}{6}.$$

Logo,

$$\lim_{\theta \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta^2}} = e^{\lim_{\theta \to 0}\left[\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)}{\theta^2}\right]} = e^{-\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e}.$$

$\textbf{Questão 4}$

$b)$ *Use aproximações lineares para calcular* $\sqrt[3]{0{,}95}$.

Considere $f(x) = \sqrt[3]{x}$. *Logo, temos* $f(1) = 1, f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Longrightarrow f'(1) = \dfrac{1}{3}$ *e queremos calcular* $f(0{,}95)$.

Por aproximação linear ou linearização de f *em* 1, *temos*:

$$L(x) = f(1) + f'(1).(x-1)$$
$$L(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)$$
$$f(0{,}95) \cong L(0{,}95)$$

$$\begin{aligned} L(0{,}95) &= 1 + \frac{1}{3}(0{,}95 - 1) \\ &= 1 - \frac{0{,}05}{3} \\ &= 1 - \frac{1}{60} \\ &= \frac{59}{60}. \end{aligned}$$

$$Logo, \sqrt[3]{0{,}95} \cong \frac{59}{60}.$$

$\textit{Questão } 5$

$a)$ $Sejam\ f\ e\ g\ duas\ funções\ deriváveis\ em\ \mathbb{R}, tais\ que\ f(a) = g(a)\ e\ f(b) = g(b)$ $para\ a, b \in \mathbb{R}. Mostre\ que\ existem\ números\ k\ e\ j\ tais\ que\ a\ reta\ tangente\ ao$ $gráfico\ de\ f\ no\ ponto\ \big(k, f(k)\big)$ é $paralela$ à $reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ g\ no$ $ponto\ \big(j, g(j)\big).$

$Se\ f\ e\ g\ são\ funções\ deriváveis\ em\ \mathbb{R}, então\ f\ e\ g\ são\ contínuas\ em\ \mathbb{R}. Logo,$ $f\ e\ g\ satisfazem\ as\ seguintes\ hipóteses:$

1. $f\ e\ g\ são\ contínuas\ no\ intervalo\ fechado\ [a, b];$
2. $f\ e\ g\ são\ deriváveis\ no\ intervalo\ aberto\ (a, b);$

$Então, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio, existem\ números\ k, j \in (a, b)\ tais\ que$

$$f'(k) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad e \quad g'(j) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

$Como\ f(a) = g(a)\ e\ f(b) = g(b), então\ f'(k) = g'(j). Logo, as\ retas\ tangentes$ $ao\ gráfico\ de\ f\ em\ \big(k, f(k)\big)\ e\ ao\ gráfico\ de\ g\ em\ \big(j, g(j)\big)\ possuem\ o\ mesmo$ $coeficiente\ angular\ e, portanto, são\ retas\ tangentes\ paralelas.$

$$\boldsymbol{Questão\ 5}$$

$b)$ $Determine, se\ existir, uma\ assíntota\ horizontal\ do\ gráfico\ da\ função$ $f(x) = \dfrac{\ln x - e^x}{e^x}, se\ x > 0.$

$A\ reta\ y = L$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ da\ função\ f\ se, somente\ se$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L\ \ ou\ \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L.$

$Como\ D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, então\ só\ podemos\ calcular\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x). Logo,$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x - e^x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{e^x} - 1}{1} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\ln x}{e^x} - 1\right];$$

$$* \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x} = 0.$$

$Como\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}\ existe, então\ ...$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{\ln x}{e^x} - 1\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} - \lim_{x\to\infty} 1 = 0 - 1 = -1.$$

$Portanto, a\ reta\ y = -1$ é $assíntota\ horizontal\ do\ gráfico\ da\ função\ f.$

$\textit{Questão 6.}$

$a)$ *Um tanque tem a forma de um cone circular reto invertido, com* $4m$ *de altura e raio da base* $2m$. *Se entra água no tanque à razão de* $0{,}001\ m^3/min$, *em qual profundidade a água estará subindo com uma velocidade de* $\frac{1}{250\pi} m/min$?

