Questão 1

a) No próximo capítulo estudaremos o conceito de função crescente (uma função é dita crescente num intervalo I se $f(x_1) < f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$ em I) e veremos que uma função é crescente num intervalo I se, e somente se, a derivada de f é positiva em qualquer ponto desse intervalo. Determine o(s) intervalo(s) no(s) qual(is) a função $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1000$ é crescente.

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Dado que f é uma função polinomial e, portanto, contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, então,

$$f'(x) = 3.x^{3-1} - \frac{3}{2}.2.x^{2-1} - 6.1.x^{1-1} + 0$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \quad D(f') = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 3(x^2 - x - 2)$$
$$f'(x) = 3(x+1)(x-2)$$

O estudo de sinal da função derivada é dado pelo estudo do sinal de uma função parabólica, com duas raízes reais distintas. Logo,

$- - - - - - (-1) + + + + + + + + + + + \quad 3(x+1)$
$- - - - - - - - - - - - - (2) + + + + + + \quad (x-2)$
$+ + + + + + (-1) - - - - (2) + + + + + + \quad f'(x) = 3(x+1)(x-2)$

Pelo estudo do sinal acima, e pela definição de função crescente dada inicialmente, concluímos que $f'(x) > 0$, se $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. Portanto f é crescente nos intervalos $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

b) Mostre que, para todo número real a, $a > 0$ e $a \neq 1$, a função $f(x) = a^{\frac{x^2+1}{x-1}}$ tem duas tangentes horizontais.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \neq 1\}$$

Seja $u = \frac{x^2+1}{x-1}$, então $y = f(u) = a^u$. Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{df}{du} = \frac{d}{du}[a^u] = a^u.\ln a$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x-1}\right] = \frac{2x.(x-1) - (x^2+1).1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Portanto,

$$f'(x) = a^u.\ln a\,.\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = a^{\frac{x^2+1}{x-1}}.\ln a\,.\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} \quad ; \quad D(f') = \{x \in \mathbb{R}\,; x \neq 1\}$$

Se f possui duas retas tangentes horizontais ao seu gráfico, então devem existir x_1 e x_2, ambos pertecentes ao domínio de f, tais que $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Isto é, o coeficiente angular da reta tangente, por ser horizontal, é nulo.

$* \, Obs.: \forall x \in D(f), a^{\frac{x^2+1}{x-1}}.\ln a \neq 0.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0\ ;\ x \neq 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4.1.(-1)$$
$$\Delta = 4 + 4$$
$$\Delta = 8$$
$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \end{matrix}$$

Portanto, existem pontos com abscissas x_1 e x_2, tais que $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ e, consequentemente, f possui duas retas tangentes horizontais.

Questão 2

a) *Determine os pontos nos quais a função* $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right|$ *é diferenciável.*

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}\,; x \neq -2\}$$

$- - - - - - - - - -(1) + + + + + + + \quad (x-1)$
$- - -(-2) + + + + + + + + + + + + \quad (x-2)$
$+ + +(-2) - - - -(1) + + + + + + + \quad \frac{x-1}{x-2}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+2}, & x < -2 \text{ ou } x \geq 1 \\ -\frac{x-1}{x+2}, & -2 < x < 1 \end{cases}$$

Como f é uma função definida por partes onde suas sentenças são funções racionais e, portanto, contínuas e diferenciáveis em seus domínios, então f é contínua e diferenciável em $(-\infty,-2) \cup (-2,1) \cup (1,\infty)$.

Analisando a continuidade e a diferenciabilidade de f em -2 e 1, temos:

Dizemos que uma função f é contínua no número a se, somente se,

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \begin{matrix} \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \\ e \\ \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \end{matrix}$$

$$f(1)=\frac{1-1}{1+2}=\frac{0}{3}=0.$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x+2}=\frac{\lim_{x\to1^+}(x-1)}{\lim_{x\to1^+}(x+2)}=\frac{1-1}{1+2}=\frac{0}{3}=0.$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=-\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{x+2}=-\frac{\lim_{x\to1^-}(x-1)}{\lim_{x\to1^-}(x+2)}=-\frac{1-1}{1+2}=-\frac{0}{3}=0.$$

