

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Centro de Tecnologia - CTEC

Apostila do Curso de Nivelamento das Engenharias 2020

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO A FUNÇÃO.....	4
1.1.Domínio,contra domínio e imagem.....	4
1.2.Tipos de função.....	6
1.2.1. Função sobrejetora ou sobrejetiva.....	6
1.2.2. Função injetora ou injetiva.....	7
1.2.3. Função bijetora ou bijetiva.....	8
2. FUNÇÃO CONSTANTE.....	8
3. FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR.....	10
3.1.Função par.....	10
3.2.Função ímpar	10
4. FUNÇÃO AFIM.....	11
4.1.Características das funções afins.....	12
5. FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	12
6. FUNÇÃO MODULAR E INEQUAÇÃO MODULAR.....	14
6.1.Função modular.....	14
6.2.Inequação modular.....	16
7. FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA.....	17
7.1.Função exponencial.....	17
7.1.1. Gráfico da função exponencial.....	17
7.1.2. Função exponencial natural.....	18
7.1.3. Inequações exponenciais.....	21
7.2.Função logarítmica.....	22
7.2.1. Logaritmo natural.....	23
7.2.2. Propriedades dos logaritmos.....	23
7.2.3. Função logarítmica.....	23
7.2.4. Gráfico da função logarítmica.....	23
7.2.5. Gráfico da função $y = \ln x $	25
8. FUNÇÃO INVERSA.....	28
9. PRODUTOS NOTÁVEIS, FATORAÇÃO E RACIONALIZAÇÃO.....	32
9.1.Produtos notáveis.....	32
9.2.Fatoração	32
9.3.Racionalização.....	34
10. TRIGONOMETRIA.....	35
10.1. Semelhança de triângulo.....	36
10.2. Triângulo retângulo.....	38
10.3. Relações trigonométricas no triângulo retângulo.....	40
10.4. Unidades de medida do ângulo no ciclo trigonométrico.....	41
10.5. Definição, periodicidade e gráficos de funções trigonométricas.....	43
10.6. Ângulos importantes.....	46
10.7. Identidades fundamentais.....	46
10.8. Lei dos senos.....	48
10.9. Lei dos cossenos.....	49

SUMÁRIO

10.10. Soma e subtração de arcos.....	50
10.11. Funções trigonométricas do arco duplo.....	50
10.12. Funções trigonométricas inversas.....	51
REFERÊNCIAS.....	61

1. Introdução a função

Uma **função** é uma aplicação entre conjuntos. As funções descrevem fenômenos numéricos e podem representar-se através de gráficos sobre eixos cartesianos. O gráfico de uma função permite ver, muito facilmente, toda a sua evolução. Porém, por vezes, pode ser mais cômodo trabalhar com a equação ou fórmula da função, já que com ela temos à nossa disposição o conjunto de operações que devemos aplicar à variável independente, normalmente representada por x , para obter a variável dependente, normalmente representada por y . Podemos imaginar que uma função é uma máquina em que introduzimos um número x do conjunto de partida, dela saindo o número $f(x)$.

Uma função é uma aplicação entre conjuntos numéricos. Para indicar que entre dois conjuntos A e B há uma função utilizaremos a notação:

$$f: A \longrightarrow B$$

Existem várias formas de expressar uma função:

$$y = ax + b$$

$$f(x) = ax + b$$

1.1.Domínio, contradomínio e imagem

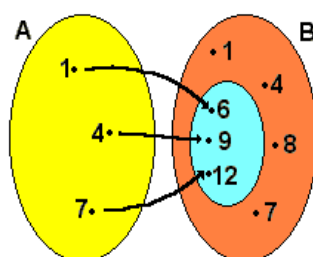
Para mostrar o que é a **imagem** e **domínio** de uma função, e também o **contradomínio**, vamos desenvolver um exemplo:

Com os conjuntos $A=\{1, 4, 7\}$ e $B=\{1, 4, 6, 7, 8, 9, 12\}$ criamos a função

$$f: A \rightarrow B$$

$f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = x + 5$ que também pode ser representada por $y = x + 5$. A representação, utilizando conjuntos, desta função, é:

Figura 1: Conjunto



Fonte 1: Tutor Brasil.

O conjunto A é o conjunto de saída e o B é o conjunto de chegada (ignore o conjunto azul por enquanto).

Domínio é um sinônimo para conjunto de saída, ou seja, para esta função o domínio é o próprio conjunto $A = \{1, 4, 7\}$.

Como, em uma função, o conjunto de saída (domínio) deve ter todos os seus elementos relacionados, não precisamos ter subdivisões para o domínio.

O domínio de uma função também é chamado de campo de definição ou campo de existência da função, e é representado pela letra “D”.

O conjunto de chegada “B”, também possui um sinônimo, é chamado de contradomínio.

Note que podemos fazer uma subdivisão dentro do contradomínio (conjunto azul da figura acima). Podemos ter elementos do contradomínio que não são relacionados com algum elemento do Domínio e outros que são. Por isso, devemos levar em consideração esta subdivisão (esta é até mais importante do que o próprio contradomínio).

Este subconjunto é chamado de conjunto imagem, e é composto por todos os elementos em que as flechas de relacionamento chegam.

O conjunto Imagem é representado por “Im”, e cada ponto que a flecha chega é chamado de imagem.

Exemplo 1:

Se f for uma função e $f(x) = y$, diremos que y é a **imagem** de x pela função e que x é o original, anti-imagem ou **objecto** de y pela função.

Em toda a função entre dois conjuntos $A \rightarrow B$ os elementos do conjunto A recebem o nome de **variável** da função.

Exemplificando, tomemos a função:

$$f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$$

$$f(x) = 5x + 2$$

$$f(2) = 5 * 2 + 2 = 12, 2 \in \mathbf{N}$$

diremos que 12 é a imagem de 2, e que 2 é o objeto ou anti imagem de 12.

Exemplo 2:

Dada a função $h: \{-3, 0, 3, 8\} \rightarrow \{-2, 0, 15, 18, 27, 40\}$ definida pela lei $h(x) = x^2 - 3x$. indique o domínio, contradomínio e imagem desta função.

Resolução:

Domínio é o conjunto de saída: $\{-3, 0, 3, 8\}$

Contradomínio é o conjunto de chegada: $\{-2, 0, 15, 18, 27, 40\}$

Agora devemos ver a imagem de cada um dos elementos do domínio.

Para $x=-3$ temos $y = (-3)^2 - 3 \cdot (-3) = 9 + 9 = 18$

Para $x=0$ temos $y = 0^2 - 3 \cdot 0 = 0$

Para $x=3$ temos $y = 3^2 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0$

Para $x=8$ temos $y = 8^2 - 3 \cdot 8 = 64 - 24 = 40$

Como encontramos todas as imagens, podemos agora formar o conjunto Imagem da função.

$Im = 0, 18, 40$

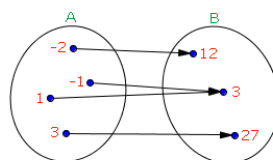
Ativar o Windows

1.2. Tipos de funções

1.2.1 Função Sobrejetora ou Sobrejetiva

Para entendermos o que é função Sobrejetora ou Sobrejetiva, vamos analisar o diagrama de flechas.

Figura 2: Conjunto



Fonte 2: Matemática didática

Como sabemos o conjunto **A** é o **domínio** da função e o conjunto **B** é o seu **contradomínio**.

É do nosso conhecimento que o **conjunto imagem** é o conjunto formado por todos os elementos do **contradomínio** que estão associados a pelo menos um elemento do **domínio** e neste nosso exemplo, todos os elementos de **B** estão associados a pelo menos um elemento de **A**, logo nesta função o **contradomínio** é igual ao **conjunto imagem**.

Classificamos como **sobrejetora** as funções que possuem o **contradomínio** igual ao **conjunto imagem**.

Note que em uma **função sobrejetora** não existem elementos no **contradomínio** que não estão **flechados** por algum elemento do **domínio**.

Exemplo 3:

Domínio: $D(f) = \{-2, -1, 1, 3\}$

Contradomínio: $CD(f) = \{12, 3, 27\}$

Conjunto Imagem: $Im(f) = \{12, 3, 27\}$

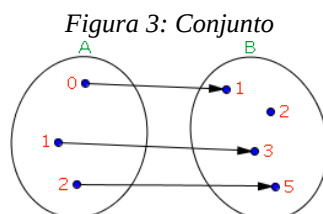
Esta função é definida por:

$$f: A \rightarrow B, f(x) = 3x^2$$

Substituindo a variável independente x , de $3x^2$, por qualquer elemento de A , iremos obter o elemento de B ao qual ele está associado, isto é, obtemos $f(x)$.

Do que será explicado a seguir, poderemos concluir que embora esta função seja **sobrejetora**, ela não é uma função **injetora**.

1.2.2 Função Injetora ou Injetiva



Fonte 3: Matemática didática

Vejamos agora este outro **diagrama de flechas**:

Podemos notar que nem todos os elementos de B estão associados aos elementos de A , isto é, nesta função o **conjunto imagem** difere do **contradomínio**, portanto esta não é uma **função sobrejetora**.

Além disto podemos notar que esta função tem uma outra característica distinta da função anterior. Veja que não há nenhum elemento em B que está associado a mais de um elemento de A , ou seja, não há em B qualquer elemento com mais de uma flechada. Em outras palavras não há mais de um elemento distinto de A com a mesma **imagem** em B .

Exemplo 4:

Domínio: $D(f) = \{0, 1, 2\}$

Contradomínio: $CD(f) = \{1, 2, 3, 5\}$

Conjunto Imagem: $Im(f) = \{1, 3, 5\}$

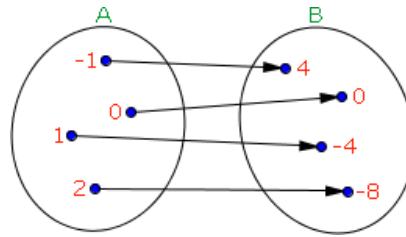
Definimos esta função por:

$$f: A \rightarrow B, f(x) = 2x + 1$$

Veja que não há no $D(f)$ qualquer elemento que substituindo x em $2x + 1$, nos permita obter o elemento 2 do $CD(f)$, isto é, o elemento 2 do $CD(f)$ não é elemento da $Im(f)$.

1.2.3 Função Bijetora ou Bijetiva

Figura 4: Conjunto



Fonte 4: Matemática didática

Na explicação do último tipo de função vamos analisar este outro **diagrama de flechas**:

Do explicado até aqui concluímos que este é o diagrama de uma **função sobrejetora**, pois não há elementos em **B** que não foram flechados.

Concluímos também que esta é uma **função injetora**, já que todos os elementos de **B** recebem uma única flechada.

Exemplo 5:

Domínio: $D(f) = \{-1, 0, 1, 2\}$

Contradomínio: $CD(f) = \{4, 0, -4, -8\}$

Conjunto Imagem: $Im(f) = \{4, 0, -4, -8\}$

Esta função é definida por:

$$f: A \rightarrow B, f(x) = -4x$$

Ao substituirmos x em $-4x$, por cada um dos elementos de **A**, iremos encontrar os respectivos elementos de **B**, sem que sobrem elementos em $CD(f)$ e sem que haja mais de um elemento do $D(f)$ com a mesma $Im(f)$.

Funções que como esta são tanto **sobrejetora**, quanto **injetora**, são classificadas como **funções bijetoras**.

2. Função Constante

A função constante diferencia-se das [funções do 1º grau](#) por não poder ser caracterizada como crescente ou decrescente, sendo, por isso, constante.

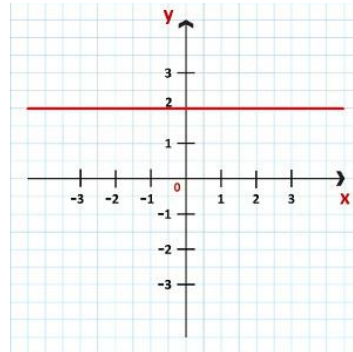
Logo, é uma função cujo o resultado não depende da variável. Ela tem a forma $F(x_1; \dots; x_n) = c$, onde c é um constante.

O gráfico da função constante também apresenta uma particularidade em relação às demais [funções](#). Ele é sempre uma reta paralela ou coincidente ao eixo x . Vejamos alguns exemplos de funções constantes e seus respectivos gráficos:

Exemplo 1: $f(x) = 2$

O gráfico da função $f(x) = 2$ é uma reta paralela ao eixo x que intercepta o eixo y no ponto $(0, 2)$.

Figura 5: Representação da função constante $f(x) = 2$.



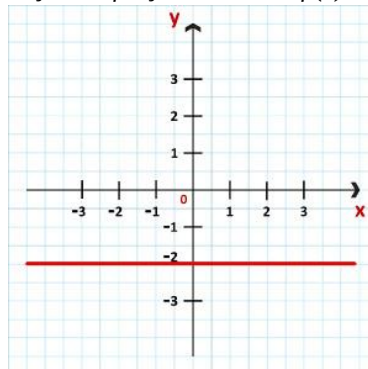
Fonte 5: Mundo Educação.

Exemplo 2: $f(x) = \frac{-2x-8}{x+4}$. Colocando o -2 em evidência no numerador da função, podemos simplificar a função da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{-2 \cdot (x+4)}{(x+4)} \rightarrow f(x) = -2$$

Portanto, $f(x)$ é uma função constante cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo x que intercepta o eixo y no ponto $(0, -2)$.

Figura 6: Representação da função constante $f(x) = (-2x - 8) / (x + 4)$.

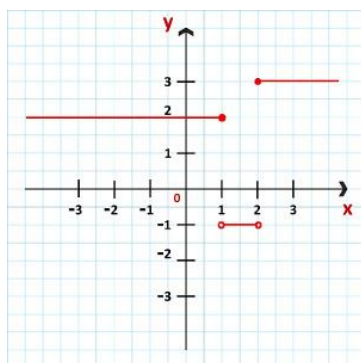


Fonte 6: Mundo Educação.

Exemplo 3: $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \leq 1 \\ -1, & \text{se } 1 < x < 2 \\ 3, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Apesar de o gráfico dessa função ser formado por retas paralelas ao eixo x , essa NÃO é uma função constante, pois $f(x)$ apresenta três valores distintos.

Figura 7: Representação de uma função NÃO constante.