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{1}{1000} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{1}{250\pi}$$
$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{4} m^3/m$$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Por semelhança de triângulo, temos:

$$\frac{4}{2} = \frac{h}{r} \Longrightarrow r = \frac{h}{2}$$
$$V(h) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h$$
$$V(h) = \frac{1}{12}\pi h^3$$
$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{4}\pi h^2$$

Então ...

$$\frac{1}{4}\pi h^2 = \frac{\pi}{4}$$
$$h^2 = 1$$
$$\therefore h = 1m$$

Logo, quando o nível da água estiver com $1m$ *de profundidade a água estará subindo a uma velocidade de* $\frac{1}{250\pi} m/min$.

$$\textbf{\textit{Questão 6}}$$

$b)$ *Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $y = \cos^{x}(x)$ *no ponto em que* $x = 0$.

Ponto de tangência: $(0,1)$.

$\ln y = \ln(\cos x)^{x}$
$\ln y = x.\ln(\cos x)$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\frac{y'}{y} = \ln(\cos x) - x.\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$y' = y[\ln(\cos x) - x.\operatorname{tg} x]$

$y'(0) = y(0)[\ln(\cos 0) - 0 \times 0]$
$y'(0) = 1[\ln 1 - 0]$
$y'(0) = 0.$

Equação da reta tangente no ponto $(0,1)$:

$$y - 1 = 0(x - 0)$$
$$y = 1$$

Questão 7

$a)$ *Defina* $f(0)$ *para que a função definida para* $x \neq 0$ *por* $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+k^3}-k}{x}$, k *constante, seja contínua em todos os reais.*

Domínio da função f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

f *é uma função racional e, portanto,* f *será dita contínua onde estiver definida. Isto é,* f *é contínua em seu domínio. Logo,* f *é contínua em* $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Para que f *seja contínua em* $\mathbb{R}$, f *deve ser contínua em* 0. *Então, pela definição de continuidade de uma função num número, devemos ter*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

Como $f(0)$ *não está definido, se existir* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *concluimos que a descontinuidade de* f *em* 0 *é dita removível e, portanto, podemos definir* $f(0)$ *de modo que* f *seja contínua em* 0 *e, com a análise anterior, contínua em* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+k^3}-k}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt[3]{x+k^3}-k}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+k^3)^2}+k\sqrt[3]{x+k^3}+k^2}{\sqrt[3]{(x+k^3)^2}+k\sqrt[3]{x+k^3}+k^2}\right] \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x+k^3-k^3}{x\left[\sqrt[3]{(x+k^3)^2}+k\sqrt[3]{x+k^3}+k^2\right]} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left[\sqrt[3]{(x+k^3)^2}+k\sqrt[3]{x+k^3}+k^2\right]} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+k^3)^2}+k\sqrt[3]{x+k^3}+k^2} \\
&= \frac{1}{k^2+k^2+k^2} \\
&= \frac{1}{3k^2}.
\end{aligned}$$

Definindo $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{3k^2}$, f *será dita contínua em* 0 *e, pelo seu domínio, contínua em* $\mathbb{R}$.

Questão 7

$b)$ *Sabendo que* $|f(x)+3| \leq \pi.(1+\operatorname{sen} x)^4$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *encontre* $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x)$.

Pela inequação modular, temos

$$-\pi.(1+\operatorname{sen} x)^4 \leq f(x)+3 \leq \pi.(1+\operatorname{sen} x)^4$$
$$-3-\pi.(1+\operatorname{sen} x)^4 \leq f(x) \leq \pi.(1+\operatorname{sen} x)^4 - 3$$

Considere $g(x) = -3-\pi.(1+\operatorname{sen} x)^4$, *e* $h(x) = \pi.(1+\operatorname{sen} x)^4 - 3$. *Então,*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} [-3-\pi.(1+\operatorname{sen} x)^4] = -3-\pi.\left(1+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^4 = -3-\pi.0^4 = -3.$$
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} h(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} [-3+\pi.(1+\operatorname{sen} x)^4] = -3+\pi.\left(1+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^4 = -3+\pi.0^4 = -3.$$

Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *quando* x *está próximo de* $-\pi/2$ *(exceto possivelmente em* $-\pi/2$*) e* $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} h(x) = 0$, *então, pelo Teorema do Confronto*

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = 0.$$

$Questão\ 8$

a) *Use o teste da segunda derivada (se possível) para determinar os pontos de máximo em de mínimo relativos da função* $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$, *no intervalo* $(-\pi, \pi)$.

f *é uma função contínua em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, contínua no intervalo fechado* $[-\pi, \pi]$.

$$f'(x) = 2\operatorname{sen} x \,.\cos x - \operatorname{sen} x$$
$$f'(x) = \operatorname{sen} x\,(2\cos x - 1) \qquad D(f') = \mathbb{R}$$

f *é derivável em* $\mathbb{R}$.