Como $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)=f(1)$, *então* f *é contínua em* 1.

$$f'_+(1)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{1+h-1}{1+h+2}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{h}{h+3}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h+3}$$
$$=\frac{\lim_{h\to0^+}1}{\lim_{h\to0^+}(h+3)}=\frac{1}{3}.$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-\frac{1+h-1}{1+h+2}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0^-}\frac{-\frac{h}{h+3}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0^-}-\frac{1}{h+3}$$
$$=-\frac{\lim_{h\to0^-}1}{\lim_{h\to0^-}(h+3)}=-\frac{1}{3}.$$

Como as derivadas laterais em 1 *existe, porém são diferentes, então* f *não é diferenciável em* 1.

Como $-2\notin D(f)$, *então* f *é descontínua em* -2 *e, portanto,* f *não é diferenciável em* -2.

Portanto, concluimos que f *é contínua em* $(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$ *e* f *é diferenciável em* $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,\infty)$.

b) Determine as retas tangentes ao gráfico de $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ *que passam pelo ponto* $P(-4,0)$. $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,;\,x\neq-1\}$

Equação geral de uma reta que passa pelo ponto $P(-4,0)$:

$$y-0=m\big(x-(-4)\big)$$
$$y=m(x+4)$$

Se existe reta tangente ao gráfico de f que passa por P e é tangente à f no ponto $(x, f(x))$, então o coeficiente angular da reta tangente neste ponto é dado por $m = f'(x)$. Logo,

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x.(1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x + 2 - 2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Substituindo o ponto $(x, f(x))$ e $m = f'(x)$, temos:

$$y = m(x+4)$$

$$f(x) = f'(x).(x+4)$$

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{2}{(x+1)^2}.(x+4)\ ;\quad x \neq -1$$

$$x(x+1) = (x+4)$$

$$x^2 + x = x + 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x_1 = -2 \quad e \quad x_2 = 2$$

Logo, as retas tangentes ao gráfico de f nos pontos $A(x_1, f(x_1))$ e $B(x_2, f(x_2))$ passam pelo ponto $P(-4,0)$.

Pontos $A\ (-2,4)$ e $B\left(2, \frac{4}{3}\right)$.

Coeficiente angular das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos A e B:

No ponto A:

$$f'(-2) = \frac{2}{(-2+1)^2} = \frac{2}{(-1)^2} = \frac{2}{1} = 2.$$

Equação da reta tangente: $y = 2(x+4) \implies \boldsymbol{y = 2x + 8}$

No ponto B:

$$f'(2) = \frac{2}{(2+1)^2} = \frac{2}{(3)^2} = \frac{2}{9}.$$

Equação da reta tangente: $y = \frac{2}{9}(x+4) \implies \boldsymbol{y = \frac{2}{9}x + \frac{8}{9}}.$

Questão 3

a) Suponha que f seja injetora, derivável e que f^{-1} seja derivável. Mostre então que $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$

Se f é uma função invertível, isto é, possui função inversa f^{-1}, então

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$
$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

Por derivação implícita e regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right] = \frac{d}{dx}(x)$$
$$f'\left(f^{-1}(x)\right).(f^{-1})'(x) = 1$$
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

b) Seja $f(x) = x + e^x$. Use o item (a) para calcular $(f^{-1})'(1)$.

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)}$$

$$f^{-1}(1) = y$$
$$f\left(f^{-1}(1)\right) = f(y)$$
$$1 = f(y)$$
$$1 = y + e^y$$
$$\therefore y = 0.$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)}$$

$f'(x) = 1 + e^x$
$f'(0) = 1 + e^0$
$f'(0) = 1 + 1 = 2.$

$$\textit{Portanto,} \quad (f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$$

Questão 4

a) Determine o ponto no qual o gráfico da função $y = \operatorname{arcsec}(x)$ é interceptado pela reta $y = |f'(0)|$, onde $f(x) = \arccos(x + \operatorname{arctg} x)$.