Fonte 7: Mundo Educação.

3. Função Par e Função Ímpar

3.1. Função Par

A função real $y=f(x)$ é par, quando $\forall x \in D(f)$, $f(-x) = f(x)$, ou seja, para todo elemento do seu domínio, $f(x) = f(-x)$. Portanto, numa função par, elementos simétricos possuem a mesma imagem. Uma consequência desse fato é que todos os gráficos cartesianos das funções pares, são curvas simétricas em relação ao eixo dos y ou eixo das ordenadas.

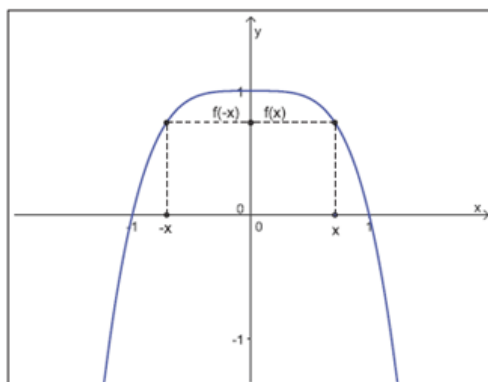
Exemplo:

$x \rightarrow f(x) = 1 - x^4$ é uma função par.

De fato: para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = f(x)$.

Note que a definição de função par pressupõe que o domínio D seja simétrico com relação a origem 0: se x pertence a D , então $-x$ também deve pertencer a D .

Figura 8: Representação da Função Par.



Fonte 8: Pré Cálculo.

3.2. Função Ímpar

A função real $y=f(x)$ é ímpar, quando $\forall x \in D(f)$, $f(-x) = -f(x)$, ou seja, para todo elemento do seu domínio, $f(-x) = -f(x)$. Portanto, numa função ímpar, elementos simétricos possuem imagens

simétricas. Uma consequência desse fato é que todos os gráficos cartesianos das funções ímpares, são curvas simétricas em relação ao ponto (0,0), origem do sistema de eixos cartesianos.

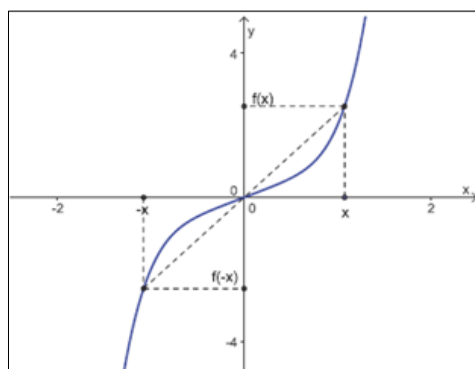
Exemplo:

$x \rightarrow f(x) = x^5 + x$ é uma função ímpar.

De fato: para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x)$.

Note que a definição de função ímpar pressupõe que o domínio D seja simétrico com relação a origem 0: se x pertence a D , então $-x$ também deve pertencer a D .

Figura 9: Representação da Função Ímpar.



Fonte 9: Pré Cálculo.

Observações:

- Existem funções que não são pares e nem ímpares:

$x \rightarrow f(x) = 2 - x^3$

De fato:

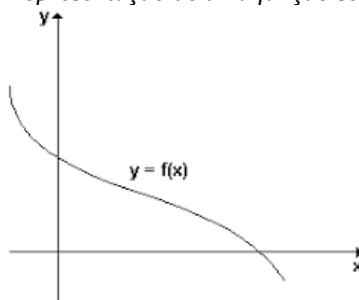
$f(-1) = 3 \neq 1 = f(1)$ e $f(-1) = 3 \neq -1 = -f(1)$.

Se uma função $y=f(x)$ não é par nem ímpar, diz-se que ela não possui paridade.

Exemplo:

O gráfico abaixo representa uma função que não possui paridade, pois a curva não é simétrica em relação ao eixo dos x e não é simétrica em relação à origem.

Figura 10: Representação de uma função sem paridade.



Fonte 10: Apostila Impacto Cursos.

4. Função Afim

Uma Função Afim ou função polinomial do 1º grau, é toda relação real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser escrita na forma:

$$f(x) = y = ax + b$$

Os números reais a e b são chamados de coeficientes da função:

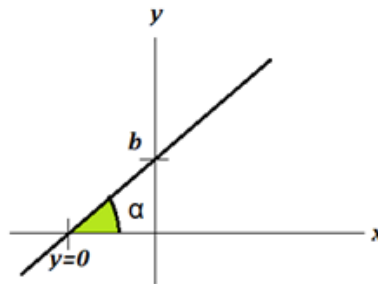
a - Coeficiente angular

b - Coeficiente Linear

Os conjuntos domínio e imagem da função real $f(x) = ax + b$ é o conjunto dos números reais:

$$D(f) = Im(f) = \mathbb{R}.$$

Figura 11: Representação da função afim.



Fonte 11: Infoescola.

Podemos determinar o valor de a pela tangente do ângulo α formado pela interseção do gráfico da função com o eixo x , ou seja:

$$\operatorname{tg} \alpha = a$$

Basicamente, o gráfico de uma função afim será sempre uma reta, o coeficiente a de x é também chamado de [coeficiente angular](#). Esse valor representa a inclinação da reta em relação ao eixo Ox . O termo constante b é chamado de coeficiente linear e representa o ponto onde a reta corta o eixo Oy . Pois sendo $x = 0$, temos:

$$y = a \cdot 0 + b \Rightarrow y = b$$

Quando uma função afim apresentar o coeficiente angular igual a zero ($a = 0$) a função será chamada de **constante**. Neste caso, o seu gráfico será uma reta paralela ao eixo Ox .

Ao passo que, quando $b = 0$ e $a = 1$ a função é chamada de **função identidade**. O gráfico da função $f(x) = x$ (função identidade) é uma reta que passa pela origem $(0,0)$.

Temos ainda que, quando o coeficiente linear é igual a zero ($b = 0$), a função afim é chamada de [função linear](#). Por exemplo as funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = -3x$ são funções lineares.

Os gráficos das funções lineares são retas inclinadas que passam pela origem $(0,0)$.

4.1. Característica das Funções Afim

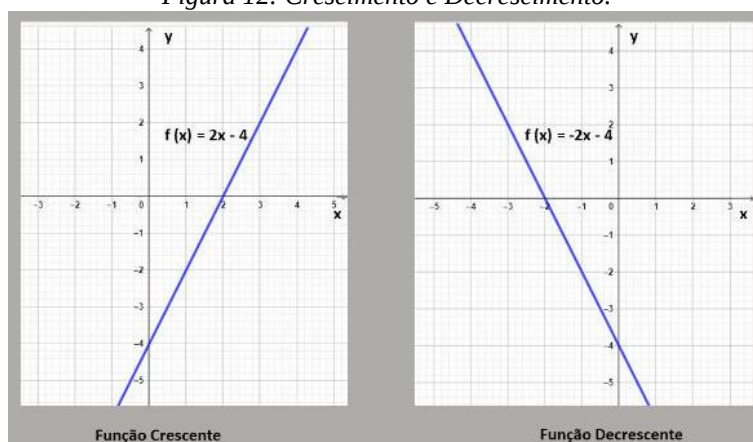
- Uma função é crescente quando ao atribuirmos valores cada vez maiores para x , o resultado da $f(x)$ será também cada vez maior.
- Uma função decrescente é aquela que ao atribuirmos valores cada vez maiores para x , o resultado da $f(x)$ será cada vez menor.

Para identificar se uma função afim é crescente ou decrescente, basta verificar o valor do seu coeficiente angular.

Se o coeficiente angular for positivo, ou seja, a é maior que zero, a função será crescente. Ao contrário, se a for negativo, a função será decrescente.

Por exemplo, a função $2x - 4$ é crescente, pois $a = 2$ (valor positivo). Entretanto, a função $-2x - 4$ é decrescente visto que $a = -2$ (negativo). Essas funções estão representadas nos gráficos abaixo:

Figura 12: Crescimento e Decrescimento.



Fonte 12: Toda Matéria.

5. Função Quadrática

A Função Quadrática ou função polinomial de 2º grau, é toda relação real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser escrita da forma:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

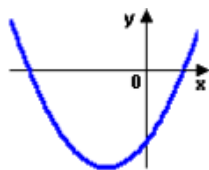
Com a , b e c números reais e $a \neq 0$.

Os conjuntos domínio e imagem da função real $f(x) = ax^2 + bx + c$ são, respectivamente, os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\{y \in \mathbb{R} / y \geq y_v = -\Delta / 4a\}$.

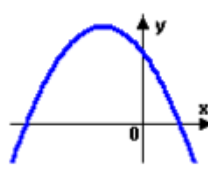
O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada **parábola** cuja concavidade (abertura) será voltada para cima se o coeficiente do termo x^2 for positivo e, para baixo se este mesmo coeficiente for um valor negativo.

Figura 13: Representação da função quadrática.

$a > 0$



$a < 0$



Fonte 13: Infoescola.

1º) Ponto em que o gráfico intersecta o eixo Oy:

Para isto, basta fazer $x = 0$ na função $f(x) = ax^2 + bx + c$ para obter

$$f(0) = y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow y = c.$$

Portando, este ponto tem coordenadas $(0, c)$.

2º) Raízes:

As raízes de uma função são os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Sendo assim, nos deparamos com a equação do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Para resolvê-la fazemos uso da expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando, denominado discriminante, a saber:

- Quando Δ é positivo, há duas raízes reais e diferentes;
- Quando Δ é zero, há só uma raiz real;
- Quando Δ é negativo, não há raiz real.

3º) Vértice:

O vértice da parábola é o ponto extremo dela, ponto em que a curva muda de sentido. É um ponto que fica exatamente entre as raízes x_1 e x_2 , quando estas existem. Logo, x_v é a média aritmética dessas raízes. Uma vez encontrado o valor de x_v , temos que $y_v = f(x_v)$.

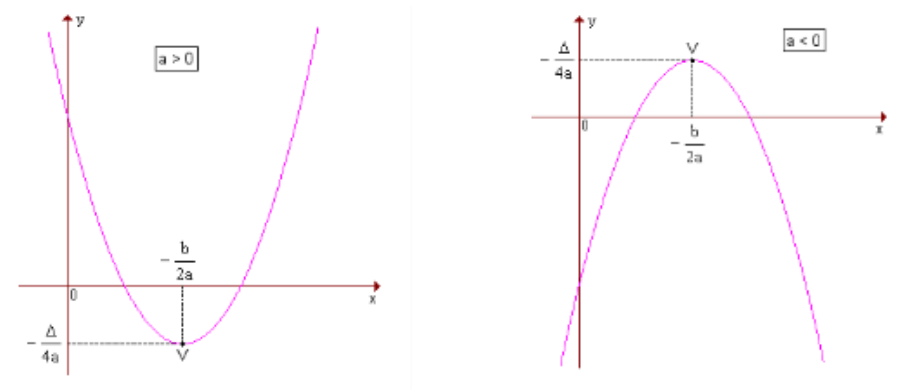
- Se $a > 0$, o vértice V é chamado de *ponto mínimo* da função quadrática e se $a < 0$, V é *ponto máximo* da função.

$$x_v = \frac{-b}{2a} \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

- O eixo de simetria da parábola é a reta vertical $x = x_v$.

A imagem da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ também fica bem determinada a partir da identificação do vértice da parábola. A saber:

Figura 14: Imagem da função



Fonte 14: Toda matéria.

6. Função modular e Inequação modular

6.1. Função modular

Antes de falar da função modular, vamos relembrar a definição e como calcular o módulo de um número. O módulo é a distância de um determinado número até o zero. Por exemplo, o módulo de 13 é a distância entre o 13 e o 0. Para nos deslocarmos do 13 ao 0, andaremos 13 unidades. Portanto, o módulo de 13 é igual a 13. Ou ainda: $|13| = 13$. Sendo assim, qual será o módulo de -13? Bem, a distância do -13 ao zero é também de 13 unidades. Então, $|-13| = 13$.

A função modular é uma função que apresenta o módulo na sua lei de formação. Para melhor entendimento definiu-se uma função modular abaixo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

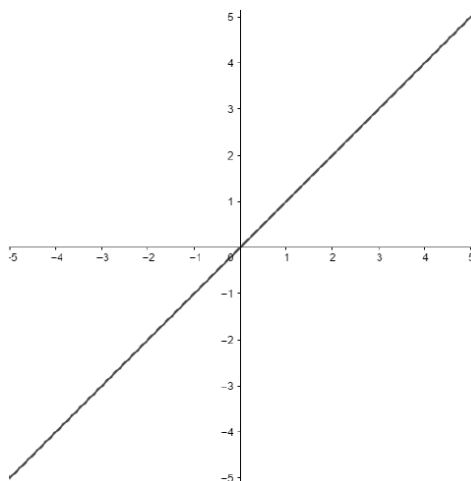
$$\text{Onde, } f(x) = |x|$$

A intenção do módulo é garantir que os valores de $f(x)$ sejam todos positivos independentemente do valor de x aplicado na função. Portanto, pode-se representar matematicamente assim:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

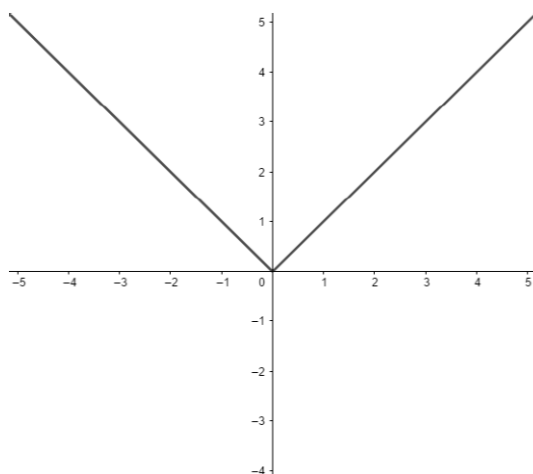
É importante também que se entenda a mudança que um módulo gera no gráfico das funções.

Figura 15: Representação gráfica da função $f(x)=x$



Fonte 15: Info Escola

Figura 16: Representação gráfica da função $f(x)=|x|$



Fonte 16: Info Escola

Para ajudar no entendimento vamos expor outro exemplo de funções com e sem módulo e seus respectivos gráficos.