"Se f *possuir um máximo ou mínimo relativo em c e a derivada em c existir, então* $f'(c) = 0$." *(Teorema de Fermat)*

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \quad ou \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \therefore x = \left\{-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}\right\}$$

$f''(x) = \cos x\,(2\cos x - 1) + \operatorname{sen} x\,(-2\operatorname{sen} x)$
$f''(x) = 2\cos^2 x - \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x$
$f''(x) = 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - \cos x$
$f''(x) = 2\cos(2x) - \cos x$

Pelo Teste da Segunda Derivada, se c é um número crítico de f *e* $f''(c) > 0$, *então* $(c, f(c))$ *é um ponto de mínimo local e, se* $f''(c) < 0$, *então* $(c, f(c))$ *é um ponto de máximo local.*

$f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$
$f''(0) = 2\cos 0 - \cos 0 = 2 \times 1 - 1 = 1.$
$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$. *Ponto* $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\right)$.
$f(0) = \operatorname{sen}^2 0 + \cos 0 = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1$. *Ponto* $(0,1)$
$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$. *Ponto* $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\right)$.

Pelo Teste da Segunda Derivada, temos:

$\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\right)$ *e* $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\right)$ *são pontos de mínimo relativos e* $(0,1)$ *é um ponto de máximo relativo.*

Questão 8

b) *Use a definição para mostrar que a derivada de* $f(x) = \cos x$ *é igual a* $g(x) = -\operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \,.\, \cos \Delta x - \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} \Delta x - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x\,(\cos \Delta x - 1) - \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

$*$ *Suponhamos que o limite da diferença seja dado pela diferença entre os limites, desde que estes limites existam.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x\,(\cos \Delta x - 1) - \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x\,(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}.$$

$$\begin{aligned} * \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x\,(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\cos x\,(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} . \frac{(\cos \Delta x + 1)}{(\cos \Delta x + 1)}\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\cos x \,.\, \operatorname{sen}^2 \Delta x}{\Delta x . (\cos \Delta x + 1)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{-\cos x \,.\, \operatorname{sen} \Delta x}{\cos \Delta x + 1} . \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}\right] \\ &= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \,.\, \operatorname{sen} \Delta x}{\cos \Delta x + 1} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \\ &= -\left[\cos x \,.\, \frac{0}{1+1}\right] \times 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$* \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = \operatorname{sen} x \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = \operatorname{sen} x \times 1 = \operatorname{sen} x.$$

$*$ *Obs.*: *Limite Fundamental Trigonométrico* $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} = 1, k \neq 0.$

Logo,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x\,(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = 0 - \operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x = g(x)$$

$\textit{Questão 9}$

$a)$ *Prove que a equação* $\operatorname{arctg}(x) = 1 - x$ *tem pelo menos uma raíz real.*

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *com* $f(x) = \operatorname{arctg}(x) - 1 + x$. *Como* f é *definida pela diferença entre funções contínuas em* $\mathbb{R}$, *então* f é *contínua em* $\mathbb{R}$.

$f(0) = \operatorname{arctg} 0 - 1 + 0 = 0 - 1 = -1.$
$f(1) = \operatorname{arctg} 1 - 1 + 1 = \frac{\pi}{4}.$

Como f é *uma função contínua em* $\mathbb{R}$, *então* f é *contínua no intervalo fechado* $[0,1]$ *e* 0 é *um número entre* $f(0)$ *e* $f(1)$. *Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número* $c \in (0,1)$ *tal que* $f(c) = 0$. *Isto* é, *a função* f *tem pelo menos uma raíz real. Ou seja,*

$$f(c) = 0 \Longrightarrow \operatorname{arctg}(c) - 1 + c = 0$$
$$\operatorname{arctg}(c) = 1 - c$$

$\boldsymbol{Questão\ 9}$

$b)$ *Determine as equações das retas horizontais tangentes ao gráfico de* $f(x) = \sec(x^2 - 1)$.