$y = \operatorname{arcsec}(x)$; $D(y) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ *e* $Im(y) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Seja $u = x + \operatorname{arctg} x$ e $y = f(u) = \arccos(u)$. Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.\left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-(x+\operatorname{arctg} x)^2}}.\left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$f'(0) = \frac{df}{dx}\bigg|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{1-(0+\operatorname{arctg} 0)^2}}.\left(1+\frac{1}{1+0^2}\right)$$
$$f'(0) = -\frac{1}{\sqrt{1-0}}.(1+1)$$
$$f'(0) = -2.$$

A interseção da função $y = \operatorname{arcsec} x$ *com a reta* $y = |f'(0)| = 2$ *é o ponto*:

$$2 = \operatorname{arcsec} x$$
$$\sec(2) = \sec(\operatorname{arcsec} x)$$
$$\sec(2) = x$$

Ponto $P(\sec(2), 2)$.

b) *Encontre a derivada da função inversa da função* $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, *na qual* $y = \sec x$.

Seja a função inversa de f *dada por* $f^{-1}: (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, *onde* $y = f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x$, *então* $x = \sec(y)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$
$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\sec y)}$$
$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \frac{1}{\sec y . \operatorname{tg} y}$$

$*$ *Identidade trigonométrica*: $\operatorname{tg}^2 y + 1 = \sec^2 y \therefore \operatorname{tg} y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1}$.

Como $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, *então* $\operatorname{tg} y > 0$. *Logo*,

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \frac{1}{\sec y . \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

Como dito inicialmente ... se $y = f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x$, *então* $x = \sec(y)$. *Portanto*,

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Questão 5

a) *Encontre a derivada da função* $f(x) = 3^{\cos(x^2)} + \operatorname{sen}(2x+1) . \operatorname{tg}^2(2x)$

Seja $g(x) = 3^{\cos(x^2)}$, $h(x) = \operatorname{sen}(2x+1)$ *e* $i(x) = \operatorname{tg}^2(2x)$

$$f(x) = g(x) + h(x).i(x)$$

$$f'(x) = g'(x) + h'(x).i(x) + h(x).i'(x)$$

$g(x) = 3^{\cos(x^2)}$, *considere* $u = x^2, v = \cos u$ *e* $y = g(v) = 3^v$. *Então,*

$$g'(x) = \frac{dg}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$g'(x) = 3^v.\ln 3.(-\operatorname{sen} u).(2x)$$
$$g'(x) = -2x.3^{\cos(x^2)}.\operatorname{sen}(x^2)$$

$h(x) = \operatorname{sen}(2x+1)$, *considere* $u = 2x+1$ *e* $y = h(u) = \operatorname{sen} u$. *Então,*

$$h'(x) = \frac{dh}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$h'(x) = (\cos u).2$$
$$h'(x) = 2\cos(2x+1)$$

$i(x) = \operatorname{tg}^2(2x)$, *considere* $u = 2x, v = \operatorname{tg} u$ *e* $y = i(v) = v^2$. *Então,*

$$i'(x) = \frac{di}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$i'(x) = 2v.\sec^2 u.2$$
$$i'(x) = 4.\operatorname{tg}(2x).\sec^2(2x)$$

$$f'(x) = -2x.3^{\cos(x^2)}.\operatorname{sen}(x^2) + 2\cos(2x+1).\operatorname{tg}^2(2x) + 4.\operatorname{sen}(2x+1)\operatorname{tg}(2x).\sec^2(2x)$$

b) *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivável, com* $f(0) = 0, f'(0) = 1$ *e* $G(x) = \pi^{f(x)}$. *Calcule* $\lim_{x\to 0} \frac{G(x)-1}{x}$.

$$G(0) = \pi^{f(0)} = \pi^0 = 1.$$

Pela definição de derivada de uma função em um ponto, temos

$$G'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{G(x)-G(0)}{x-0}$$
$$G'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{G(x)-1}{x}.$$

Pela Regra da Cadeia, obtemos:

$$G'(x) = \pi^{f(x)}.\ln \pi.f'(x)$$
$$G'(0) = \pi^{f(0)}.\ln \pi.f'(0)$$
$$G'(0) = \pi^0.\ln \pi.1$$
$$G'(0) = \ln \pi.$$

Portanto, $\lim_{x\to 0} \frac{G(x)-1}{x} = G'(0) = \ln \pi$.