Seja $g(x)=\sin(x)$ e $h(x)=|\sin(x)|$

Figura 17: Representação gráfica da função $g(x)=\sin(x)$



Fonte 17: Autor

Figura 18: Representação gráfica da função $h(x)=|\sin(x)|$



Fonte 18: Autor

Exercício Resolvido

1. (UNITAU) O domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{1-|x-1|}{2}}$ é:

Neste caso, por se tratar de uma função cujos termos se encontram dentro de uma raiz quadrada, o domínio é restrito aos números não negativos. Inicialmente deve-se utilizar desta informação para restringir os valores de x que se adequem a proposição anterior.

Portanto:

1º passo $1-|x-1| \geq 0$, com isso há a garantia que todos os valores serão positivos.

2º passo $-|x-1| \geq -1$, a intenção é descobrir os valores de x .

3º passo Descobrir onde haverá mudança de sinal na parte modular da função.

$$x-1 = 0 \rightarrow x=1$$

4º passo Para que o módulo “desapareça” deve-se fazer duas hipóteses:

Hipótese 1: $-(x-1) \geq -1$, para $x \geq 1$

Hipótese 2: $-[-(x-1)] \geq -1$, para $x < 1$

Pela hipótese 1, tem-se que $x \leq 2$ e para a hipótese 2, tem-se que $x \geq 0$. Portanto, deve-se encontrar um valor de x que satisfaça as duas hipóteses. Sendo assim, a intersecção entre elas é $0 \leq x \leq 2$.

6.2. Inequação Modular

Módulo é a distância de um número à 0 e inequação é a função baseada nos sinais de desigualdades: “<”, “>”, “≠”, “≤” e “≥”.

Inequação modular é uma expressão matemática que possui a propriedade de expressar desigualdades cuja incógnita aparece em módulo.

Para facilitar o entendimento observe o esquema abaixo:

Figura 19: Esquema geral de solução de inequações

Seja o número real $a > 0$,



Fonte 19: Ferretto

Exercício Resolvido

1. Resolva a inequação modular $|3x + 5| < 20$.

$$-20 < 3x + 5 < 20$$

$$-20 - 5 < 3x < 20 - 5$$

$$-25 < 3x < 15$$

$$-25 < x < 5$$

$$-25/3 < x < 5$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{25}{3} < x < 5 \right\}$

EXERCÍCIOS

- Esboce os gráficos das funções $f(x)=2x+6$ e $g(x)=|2x+6|$.
- Dada a função modular $f(x) = |2 - x| - 2$, escreva a função sem utilizar módulo nas sentenças.
- Resolva a inequação modular a seguir: $|2x + 1| > x + 5$
- (FGV – SP) Multiplicando os valores inteiros de x que satisfazem simultaneamente as desigualdades $|x - 2| \leq 3$ e $|3x - 2| > 5$ obtém-se que valor?
- Resolver em $\mathbb{R}$ as seguintes equações.
 - $|4x - 1| - |2x + 3| = 0$
 - $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$
 - $|x^2 - 3x| = 4$
 - $|x^2 - 8x + 13| = 1$
- Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações abaixo.
 - $|x^2 - 5x + 5| < 1$
 - $|x-1| - 3x + 7 \leq 0$

7. Função Exponencial e Função Logarítmica

Para iniciarmos o estudo da função exponencial, iremos fazer uma revisão sobre o assunto potenciação.

- Potenciação
- ❖ Potência com expoente natural

Dado um número real **a** e um número natural **n** diferente de zero, chama-se potência de base **a** e expoente **n** o número **a^n** que é igual ao produto de **n** fatores iguais a **a**.

a^n = a . a . a... a, onde:

a = base

n = expoente

- Propriedades

Dados a e b reais e m e n naturais, as seguintes propriedades são válidas:

- a) $a^m + a^n = a^{m+n}$
- b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, para a diferente de zero e $m > n$.
- c) $(ab)^n = a^n a^m$
- d) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, para $b \neq 0$
- e) $(a^n)^m = a^{mn}$

Observação: para expoentes iguais a zero, convencionou-se que $a^0 = 1$, com a diferente de zero.

- ❖ Potência com expoente inteiro negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ com } a \neq 0.$$

- ❖ Potência com expoente racional fracionário

$$\frac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ com } a \text{ real positivo e } n = 2, 3, 4, \dots$$

7.1 Função exponencial

Chamamos de funções exponenciais aquelas nas quais temos a variável aparecendo em expoente. Dado um número real **a** ($a > 0$ e $a \neq 1$) denomina-se função exponencial de base a, toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$. O domínio dessa função é o conjunto $\mathbb{R}$ (reais) e o contradomínio é $\mathbb{R}^+$ (reais positivos, maiores que zero).

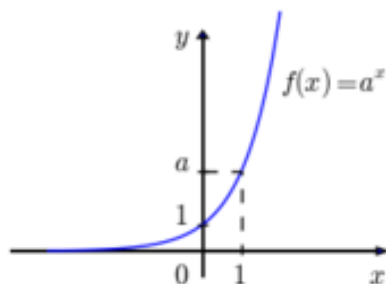
Exemplos:

$$\text{a) } f(x) = 2^x \quad \text{b) } Y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{c) } f(x) = (1 + x)^{1/x}$$

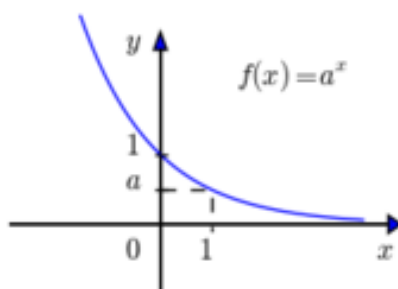
7.1.1 Gráficos da função exponencial

O gráfico da função exponencial é uma curva, na qual devemos considerar dois casos:

- Esse gráfico representa uma função exponencial crescente onde $a > 1$.



- Esse gráfico representa uma função exponencial decrescente onde $0 < a < 1$.



Os dois tipos de gráficos possuem características semelhantes:

- O gráfico (curva) de uma função exponencial nunca irá interceptar o eixo x, pois esta função não possui raiz.
- O gráfico (curva) irá cortar apenas o eixo y e sempre será no ponto 1, sendo que os valores de y sempre serão positivos.
- O domínio natural de cada função exponencial é $(-\infty, +\infty)$ e a imagem de $f(x) = a^x$ é $(0, +\infty)$, admitindo por suposição que o gráfico de $y = a^x$ seja uma curva sem quebras, lacunas ou buracos.

7.1.2 Função exponencial natural

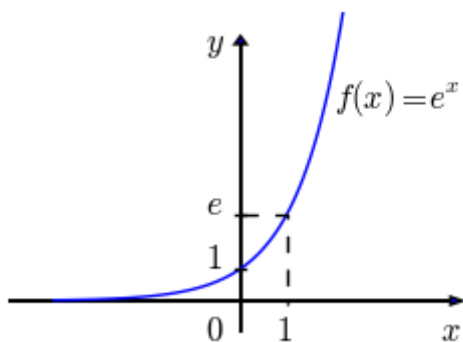
A função exponencial natural (e^x) é utilizada para modelagem de fenômenos naturais, físicos e econômicos. Sua base é número e, que é 2,718281828 para nove casas decimais.

A função exponencial mais simples é a função $y=f(x)=e^x$. Cada ponto do gráfico é da forma pois a ordenada é sempre o resultado de e^x , ou seja, a exponencial de base e do número x.

O domínio da função $y = e^x$ é $R =]-\infty, +\infty[$ e a imagem é o conjunto $R_+^* =]0, +\infty[$

Gráfico da função exponencial natural é uma curva de inclinação positiva e crescente.

Gráfico da função exponencial natural



Exemplos para fixação:

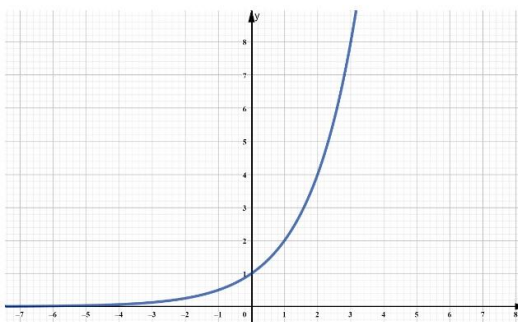
- 1) Construa o gráfico da função, $y = 2^x$.

Como a base é maior que 1, logo será uma função crescente.

Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de y , obtemos a tabela e o gráfico abaixo:

x	$y = 2^x$
-3	$y = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
-2	$y = 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
-1	$y = 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
0	$y = 2^0 = 1$
1	$y = 2^1 = 2$
2	$y = 2^2 = 4$
3	$y = 2^3 = 8$

Observando a tabela, notamos que quando aumentamos o valor de x , a sua imagem também aumenta. Desta forma, constatamos que a função $y = 2^x$ é uma função crescente. Abaixo, representamos o gráfico desta função.

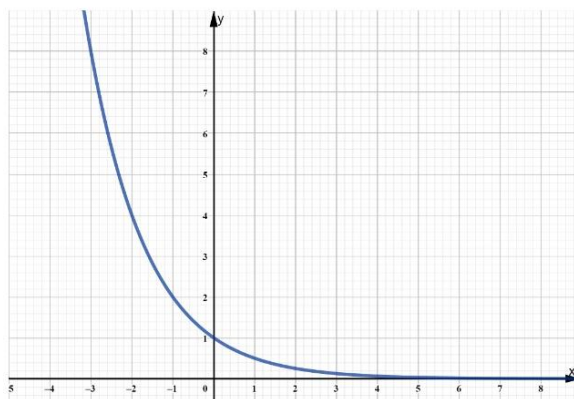


- 2) Construa o gráfico da função, $f(x) = (1/2)^x$

Como a base é menor que 1, logo será uma função decrescente.
Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de y , obtemos a tabela e o gráfico abaixo:

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$
-2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$
-1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$
0	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)$
2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)$
3	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)$

Observando a tabela, notamos que quando aumentamos o valor de x , a sua imagem diminui. Desta forma, constatamos que a função $f(x) = (1/2)^x$ é uma função decrescente. Abaixo, representamos o gráfico desta função.



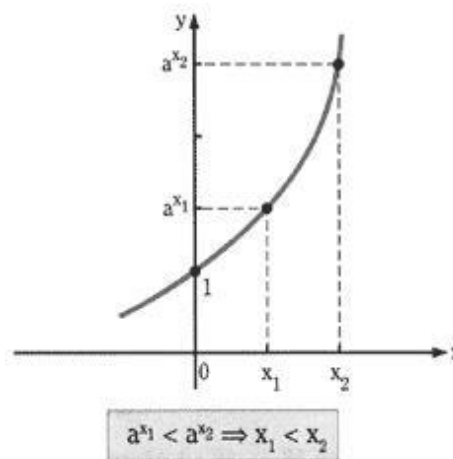
Nos dois exemplos, podemos observar que:

- O gráfico nunca intercepta o eixo horizontal; a função não tem raízes;
- O gráfico corta o eixo vertical no ponto (0,1);
- Os valores de y são sempre positivos (potência de base positiva é positiva), portanto o conjunto imagem é $\text{Im} = \mathbb{R}^+$.

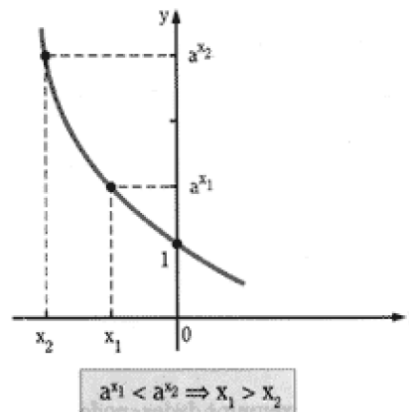
7.1.3 Inequações exponenciais

É toda desigualdade onde a variável figura no expoente. Na resolução da inequação exponencial, devemos considerar 2 casos

1.º caso – Se $a > 1$, o sentido da desigualdade é conservada.



2.º caso – Se $0 < a < 1$, o sentido da desigualdade se inverte.



Exemplos para fixação

1) $2^x \geq 128$

Por fatoração, $128 = 2^7$. Portanto:

$2^x \geq 2^7 \rightarrow$ como as bases são iguais e $a > 1$, basta formar uma inequação com os expoentes.

Logo, $x \geq 7$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$

Neste exemplo as bases são iguais. Mas, é necessário observar que $0 < a < 1$.

Diante dessa condição, inverte-se o sinal.

$x > 2$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

7.2 Função Logarítmica

Para iniciarmos o estudo da função logarítmica, iremos fazer uma revisão sobre o assunto logaritmos.

- Logaritmos

Sejam a e b dois números reais. O logaritmo de a na base b é o expoente a que b deve ser elevado para que o resultado seja a . Em símbolos:

$$\log_b a = x \leftrightarrow b^x = a$$

Dizemos que b é a base e a é o logaritmando.

É importante, contudo, definir algumas restrições à base e ao logaritmando:

- i) A base deve ser positiva. Determinar, por exemplo, o logaritmo de 2 na base -10 é impossível no universo dos números reais, já que apenas as potências de expoentes inteiros estão definidas para bases negativas.
- ii) A base deve ser diferente de um. Como 1 elevado a qualquer número dá 1, o único logaritmando possível (com base 1) seria 1.
- iii) O logaritmando deve ser positivo. Nenhum número real positivo tem potências negativas.

Consequências:

- O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

- O logaritmo da base, qualquer que seja ela é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

- A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b .

$$a^{\log_a b} = b$$

Pois o logaritmo de b na base a é justamente o expoente que se deve dar à base a para que a potência fique igual a b .

- Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmando também são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$$

7.2.1 Logaritmo natural

O logaritmo mais importante nas aplicações é o de base e , que é chamado logaritmo natural, já que a função é a inversa da função exponencial natural e^x . É comum denotar o logaritmo natural de x por $\ln x$ (Ex.: $\log_e 2 = \ln 2$). Assim:

$$\ln 1 = 0 ; \ln e = 1 ; \ln 1/e = -1 ; \ln(e^2) = 2 ; \ln(e^x) = x \text{ ou } e^{\ln x} = x$$

7.2.2 Propriedades dos logaritmos

- 1) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- 2) $\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$
- 3) $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$

7.2.3 Função logarítmica

Dado um número real a (com $0 < a \neq 1$), chama-se função logarítmica de base a a função dada pela lei:

$$f(x) = \log_a x$$

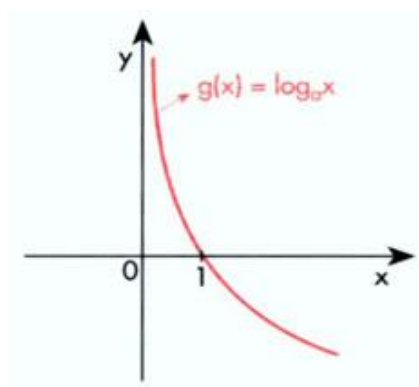
Exemplos: $y = \log_2 x$, $y = \log_{10} x$, $y = \ln x$ e $f(x) = \log_e x$.