Observaçao: *considere* $\sec(-1) = 1{,}85$, $e\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x) = 2x.\sec(x^2 - 1).\text{tg}(x^2 - 1)$$

Obs.: $Im[\sec(x^2 - 1)] = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Se a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ é *horizontal, então* $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ ou \\ \text{tg}(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \therefore x = \{-1{,}0{,}1\}$$

As equações das retas tangentes nos pontos de abscissa $x = \{-1{,}0{,}1\}$:

$y = \sec((-1)^2 - 1) = \sec(0) = 1.$ *Reta* $y = 1$

$y = \sec(0^2 - 1) = \sec(-1) = 1{,}85.$ *Reta* $y = 1{,}85$

$y = \sec(1^2 - 1) = \sec(0) = 1.$ *Reta* $y = 1$

Questão 10

$a)$ *Seja* $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right)$, *mostre que todas as retas tangentes ao gráfico de* $y = f(x)$ *são paralelas.*

Se todas as retas tangentes ao gráfico de f *são paralelas, então* f' *é constante para qualquer* $x \in D(f)$. *Ou seja,* $f'(x) = C$, *onde* C *é uma constante.*

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right)^2} \times \left[\frac{\sec^2 x\,.\,(1-\operatorname{tg} x) - (1+\operatorname{tg} x).\,(-\sec^2 x)}{(1-\operatorname{tg} x)^2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{(1-\operatorname{tg} x)^2}{(1-\operatorname{tg} x)^2 + (1+\operatorname{tg} x)^2} \times \left[\frac{\sec^2 x - \sec^2 x\,.\operatorname{tg} x + \sec^2 x + \sec^2 x\,.\operatorname{tg} x}{(1-\operatorname{tg} x)^2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{(1-\operatorname{tg} x)^2}{1 - 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + 1 + 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x} \times \frac{2\sec^2 x}{(1-\operatorname{tg} x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\sec^2 x}{2 + 2\operatorname{tg}^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\ ;\quad \textit{Identidade trigonométrica}: 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x.$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x}$$

$$f'(x) = 1$$

Logo, f' *é constante para todo* $x \in D(f)$ *e, portanto, todas as retas tangentes ao gráfico de* f *são paralelas.*

Questão 10

b) *Seja* $f(x) = \text{cotg}\, x - \frac{1}{2}\text{cossec}^2 x$, *com* $x \in (0, \pi)$. *Determine o valor máximo absoluto de* f.

$$f(x) = \frac{2\,\text{sen}\, x \,.\, \cos x - 1}{2\,\text{sen}^2 x}$$

Domínio da função f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Como f *não é contínua no intervalo fechado* $[0, \pi]$ *não podemos afirmar pelo Teorema do Valor Extremo que* f *possui algum valor extremo absoluto no intervalo aberto* $(0, \pi)$. *No entanto,*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2\,\text{sen}\, x \,.\, \cos x - 1}{2\,\text{sen}^2 x}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-}\left[\frac{2\,\text{sen}\, x \,.\, \cos x - 1}{2\,\text{sen}^2 x}\right] = -\infty$$

Com esses resultados, podemos concluir que f ***não possui valor mínimo absoluto*** *no intervalo* $(0, \pi)$.

$f'(x) = -\text{cossec}^2 x + \text{cossec}^2 x \,.\, \text{cotg}\, x$
$f'(x) = \text{cossec}^2 x \,.\, (\text{cotg}\, x - 1)$

$(0) + + + + + + + + + + + + + + + (\pi)$ $\quad \text{cossec}^2 x$
$(0) + + + + + (\pi/4) - - - - - - - - (\pi)$ $\quad (\text{cotg}\, x - 1)$
$(0) + + + + + (\pi/4) - - - - - - - - (\pi)$ $\quad f'(x)$

Pelo Teste da Primeira Derivada, em $x = \pi/4$ *temos um ponto de máximo relativo (ou local) de* f *no intervalo* $(0, \pi)$ *e, pelo estudo de crescimento e decrescimento de* f *no intervalo* $(0, \pi)$ *temos* f *é crescente em* $(0, \pi/4)$ *e* f *é decrescente em* $(\pi/4, \pi)$. *Portanto, podemos concluir que* $f(\pi/4) \geq f(x)$, $\forall x \in (0, \pi)$. *Logo,* $f(\pi/4)$ *é o valor máximo absoluto de* f *no intervalo* $(0, \pi)$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\text{cossec}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2}.\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{2} = 1 - 1 = 0.$$

Logo, 0 *é o valor máximo absoluto de* f *no intervalo* $(0, \pi)$.