Nesse tipo de função o domínio é representado pelo conjunto dos números reais maiores que zero ($\mathbb{R}_+^*$) e o contradomínio, o conjunto dos reais ($\mathbb{R}$).

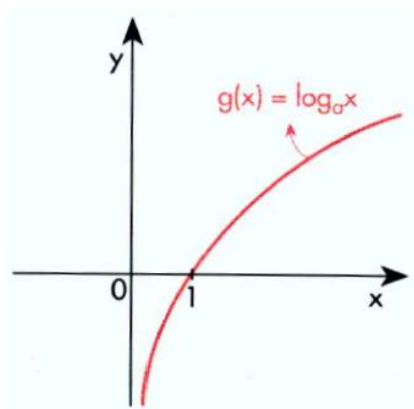
7.2.4 Gráficos da função logarítmica

O gráfico da função exponencial é uma curva, na qual devemos considerar dois casos:

Esse gráfico representa uma função exponencial decrescente onde $0 < a < 1$. Cujas características são: Domínio = $\mathbb{R}_+$, contradomínio = $\mathbb{R}$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, a função é estritamente decrescente e $x = 0$ é assíntota vertical.



Esse gráfico representa uma função exponencial crescente onde $a > 1$. Cujas características são: Domínio = $\mathbb{R}_+$, contradomínio = $\mathbb{R}$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, a função é estritamente crescente, $x = 0$ é assíntota vertical.



Exemplos para fixação

- 1) Estabeleça o domínio da função $y = \log_3(x - \frac{1}{2})$

Para a função $y = \log_3(x - \frac{1}{2})$, temos apenas uma restrição:

$$x - \frac{1}{2} > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2}$$

Então, o domínio da função logarítmica é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\}$.

- 2) PUC/SP – 2018: As funções $f(x) = \frac{3}{2} + \log_{10}(x - 1)$ e $g(x) = k \cdot 2^{(-x+1)}$, com k um número real, se intersectam no ponto $p = (2, \frac{3}{2})$. O valor de $g(f(11))$ é:

Como as funções $f(x)$ e $g(x)$ se interceptam no ponto $(2, \frac{3}{2})$, então para encontrar o valor da constante k , podemos substituir esses valores na função $g(x)$. Assim, temos:

$$g(2) = k \cdot 2^{(-2+1)} = \frac{3}{2}$$

$$k \cdot 2^{-1} = \frac{3}{2}$$

$$k \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$k = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

Agora, vamos encontrar o valor da $f(11)$, para isso iremos substituir o valor da x na função:

$$f(11) = \frac{3}{2} + \log_{10}(x - 1)$$

$$f(11) = \frac{3}{2} + \log_{10}(11 - 1)$$

$$f(11) = \frac{3}{2} + \log_{10}10$$

$$f(11) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

Para encontrar o valor da função composta $g(f(11))$, basta substituir o valor encontrado da $f(11)$ no x da função $g(x)$. Assim, temos:

$$g(f(11)) = 3.2^{(-\frac{5}{2} + 1)}$$

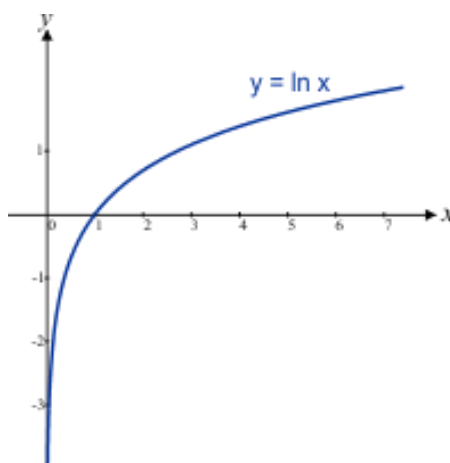
$$g(f(11)) = 3.2^{(-\frac{3}{2})}$$

$$g(f(11)) = \frac{3}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{2^3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

7.2.5 Função Logarítmica Natural

Função logaritmo natural mais simples é a função $y=f_0(x)=\ln x$. Cada ponto do gráfico é da forma $(x, \ln x)$ pois a ordenada é sempre igual ao logaritmo natural da abscissa. O domínio da função $\ln$ é $R_+^* =] 0, +\infty [$ e a imagem é o conjunto $R =] -\infty, +\infty [$. O eixo vertical é uma assíntota ao gráfico da função.

7.2.6 Gráfico da função $y=\ln x$



EXERCÍCIOS

(Função exponencial e Função Logarítmica)

1º) (Mack – SP) Dadas as funções $f(x) = 2^{x^2-4}$ e $g(x) = 4^{x^2-2x}$, se x satisfaz $f(x) = g(x)$, então 2^x é:

- a) $\frac{1}{4}$
- b) 1
- c) 8
- d) 4
- e) $\frac{1}{2}$

2º) (Ueg) A bula de certo medicamento informa que, a cada seis horas após sua ingestão, metade dele é absorvida pelo organismo. Se uma pessoa tomar 200 mg desse medicamento, quanto ainda restará a ser absorvido pelo organismo imediatamente após 18 horas de sua ingestão? E após t horas?

3º) Considerando que $f(x) = 49^x$, determine o valor de $f(1,5)$.

4º) (UNIT-SE). Uma determinada máquina industrial se deprecia de tal forma que seu valor, t anos após a sua compra, é dado pela lei abaixo, onde k é uma constante real. Se, após 10 anos, a máquina estiver valendo R\$ 12 000,00, determine o valor que ela foi comprada.

$$v(t) = k \cdot 2^{-0,2t}$$

a) 48000

b) 48500

c) 64000

d) 45900

e) 84000

5º) (UESPI 2007) Um botânico, após registrar o crescimento diário de uma planta, verificou que o mesmo se dava de acordo com a função abaixo, com t representando o número de dias contados a partir do primeiro registro e $f(t)$ a altura (em cm) da planta no dia t . Nessas condições, é correto afirmar que o tempo necessário para que essa planta atinja a altura de 88,18 centímetros é:

$$f(t) = 0,7 + 0,04 \cdot 3^{0,14t}$$

a) 30 dias.

b) 40 dias.

c) 46 dias.

d) 50 dias.

e) 55 dias.

6º) esboce o gráfico de $y=g(x)=2^x$ e de $y=h(x)=3^x$ comparando-os com o gráfico de $y=e^x$

7º) Construa o gráfico, determine o conjunto imagem e classifique em crescente ou decrescente as funções:

A) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

B) $f(x) = 4^x$

C) $f(x) = (\frac{1}{4})^x$

8º) Estabeleça o domínio das funções a seguir:

a) $y = \log_3(x - \frac{1}{2})$

b) $y = \log_{(x-1)}(-3x + 9)$

c) $y = \log_{(x+2)}(x^2 - 4)$

9º) O anúncio de certo produto aparece diariamente num certo horário na televisão. Após t dias do início da exposição (t exposições diárias), o número de pessoas (y) que ficam conhecendo o produto é dado por $y = 3 - 3 \cdot (0,95)^t$, em que y é dado em milhões de pessoas.

a) Para que valores de t teremos pelo menos 1,2 milhões de pessoas conhecendo o produto?

b) Faça o gráfico de y em função de t .

10º) Se $\log_3 x + \log_9 x = 1$, então o valor de x é

a) $\sqrt[3]{2}$.

b) $\sqrt{2}$.

c) $\sqrt[3]{3}$.

d) $\sqrt{3}$.

e) $\sqrt[3]{9}$.

11º) (UFRGS – 2017) Se $\log_5 x = 2$ e $\log_{10} y = 4$, então $\log_{20} y/x$ é

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

12º) Calcule o valor de a :

a) $\log a 81 = 4$

b) $\log a 4 = -2$

c) $\log a 1/3 = -1$

d) $\log a 8 = 3$

8. Função inversa

Antes de apresentarmos o conceito de **funções inversas** é necessário entendermos a definição formal de imagem direta e imagem inversa.

Considere uma função dada por $f: E \rightarrow F$ onde o conjunto E é o domínio da função e F o contradomínio:

Imagem Direta: Seja um conjunto A tal que $A \subset E$, chamamos de imagem direta de A segundo f , a função indicada por $f(A)$ o seguinte subconjunto de F :

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

Em outras palavras, $f(A)$ é o conjunto das imagens de f dos elementos de A .

Imagem Inversa: é chamado imagem inversa de um conjunto B tal que $B \subset F$, segundo a função f o seguinte subconjunto de E :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$$

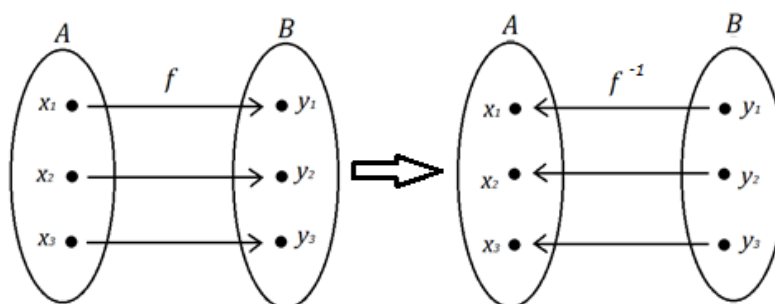
Dizemos então que $f^{-1}(B)$ é o conjunto dos elementos de E que tem imagem em B .

Seguindo então pela definição de imagem inversa enunciaremos o conceito de função inversa. Seja uma função definida como $f: E \rightarrow F$. Dizemos que a função f admite uma inversa $f^{-1}: F \rightarrow E$, se, e somente se, as composições abaixo forem verdadeiras, onde Id é a chamada Função Identidade. Desta forma:

$f \circ f^{-1} = Id_F$ – Quando inversa à direita

$f^{-1} \circ f = Id_E$ – Quando inversa à esquerda

Uma função só admite inversa à esquerda, se, e somente se, a função for Injetora, e à direita se a função for sobrejetora. Em outras palavras, quando uma função admite uma inversa, o domínio da função f será o contradomínio da função f^{-1} .



Vale lembrar que nem todas as funções admitem uma inversa, ou seja, nem todas as funções são invertíveis mesmo que o seu domínio seja um conjunto não vazio. Quando isto ocorre, dizemos que:

$$f^{-1}(x) = \emptyset$$

- **Obtendo a inversa de funções reais**

Se tratamos de uma função definida nos reais, tal que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função bijetora onde $y = f(x)$, então para obtermos a sua inversa podemos reescrever a função da forma $x = g(y)$ tal que x dependa de y . Com isso temos que esta nova função $g(y) = f^{-1}$.

- **Gráfico de funções inversas**

O gráfico de uma função inversa f^{-1} possui uma simetria em relação a função f . Vejamos abaixo um exemplo onde podemos notar que há uma simetria com a reta $y=x$ entre uma função f e f^{-1} e que os pontos correspondentes ao eixo de simetria $y=x$ de ambas as funções são equidistantes:

Exemplo 1. Sejam a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = 2x+1$. Para obtermos a sua inversa devemos encontrar uma função que satisfaça a condição $x=g(y)$. Algebricamente podemos trocar a variável x pela variável y na função original, da seguinte maneira:

$$y = 2x+1$$

$$x = 2y+1$$

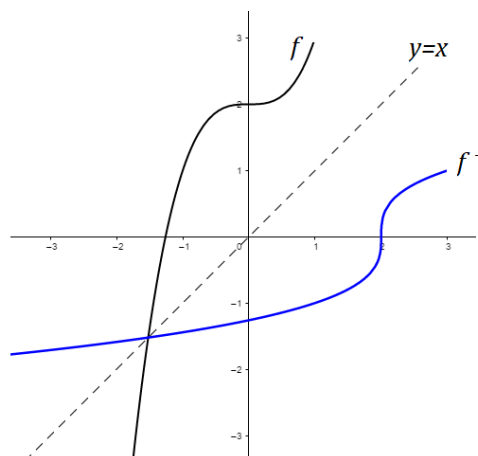
Agora, isolando y nesta nova expressão obteremos uma função $x=g(y)$. Sendo assim:

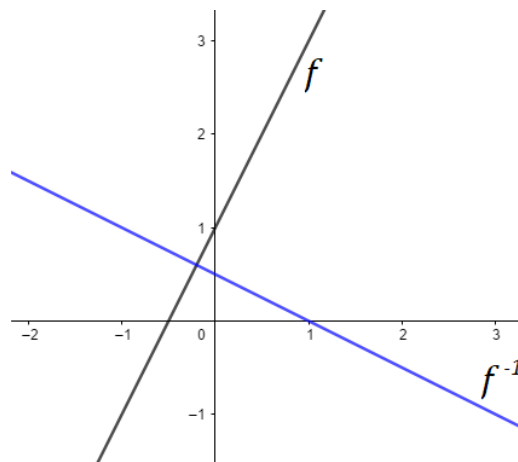
$$x = 2y+1$$

$$2y = 1-x$$

$$y = \frac{1-x}{2} = f^{-1}(x)$$

Com isso temos a função inversa. Note agora a comparação dos gráficos de f e f^{-1} . Percebemos que existe uma simetria entre as duas retas:





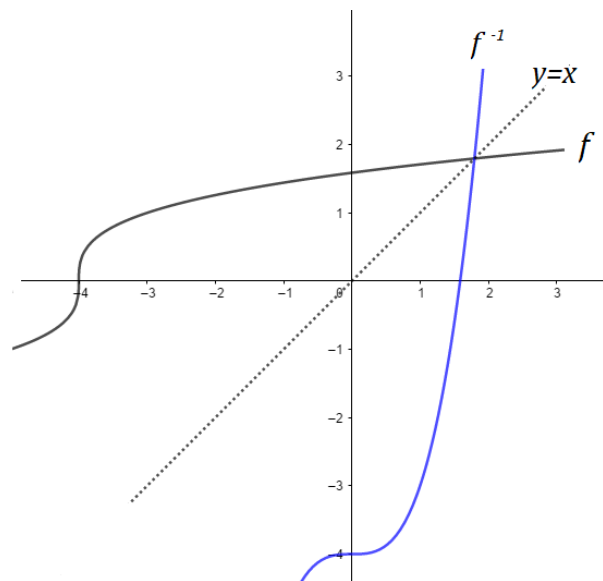
Exemplo 2. Agora, seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$. Vamos obter a sua inversa:

$$y = \sqrt[3]{x+4}$$

$$y^3 = x + 4$$

$$x^3 = y + 4$$

$$y = x^3 - 4 = f^{-1}(x)$$



Exercícios

1. (UFBA) Sobre funções reais, é verdade que:

(01) O domínio de $f(x) = 7x/(x+2)$ é $\mathbb{R}$.

(02) $f(x) = 3x^2 + 4x$ é uma função par.

(04) $f(x) = (3x+2)/2x$ é a função inversa de $g(x)=2/(2x3)$.

(08) Sendo $f(x) = 2x+4$, então $f(x)>0$, para todo $x>0$.

(16) Sendo $f(x) = 4x^2-7x$, então $f(-1) = 11$.

Soma ()

2. (UFSM) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = mx + p$. Se f passa pelos pontos A (0,4) e B (3,0), então f^{-1} passa pelo ponto

a) (8, -2)

b) (8, 3)

c) (8, -3)

d) (8, 2)

e) (8, 1)

3. (UFSC) Sejam as funções $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$ definida para todo x real e $x \neq 1$ e $g(x)=2x+3$ definida para todo x real. Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S).

01. $f(1/x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

02. O valor de $g(f(2))$ é igual a $4/3$.

04. O domínio da função $f \circ g$ (f composta com g) é $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

08. A função inversa da g é definida por $g^{-1}(x)=(x-3)/2$.

16. A reta que representa a função g intercepta o eixo das abscissas em $(-3/2, 0)$.

32. A função f assume valores estritamente positivos para $x < -1$ ou $x > 1$.

4. (UEL) Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ a função definida por $f(x) = 2^x$, então a expressão que define a função inversa de f é:

a) x^2

b) $\frac{2}{x}$

c) $\log_2(x)$

d) $\sqrt{x}$

e) 2^{-x}

5. (UFV) Seja f a função real tal que $f(2x - 9) = x$ para todo x real.

A igualdade $f(c) = f_{-1}(c)$ se verifica para c igual a:

a) 9

b) 1

c) 5

d) 3

e) 7

9. Produtos Notáveis, Fatoração e Racionalização.

9.1 Produtos Notáveis

Quadrado da soma entre dois termos pode ser obtida por “quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro pelo segundo, somado com o quadrado do segundo”. A Equação 1 mostra isso:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (1)$$

Quadrado da diferença entre dois termos pode ser obtida por “quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro pelo segundo, menos o quadrado do segundo”, como mostrado na Equação 2.

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad (2)$$

Produto da soma pela diferença entre dois termos: é obtido a partir da diferença entre o quadrado do primeiro termo e o quadrado do segundo – Equação 3.

$$(x + 1)(x - 1) = x^2 - y^2 \quad (3)$$

Cubo da soma de dois termos: cubo do primeiro somado com três vezes o produto do quadrado do primeiro pelo segundo somado com três vezes o produto do primeiro pelo quadrado do segundo, somado com o cubo do segundo – Equação 4. Sendo o cubo da diferença de dois termos análoga ao primeiro caso, sendo expressa pela Equação 5.

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3 \quad (4)$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3y^2x - y^3 \quad (5)$$

9.2 Fatoração

Fatorar um número vem da descrição dele a partir do produto de dois ou mais números. Quando há fator comum em todos os termos, pode-se colocá-lo em evidência. A forma fatorada é o produto do fator comum pelo polinômio dado pelo fator comum. Isso tem o objetivo de descrever uma expressão de maneira mais simples.

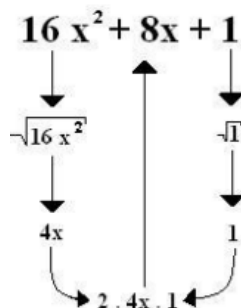
Trinômio quadrado perfeito: O polinômio $x^2 + 2xy + y^2$ é um trinômio quadrado perfeito. É um trinômio porque possui três monômios e é quadrado perfeito porque é o quadrado de $(x +$

y). Os polinômios que são usuais e que são provavelmente os mais fáceis de se fatorar se dão a seguir:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \quad (6)$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \quad (7)$$

Figura 2: Triângulo retângulo



Fonte: Antônio José Bendo Bottin e Paulo Henrique Cruz Pereira.

Porém, há casos em que não se pode fazer a fatoração direta, como na equação 8. Com isso, deve-se utilizar a técnica de completar quadrados. No caso da Equação 8, não é possível utilizar a técnica anterior. Com isso, deve-se manipular a equação para que se torne um trinômio perfeito.

$$16x^2 + 8x + 3 = 0 \quad (8)$$

Somando e subtraindo 2 da equação tem-se:

$$16x^2 + 8x + 3 - 2 + 2 = 0$$

$$16x^2 + 8x + 1 + 2 = 0$$

Utilizando método descrito na Figura 1, temos que a equação fica:

$$(4x + 1)^2 + 2$$

Trinômio do segundo grau: Sendo x_1 e x_2 são raízes reais do trinômio $ax^2 + bx + c$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$$\text{Soma de dois cubos: } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

$$\text{Diferença de dois cubos: } x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Fatoração por agrupamento: Agrupamento é o método pelo qual simplificamos uma expressão algébrica, agrupando os termos semelhantes (termos em comum). Ao usarmos o método do agrupamento, necessitamos fazer uso da fatoração: termo comum em evidência.

Observe no exemplo a seguir:

$$4x^2 + 8x + 6xy + 12y \quad (9)$$

Termo comum em evidência em cada agrupamento:

$$4x(x + 2) + 6y(x + 2) \quad (10)$$

Colocamos novamente em evidência, pois os termos $4x$ e $6y$ possuem termos em comum.

$$(4x + 6y)(x + 2) \quad (11)$$

9.3 Racionalização

Racionalizar um denominador irracional é fazer com que não tenha radical, nem expoente fracionário.

Denominador monômio: no caso $\frac{x}{\sqrt{y}}$ deve-se multiplicar e dividir por $\sqrt{y}$. Com isso:

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{y}}{y} \quad (12)$$

Quando o índice é maior que dois, utiliza-se a técnica mostrada a seguir:

$$\frac{x}{\sqrt[q]{p^x}} = \frac{x \sqrt[q]{y^{q-p}}}{y} \quad (13)$$

Quando o denominador é um binômio do tipo $\frac{N}{a-\sqrt{b}}$, deve-se multiplicar e dividir pelo conjugado do denominador $(a + \sqrt{b})$:

$$\frac{N}{a-\sqrt{b}} = \frac{N}{a-\sqrt{b}} \cdot \frac{N(a+\sqrt{b})}{a+\sqrt{b}} = \frac{N(a+\sqrt{b})}{a^2-b} \quad (14)$$

Quando o denominador for dado por uma soma/subtração de um número real e uma raiz, deve-se utilizar:

$$\frac{N}{\sqrt[3]{x+y}} = \frac{N}{\sqrt[3]{x+y}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2-y^3\sqrt{x+y^2}}}{\sqrt[3]{x^2-y^3\sqrt{x+y^2}}} \quad (15)$$

EXERCÍCIOS

- (PUC) O produto $(x+1)(x^2 - x + 1)$ é igual a:
 - x^3-1
 - $x^3 + 3x^3 - 3x + 1$
 - $x^3 + 1$
 - $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
 - $x^3 + 2$
- (UFPE) Se x e y são números reais distintos, então:
 - $(x^2+y^2)/(x-y) = x+y$
 - $(x^2-y^2)/(x-y) = x+y$
 - $(x^2+y^2)/(x-y) = x-y$
 - $(x^2-y^2)/(x-y) = x-y$
 - Nenhuma das alternativas anteriores é verdadeira.
- (Unesp) A expressão $[(4x + 8)/(x^2 + 3x + 2)] + [(3x - 3)/(x^2 - 1)]$, para $x \neq 1, x \neq -2$, é equivalente a
 - $[4/(x + 1)] - [3/(x - 1)]$
 - $1/(x + 1)$
 - $7/(x + 1)$
 - $[4/(x + 1)] + [3/(x - 1)]$
 - $1/(x + 1)$

- 4.(UFRS)Se $a = \frac{x+y}{2}$, $b = \frac{x-y}{2}$ e $c = \sqrt{x \cdot y}$, onde x e y são números reais tais que $x \cdot y > 0$, então uma relação entre a^2 , b^2 e c^2 é
- $a^2 + b^2 - c^2 = 0$
 - $a^2 - b^2 - c^2 = 0$
 - $a^2 + b^2 + c^2 = 0$
 - $a^2 - b^2 + c^2 = 0$
 - $a^2 = b^2 = c^2$
5. Racionalize o denominador de $\frac{5}{3-\sqrt{3}}$.
6. Racionalize o denominador de $\frac{1}{1-\sqrt[3]{5}}$.
7. O valor de $\frac{x^4-y^4}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}$ para $x = 111$ e $y = 112$ é:
- 215
 - 223
 - 1
 - 1
 - 214
8. A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$, é igual a:
- $\sqrt{6}$
 - $5/2$
 - $2\sqrt{2}$
 - 3
 - $10/3$
9. Usando as identidades notáveis e calculando inteligentemente, mostre que $(a+b+c)^2 - (a-b+c)^2 = 4b(a+c)$ e $(a+b+c)^2 - (a-b-c)^2 = 4a(b+c)$.

10. Trigonometria

A trigonometria é a parte da matemática que estuda as relações existentes entre os lados e os ângulos dos triângulos. O termo "trigonometria", do grego, é a união das palavras *trigono* (triângulo) e *metrein* (medidas).

10.1 Semelhança de triângulo

Dois triângulos são semelhantes quando possuem os três ângulos ordenadamente congruentes (mesma medida) e os lados correspondentes proporcionais. Usamos o símbolo $\sim$ para indicar que dois triângulos são semelhantes.

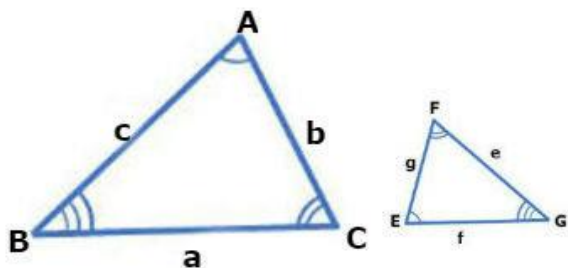
Para saber quais são os lados proporcionais, primeiro devemos identificar os ângulos de mesma medida. Os lados homólogos (correspondentes) serão os lados opostos a esses ângulos.

Razão de Proporcionalidade

Como nos triângulos semelhantes os lados homólogos são proporcionais, o resultado da divisão desses lados será um valor constante. Esse valor é chamado de razão de proporcionalidade.

Considere os triângulos ABC e EFG semelhantes, representados na figura abaixo:

Figura 3: Triângulos ABC e EFG.



Fonte: Toda Matéria.

Os lados **a** e **e**, **b** e **g**, **c** e **f** são homólogos, sendo assim, temos as seguintes proporções:

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{g} = \frac{c}{f} = k$$

Onde **k** é a razão de proporcionalidade.

Casos de Semelhança

Para identificar se dois triângulos são semelhantes, basta verificar alguns elementos.

1º Caso: Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois do outro. Critério AA (Ângulo, Ângulo).

2º Caso: Dois triângulos são semelhantes se os três lados de um são proporcionais aos três lados do outro. Critério LLL (Lado, Lado, Lado).

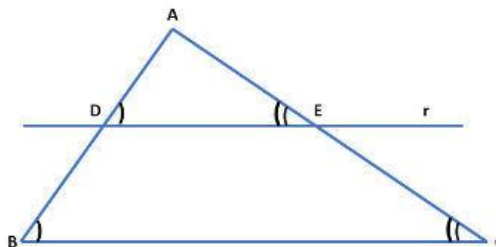
3º Caso: Dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais. Critério LAL (Lado, Ângulo, Lado).

Teorema Fundamental da semelhança

Quando uma reta paralela a um lado de um triângulo intersecta os outros dois lados em pontos distintos, forma um triângulo que é semelhante ao primeiro.

Na figura abaixo, representamos o triângulo ABC e a reta **r** paralela ao lado $\overline{BC}$.

Figura 2: Triângulo ABC e a reta **r**.



Fonte: Toda Matéria.

Observando a figura, notamos que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são congruentes, assim como os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{E}$, pois a reta **r** é paralela ao lado $\overline{BC}$. Assim, pelo critério AA, os triângulos ABC e ADE são semelhantes.

Congruência de Triângulos

Triângulos semelhantes não são triângulos iguais. Os triângulos são considerados congruentes (iguais) quando coincidem ao serem sobrepostos.

Dois triângulos são congruentes quando for verificado um dos seguintes casos:

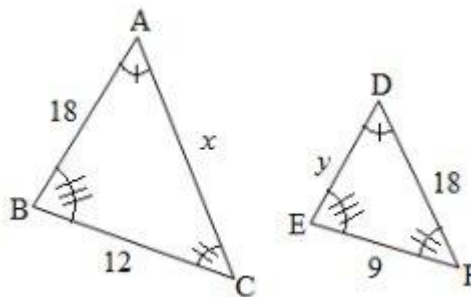
1º caso: Os três lados são respectivamente congruentes.

2º caso: Dois lados congruentes (mesma medida) e o ângulo formado por eles também congruente.

3º caso: dois ângulos congruentes e o lado compreendido entre eles congruente.

Exemplo: As figuras abaixo nos mostram pares de triângulos semelhantes, dessa forma calcule os valores de e e x e y :

Figura 3: Triângulos Semelhantes.



Fonte: Infoescola.

Observando os lados e os ângulos, os lados homólogos são: AB e DE, AC e DF, BC e EF. Assim, para encontrar y fazemos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{18}{y} = \frac{12}{9}$$

$$12y = 162$$

$$y = \frac{162}{12} = \frac{27}{2} = 13,5$$

Para encontrar x fazemos:

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{x}{18} = \frac{12}{9}$$

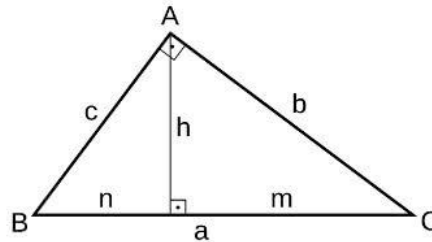
$$9x = 216$$

$$x = \frac{216}{9} = 24$$

10.2 Triângulo retângulo

O triângulo retângulo é uma figura geométrica formada por três lados. Ele possui um ângulo reto, cuja medida é de 90° , e dois ângulos agudos, menores que 90° .

Figura 4: Triângulo retângulo.

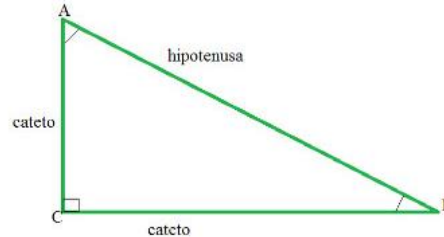


Fonte: Toda Matéria.

Principais Características

O lado oposto ao ângulo de 90° é chamado de **hipotenusa**. Esse é o maior dos três lados da figura. Os demais lados são denominados de **cateto adjacente** e **cateto oposto**. Note que a hipotenusa é representada como (a) e os catetos como (b) e (c).

Figura 5: Triângulo retângulo.



Fonte: Brasil Escola.

Lados do Triângulo Retângulo

Triângulo Equilátero: possui os três lados iguais.

Triângulo Isósceles: possui dois lados iguais, e um diferente.

Triângulo Escaleno: possui os três lados diferentes.

Ângulos do Triângulo Retângulo

Como ocorre em todos os triângulos, a soma dos ângulos internos do triângulo retângulo é de 180° . Os **vértices dos ângulos** são representados por (A), (B) e (C). Já o "h" é a altura relativa à hipotenusa.

Portanto, de acordo com a figura acima temos:

A é um ângulo reto: 90°

B e C são ângulos agudos, ou seja, são menores que 90°

Feita essa observação, o triângulo retângulo possui **dois ângulos complementares**, donde a soma dos dois ângulos mede 90° .

Em relação aos ângulos internos dos triângulos, temos:

Triângulo Retângulo: possui um ângulo interno reto (90°).

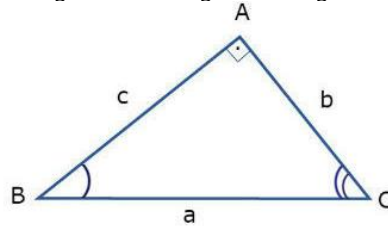
Triângulo Acutângulo: todos os ângulos internos são agudos, ou seja, as medidas dos ângulos são menores que 90° .

Triângulo Obtusângulo: Um ângulo interno é obtuso, ou seja, possui um ângulo com medida maior do que 90° .

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Os triângulos que possuem um ângulo igual a 90° são chamados de triângulos retângulos. O lado oposto ao ângulo de 90° é chamado hipotenusa e os outros dois lados são chamados de catetos. No triângulo representado abaixo, o lado **a** é a hipotenusa e **b** e **c** são os catetos.

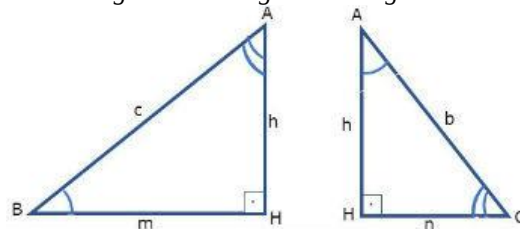
Figura 6: Triângulo Retângulo.



Fonte: Toda Matéria.

Ao traçar a altura relativa à hipotenusa, dividimos o triângulo retângulo em dois outros triângulos retângulos. Conforme figura abaixo:

Figura 7: Triângulos Retângulos.



Fonte: Toda Matéria.

Observando as medidas dos ângulos desses três triângulos, percebemos que eles são semelhantes, ou seja:

$$ABC \sim ABH \sim AHC.$$

Usando as proporções entre os lados, determinamos as seguintes relações:

Relações Métricas
$a \cdot h = b \cdot c$
$b^2 = a \cdot n$
$c^2 = a \cdot m$
$h^2 = m \cdot n$
$a = m + n$
$a^2 = b^2 + c^2$

Essas relações são muito importantes e são chamadas de relações métricas no triângulo retângulo.

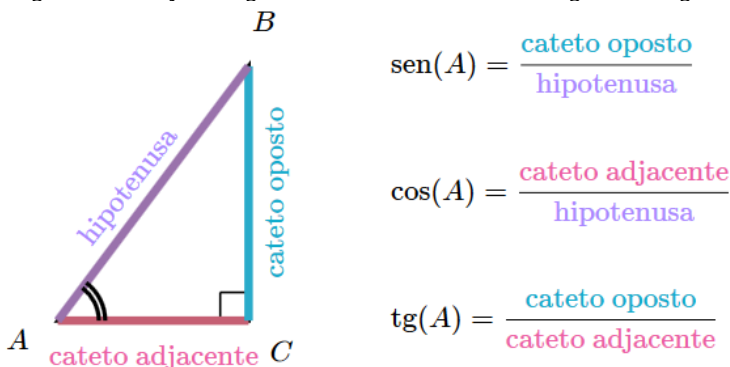
10.3 Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Relações trigonométricas, também conhecidas como identidades trigonométricas, são funções trigonométricas relacionadas entre os lados e o ângulo de um triângulo retângulo.

As funções seno e cosseno de um ângulo são as funções trigonométricas básicas e as mais conhecidas, através destas funções é possível chegar às outras funções trigonométricas: tangente (tg), cotangente (cot), secante (sec) e cossecante (csc).

As relações trigonométricas são resultado da divisão entre as medidas de dois lados de um triângulo retângulo, e por isso são chamadas de razões. As razões seno, cosseno e tangente estão definidas no triângulo agudo A abaixo:

Figura 8: Relações trigonométricas básicas no triângulo retângulo.



Fonte: Khan Academy.

Nessas definições, os termos cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa se referem aos *comprimentos* dos lados.

A partir dessas razões podemos definir outras funções que são importantes na trigonometria: cotangente (cot), secante (sec) e cossecante (csc).

A tangente também pode ser representada como:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

A cotangente é o inverso da tangente, logo:

$$\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

A secante é o inverso do cosseno:

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

A cossecante é o inverso do seno:

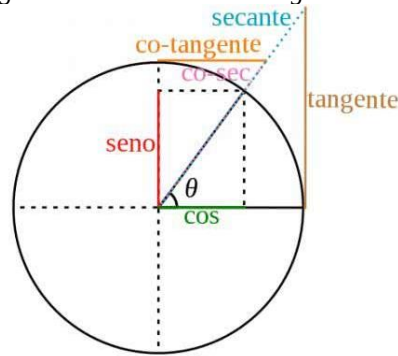
$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Perceba que encontramos as outras funções apenas conhecendo as funções seno e cosseno.

10.4 Unidades de medidas do ângulo ciclo trigonométrico

O Círculo Trigonométrico, também chamado de Ciclo ou Circunferência Trigonométrica, é uma representação gráfica que auxilia no cálculo das razões trigonométricas.

Figura 9: Círculo trigonométrico e as razões trigonométricas.

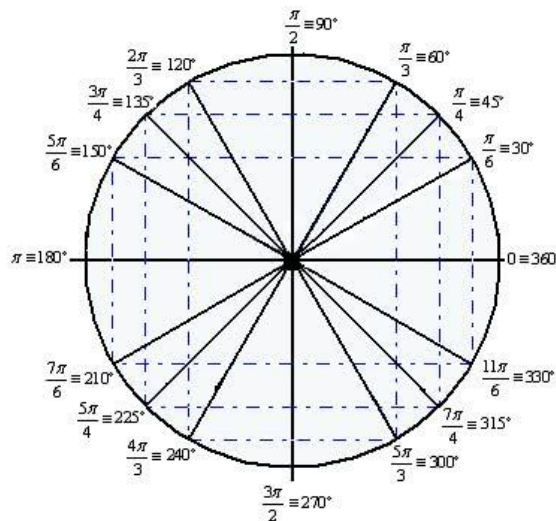


Fonte: Toda Matéria.

De acordo com a simetria do círculo trigonométrico temos que o eixo vertical corresponde ao **seno** e o eixo horizontal ao **cosseno**. Cada ponto dele está associado aos valores dos ângulos. A medida de um arco no círculo trigonométrico pode ser dada em grau (°) ou radiano (rad).

- 1° corresponde a 1/360 da circunferência. A circunferência é dividida em 360 partes iguais ligadas ao centro, sendo que cada uma delas apresenta um ângulo que corresponde a 1°.
- 1 radiano corresponde à medida de um arco da circunferência, cujo comprimento é igual ao raio da circunferência do arco que será medido.

Figura 10: Círculo Trigonométrico com ângulos expressos em graus e radiano.



Fonte: Toda Matéria.

Para auxiliar nas medidas, confira abaixo algumas relações entre graus e radianos:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \quad 2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad \pi/2 \text{ rad} = 90^\circ \quad \pi/3 \text{ rad} = 60^\circ \quad \pi/4 \text{ rad} = 45^\circ$$

Obs: Se quiser converter essas unidades de medidas (grau e radiano) utiliza-se a regra de três.

Exemplo: Qual a medida de um ângulo de 30° em radianos?

$$\pi \text{ rad} - 180^\circ$$

$$x - 30^\circ$$

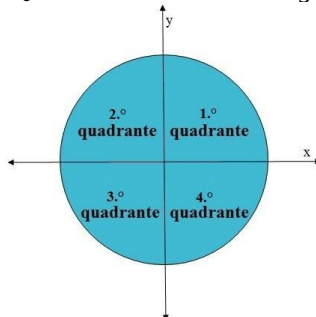
$$x = 30^\circ \cdot \pi \text{ rad} / 180^\circ$$

$$x = \pi/6 \text{ rad}$$

Quadrantes do Círculo Trigonométrico

Quando dividimos o círculo trigonométrico em quatro partes iguais, temos os quatro quadrantes que o constituem. Para compreender melhor, observe a figura abaixo:

Figura 11: Quadrantes do Círculo Trigonométrico.

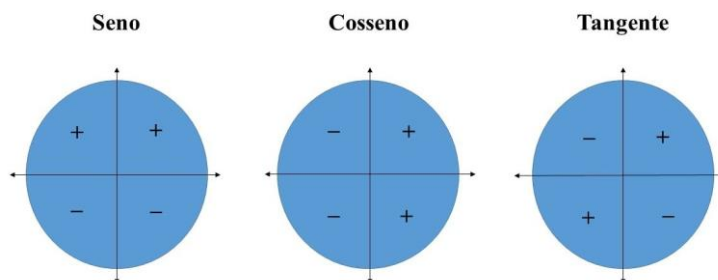


Fonte: Toda Matéria.

Círculo Trigonométrico e seus Sinais

De acordo com o quadrante em que estão inseridos, os valores do seno, cosseno e tangente variam. Ou seja, os ângulos podem apresentar um valor positivo ou negativo. Para compreender melhor, veja a figura abaixo:

Figura 12: Círculo Trigonométrico e seus Sinais.



Fonte: Toda Matéria.

10.5 Definição, periodicidade e gráficos de funções trigonométricas

As funções periódicas são funções que possuem um **comportamento periódico**. Ou seja, que ocorrem em determinados intervalos de tempo. O **período** corresponde ao menor intervalo de tempo em que acontece a repetição de determinado fenômeno.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é periódica se existir um número real positivo p tal que

$$f(x) = f(x+p), \forall x \in A$$

O menor valor positivo de p é chamado de período de f . Note que as funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas visto que apresentam certos fenômenos periódicos.

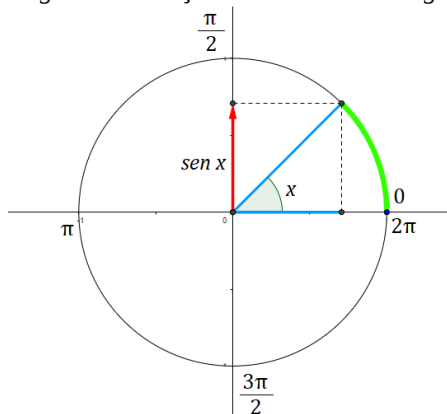
Função Seno

A função seno é definida como uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Representação no círculo trigonométrico:

Figura 13: Função seno no círculo trigonométrico.



Fonte: Infoescola.

Imagem: A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$. Isso é um fato conhecido, pois os valores que o seno pode assumir para qualquer valor de x podem variar apenas de -1 e 1.

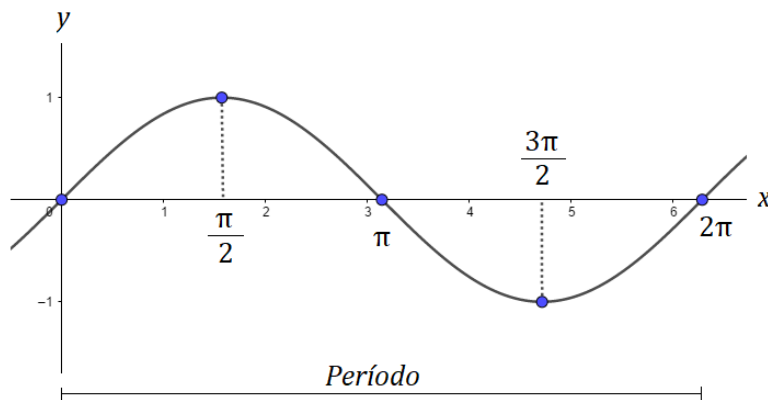
Período: O período da função seno é 2π , pois se $\text{sen } x = y$ (qualquer valor de x teremos um valor em y) então $\text{sen } (x+2k\pi) = y, \forall k \in \mathbb{Z}$, terá a mesma imagem no ciclo, ou seja:

$$y = \text{sen } x = \text{sen } (x+2k\pi)$$

Exemplo: $k=1$ e $x=\pi/6$, temos que:

$$\text{sen } (\pi/6) = \text{sen } (\pi/6+2\pi) = \text{sen } (13\pi/6) = 1/2$$

Figura 14: Gráfico da Função seno.



Fonte: Infoescola.

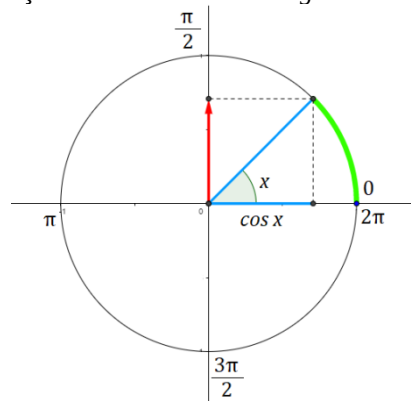
Função cosseno

A função cosseno é definida como uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Representação no ciclo trigonométrico:

Figura 15: Função cosseno no círculo trigonométrico.



Fonte: Infoescola.

Imagem: A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$. Isso é um fato conhecido, pois os valores que o cosseno pode assumir para qualquer valor de x podem variar apenas de -1 e 1 .

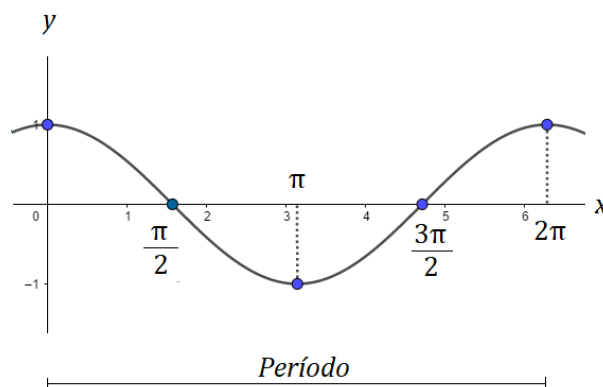
Período: O período da função cosseno é 2π pois se $\cos x = y$ (qualquer valor de x teremos um valor em y) então $\cos(x + 2k\pi) = y, \forall k \in \mathbb{Z}$, terá a mesma imagem no ciclo, ou seja:

$$y = \cos x = \cos(x + 2k\pi)$$

Exemplo: $k=2$ e $x=\pi/6$, temos que:

$$\cos(\pi/6) = \cos(\pi/6 + 4\pi) = \cos(25\pi/6) = \sqrt{3}/2$$

Figura 16: Gráfico da Função cosseno.



Fonte: Infoescola.

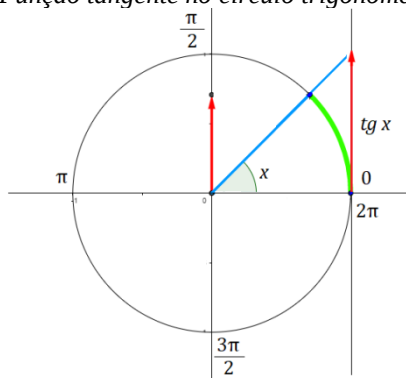
Função tangente

A função tangente é definida como uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Representação no ciclo trigonométrico:

Figura 17: Função tangente no círculo trigonométrico.



Fonte: Infoescola.

Domínio: O domínio da função tangente é diferente das funções seno e cosseno. Logo, o domínio da função será dado por $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi/2 + k\pi\}$ onde percebemos que não existem valores para a tangente quando a sua representação no ciclo estiver no eixo dos senos. Classificamos a função tangente como periódica e também assintótica.

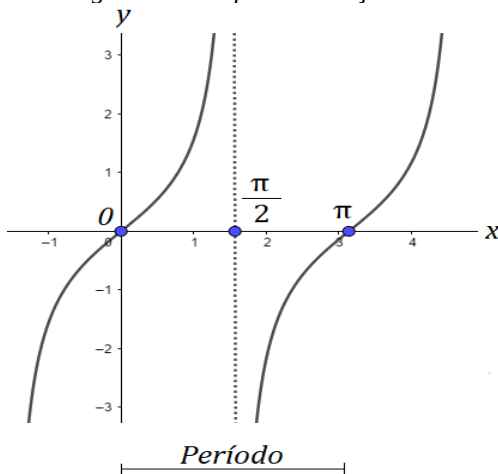
Imagem: A imagem da função tangente é o próprio conjunto dos reais $\mathbb{R}$, ou seja, para qualquer valor de x existe y real.

Período: O período da função tangente é π . Então dizemos: $\text{tg } x = \text{tg } (x+k\pi) = y, \forall k \in \mathbb{Z}$, terá a mesma imagem no ciclo, ou seja:

Exemplo: $k=3$ e $x=\pi/4$, temos que:

$$\text{tg}(\pi/4) = \text{tg}(\pi/4 + 3\pi) = \text{tg}(13\pi/4) = 1$$

Figura 18: Gráfico da Função cosseno.



Fonte: Infoescola.

Note que no ponto $x=\pi/2$ o gráfico não tem nenhuma representação em y , o que torna a função tangente uma assíntota nos pontos onde $x=\pi/2+k\pi$.

10.6 Ângulos importantes

Com base em algumas deduções geométricas e cálculos matemáticos, conseguimos calcular as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° , 45° e 60° do triângulo retângulo. A partir desses cálculos efetuados, construímos a seguinte tabela de relações trigonométricas:

Figura 19: Tabela dos ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Colocar o traço de fração em toda a linha. Preencher os numeradores das frações com 1, 2 e 3. Colocar 2 nos denominadores. Por último colocar o símbolo de $\sqrt{\text{raiz}}$ nos numeradores.

Colocar o traço de fração em toda a linha. Preencher os numeradores das frações com 3, 2 e 1. Colocar 2 nos denominadores. Por último colocar o símbolo de $\sqrt{\text{raiz}}$ nos numeradores.

Dividir o valor do sen pelo cos, racionalizando quando necessário

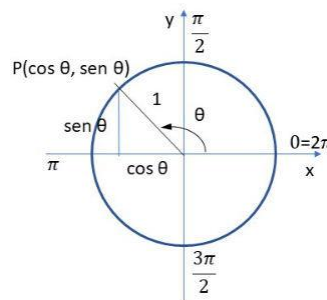
Fonte: Toda Matéria.

10.7 Identidades fundamentais

Usando a circunferência trigonométrica, as razões que a princípio foram definidas para ângulos agudos (menores que 90°), passam a ser definidas para arcos maiores de 90°.

Para isso, associamos um ponto P, cuja abscissa é o cosseno de θ e cuja ordenada é o seno de θ .

Figura 20: Círculo Trigonométrico.



Fonte: Toda Matéria.

Como todos os pontos da circunferência trigonométrica estão a uma distância de 1 unidade da origem, podemos usar o teorema de Pitágoras. O que resulta na seguinte relação trigonométrica fundamental:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Podemos definir ainda a $\text{tg } x$, de um arco de medida x , no círculo trigonométrico como sendo:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

Outras relações fundamentais:

- Cotangente do arco de medida x

$$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

- Secante do arco de medida x .

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

- Cossecante do arco de medida x .

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

A partir das relações fundamentais, podemos gerar novas relações de que serão fundamentais para o nosso estudo de Trigonometria.

- 1ª relação decorrente:

Seja a relação fundamental $\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{cos}^2(x) = 1$. Quando dividimos a função inteira por $\operatorname{cos}^2(x)$ temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{cos}^2(x)} + \frac{\operatorname{cos}^2(x)}{\operatorname{cos}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2(x)}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2(x) + 1 &= \sec^2(x) \\ \text{ou } \sec^2(x) &= 1 + \operatorname{tg}^2(x) \end{aligned}$$

- 2ª relação decorrente:

Com a mesma relação fundamental da trigonometria $\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{cos}^2(x) = 1$, dividimos toda relação por $\operatorname{sen}^2(x)$.

$$\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} + \frac{\operatorname{cos}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

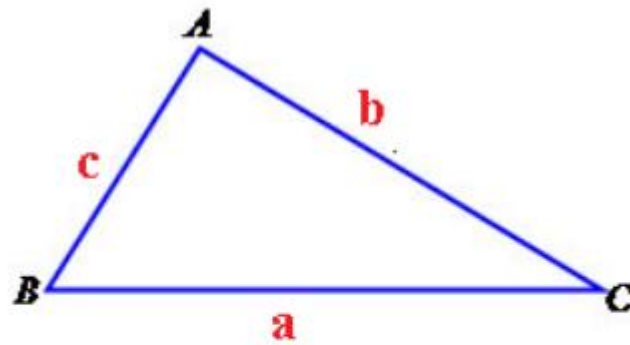
Logo:

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{cotg}^2(x) &= \operatorname{cosec}^2(x) \\ \text{ou } \operatorname{cosec}^2(x) &= 1 + \operatorname{cotg}^2(x) \end{aligned}$$

10.8 Lei dos Senos

A Lei dos Senos determina que **em um triângulo qualquer, a relação do seno de um ângulo é sempre proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo**. Esse teorema demonstra que num mesmo triângulo a razão entre o valor de um lado e o seno de seu ângulo oposto será sempre constante. Assim, para um triângulo ABC de lados a, b, c, a Lei dos Senos admite as seguintes relações:

Figura 4: Representação da lei dos senos no triângulo



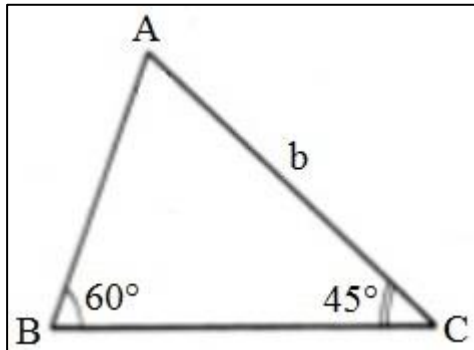
$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Fonte: Toda Matéria

Exemplo:

Para compreender melhor, vamos calcular a medida dos lados AB e BC desse triângulo, em função da medida b do lado AC.

Figura 2



Pela lei dos senos, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{b}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{AB}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{BC}{\text{sen } 75^\circ}$$

$$AB = \frac{\text{sen } 45^\circ}{\text{sen } 60^\circ} b$$

$$BC = \frac{\text{sen } 75^\circ}{\text{sen } 60^\circ} b$$

Fonte: Toda Matéria

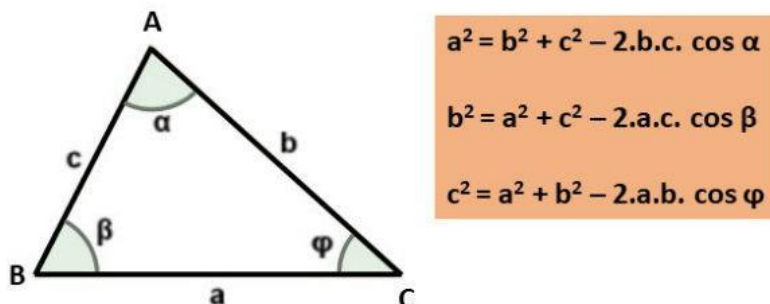
Logo, $AB = 0,816b$ e $BC = 1,115b$.

10.9 Lei dos Cossenos

A Lei dos Cossenos é utilizada para calcular a medida de um lado ou de um ângulo desconhecido de um triângulo qualquer, conhecendo suas outras medidas. O teorema dos cossenos estabelece que: **"Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles."**

Assim, pela lei dos cossenos temos as seguintes relações entre os lados e os ângulos de um triângulo:

Figura 3: Representação da lei dos cossenos no triângulo



Fonte: Toda Matéria

Exemplo:

Dois lados de um triângulo medem 20 cm e 12 cm e formam entre si um ângulo de 120° . Calcule a medida do terceiro lado.

Solução

Para calcular a medida do terceiro lado utilizaremos a lei dos cossenos. Para isso, vamos considerar:

$b = 20 \text{ cm}$

$c = 12 \text{ cm}$

$\cos \alpha = \cos 120^\circ = -0,5$ (valor encontrado em tabelas trigonométricas).

Substituindo esses valores na fórmula:

$$a^2 = 20^2 + 12^2 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot (-0,5)$$

$$a^2 = 400 + 144 + 240$$

$$a^2 = 784$$

$$a = \sqrt{784}$$

$$a = 28 \text{ cm}$$

10.10 Soma e subtração de arcos

O estudo da soma e diferença de arcos auxilia o cálculo de funções circulares cujo arco não seja facilmente “decorado” por meio de uma tabela de referência. Assim, temos as seguintes expressões:

Seno da soma e da diferença de dois arcos a e b

$$\boxed{\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a}$$

$$\boxed{\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a}$$

Cosseno da soma e da diferença de dois arcos a e b

$$\boxed{\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}$$

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b}$$

Tangente da soma e da diferença de dois arcos a e b

$$\boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}} \quad \boxed{\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}}$$

Exemplo: Calcule o valor de $\operatorname{sen} 105^\circ$.

Solução: Podemos escrever 105° como sendo a soma de 60° com 45° . Dessa forma teremos:

$$\operatorname{sen} 105^\circ = \operatorname{sen} (60^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 60^\circ$$

$$\operatorname{sen} 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

10.11 Funções trigonométricas do arco duplo

Considere um arco qualquer de medida x , o seu arco duplo será $2x$. O valor das funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente) do arco duplo não é o dobro das do arco, ou seja, $\operatorname{sen} 2x \neq 2 \cdot \operatorname{sen} x$. Assim, para encontrar o valor das funções trigonométricas de um arco duplo ($\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$ e $\operatorname{tg} 2x$) teremos que seguir algumas relações, entre um arco x e o seu arco duplo $2x$ (essas relações serão feitas através das funções trigonométricas da adição de arcos):

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Pode-se encontrar as fórmulas das funções trigonométricas ($\cos$, sen e tg) do arco metade, através das funções do arco duplo. Fazendo as manipulações necessárias, encontra-se:

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

10.12 Funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas inversas são muito importantes nos cálculos, pois muitas vezes queremos saber qual é o ângulo que originou determinado valor. Por exemplo: $\operatorname{sen} (?) = 1/2$. Assim, sabendo qual é a função inversa de seno, obtém-se o valor do ângulo desejado. Lembre-se: **o valor do ângulo deve ser em radianos**. (Para converter para graus basta fazer uma regra de três: $180^\circ = \pi$).

Simbolicamente, as Funções Trigonômétricas Inversas podem ser escritas de duas formas: $\operatorname{sen}^{-1}(x)$ ou $\operatorname{arcsen}(x)$; $\cos^{-1}(x)$ ou $\operatorname{arccos}(x)$; $\operatorname{tg}^{-1}(x)$ ou $\operatorname{arctg}(x)$;

Cuidado: $\operatorname{sen}^{-1}(x) \neq \frac{1}{\operatorname{sen} x}$. Análogo para todas as funções trigonométricas.

• Gráficos

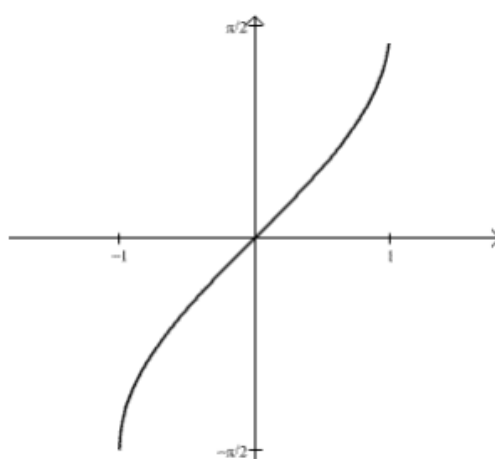
Primeiramente, deve-se lembrar que para existir uma função inversa $f^{-1}(x)$, a função $f(x)$ deve ser injetora. Ou seja, para cada x tem-se um único y e para cada y um único x . Assim, para definir as funções inversas, temos que restringir o domínio das funções originais a um intervalo em que elas sejam invertíveis. Esses domínios determinam o contradomínio das funções inversas. O valor do contradomínio apropriado que uma função inversa produz é chamado de valor principal da função. Assim, o gráfico das Funções Trigonométricas Inversas $f^{-1}(x)$, deve ser restrito a uma parte do domínio de $f(x)$:

Tabela 1: Domínio e contradomínio das funções trigonométricas inversas

Fonte: Autor

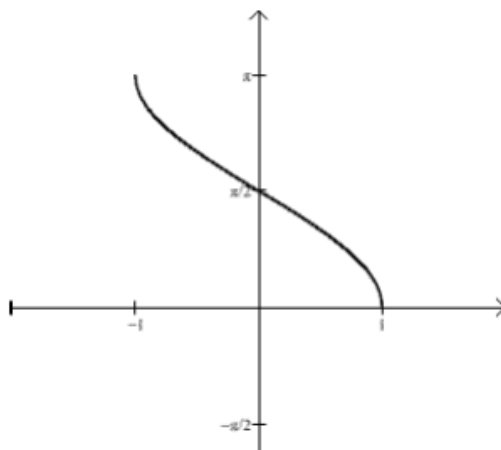
Figura 3: Gráfico da função arcsen.

CONTRA-DOMÍNIO	DOMÍNIO
$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsen(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$[-1,1]$
$0 \leq arccos(x) \leq \pi$	$[-1,1]$
$-\frac{\pi}{2} \leq arctg(x) \leq \frac{\pi}{2}$	$\mathbb{R}$



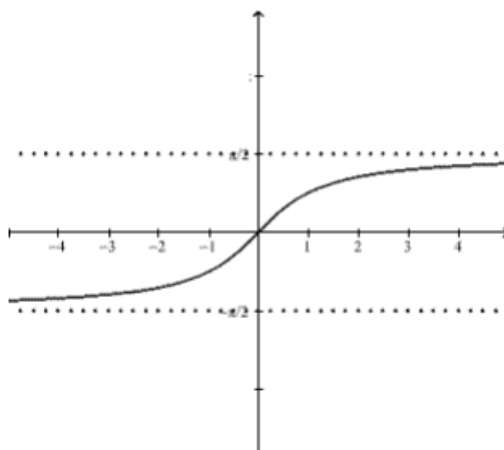
Fonte: UFBA

Figura 4: Gráfico da função arcco.



Fonte: UFBA

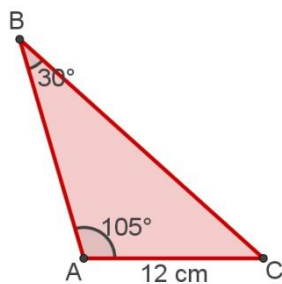
Figura 5: Gráfico da função $\arctg$



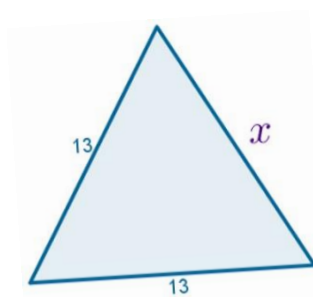
Fonte: UFBA

EXERCÍCIOS

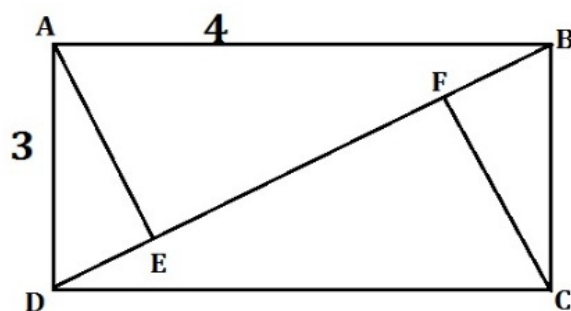
- Determine o período das seguintes funções:
 - $y = \cotg \left(2x - \frac{\pi}{7} \right)$
 - $y = \cotg \frac{5x}{2}$
- As letras A, B e C representam, respectivamente, três ilhas, Albelina, Bitoquina e Carpetina. Determine a distância entre as ilhas Albelina e Bitoquina.



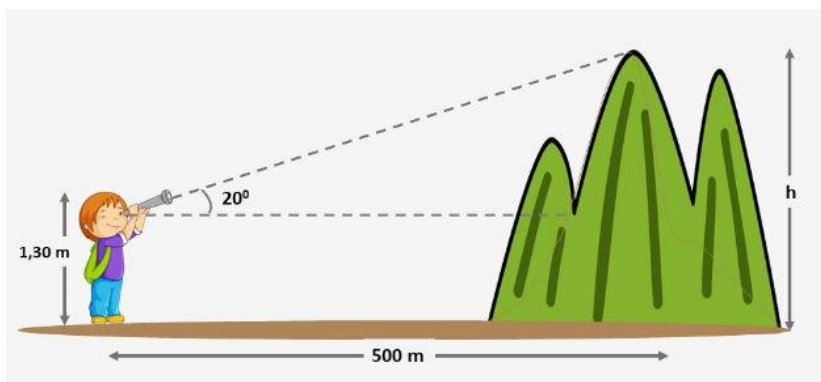
3. Calcule a medida do lado x do triângulo abaixo sabendo que o ângulo oposto a ele mede 60° .



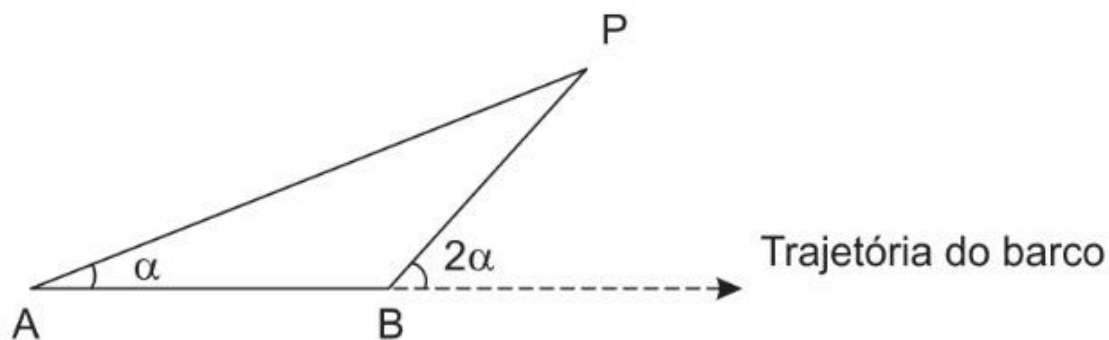
4. Calcule:
- $\cos 15^\circ$
 - $\cos 135^\circ$
 - $\sin 75^\circ$
 - $\sin 105^\circ$
 - $\tan 165^\circ$
 - $\tan 15^\circ$
5. Dado $\sin a = \frac{2}{3}$, calcular $\sin \frac{a}{2}$, com $0 < a < \frac{\pi}{2}$.
6. De um ponto A, um agrimensor enxerga o topo T de um morro, conforme um ângulo de 45° . Ao se aproximar 50 metros do morro, ele passa a ver o topo T conforme um ângulo de 60° . Determine a altura do morro.
7. (Fatec – SP) Na figura, ABCD é um retângulo. A medida do segmento EF é igual a:



8. Um menino avista o ponto mais alto de um morro, conforme figura abaixo. Considerando que ele está a uma distância de 500 m da base do morro, calcule a altura (h) deste ponto.

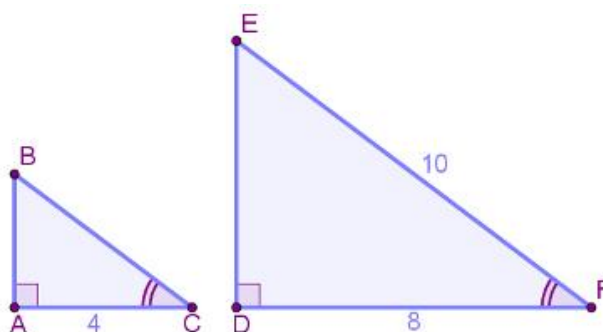


9. Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α . A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^\circ$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2\,000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, calcule a menor distância do barco até o ponto fixo P.

10. Qual é a medida do segmento AB?



11. Seja a expressão $Y = \frac{1}{(1+\cos x)} * \frac{\cos^2 x}{(1-\cos x)} = 1$. Defina quem é Y.

12. Se $\sin x = m$ e $\cos x = n$, determine $\sin 2x$, $\cos 2x$ e $\tan 2x$ em função de m e n.

13. Sabendo que $\cos x = \frac{1}{2}$ e $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ com $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $0 < y < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos(x + 2y)$.

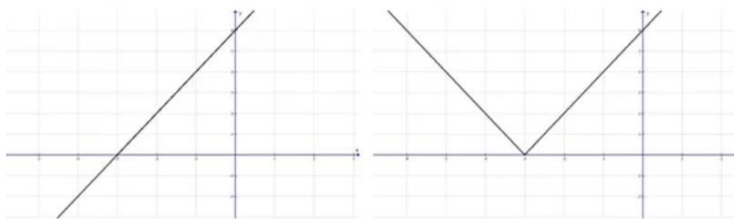
14. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \sec\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$

b) $y = \operatorname{cosec}(2x + 180^\circ)$

15. Transforme em produto a expressão: $y = \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x$.

Gabarito – Função e Inequação modular

1	
2	$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 2 \\ x-4, & x > 2 \end{cases}$
3	$-2 > x > 4$
4	$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$
5	a. $\{-1 \setminus 3, 2\}$ b. $\{-, 6-4, 1, 1\}$ c. $\{4, -1\}$ d. $\{2, 6, 4 + \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2}\}$
6	a. $S = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$ b. $S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$

Gabarito Função exponencial e logarítmica

Gabarito:

1º) letra **d**.

2º) Resp: 25 mg e $f(t) = 200 \cdot (1/2)^{t/6}$

3º) Resp: **343**

4º) $R = a$

5º) $R = d$

8º)

$R = a) D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1/2\}$.

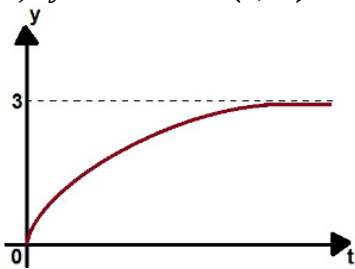
$R = b) D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 2 < x < 3\}$

$R = c) D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ ou } x \neq -1\}$

9º)

a) $t \leq 9,95$, portanto, em até 10 dias.

b) $y = 3 - 3 \cdot (0,95)^t$ é uma função crescente e o gráfico da função logarítmica é:



10º) $R = e$

11º) $R = a$

12º)

a) $\log_a 81 = 4$ resp: 3

b) $\log_a 4 = -2$ resp: -2

c) $\log_a 1/3 = -1$ resp: 3

d) $\log_a 8 = 3$ resp: 2

respostas de Funções inversas

1. $04 + 08 + 16 = 28$

2. [C]

3. $01 + 04 + 08 + 16 + 32 = 61$

4. [C]

5. [A]

11 Respostas Produtos Notáveis, Fatoração e Racionalização.

1.	C
2	B
3	C
4	B
5	$\frac{5(3 + \sqrt{3})}{6}$
6	$\frac{1 + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}}{4}$
7	B
8	B
9	Dica: faça $x = a + b$ e $y = a - b$.

Gabarito - Trigonometria

1.a)	$\frac{\pi}{2}$
1.b)	$\frac{2\pi}{5}$
2	$12\sqrt{2} \text{ cm}$
3	13
4.a)	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
4.b)	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4.c)	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
4.d)	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
4.e)	$-2 + \sqrt{3}$
4.f)	$2 - \sqrt{3}$
5	$\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}}$
6	121,3 m
7	1,4
8	181,3
9	$1000\sqrt{3}$

10	3
11	$\operatorname{cosec}^2 x$
12	$\operatorname{sen} 2x = 2mn$ $\operatorname{cos} 2x = n^2 - m^2$ $\operatorname{tg} 2x = \frac{2mn}{n^2 - m^2}$
13	$-\frac{1}{2}$
14.a)	$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; \\ x \neq \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$
14.b)	$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; \\ x \neq -90^\circ + k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$
15	$2\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{cos} x$

REFERÊNCIAS

Apostila Enem Impacto Cursos, 2015.

GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo: Volume 1. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2001.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. Fundamentos da matemática elementar: conjuntos e funções. 3. ed. São Paulo: Atual, 1977.

LIMA, Elon Lages. Um Curso de Análise: Volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/funcao-constante.htm>