FUNÇÃO MODULAR E INEQUAÇÃO MODULAR

ALANA LIMA

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

PET CIÊNCIA E TECNOLOGIA UFAL

CTEC Centro de Tecnologia UFAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Função Modular

A **função modular** é uma função em que em seus elementos são aplicados o módulo na sua lei de formação.
O módulo ou valor absoluto, que é representado por duas barras verticais **|a|**, é um número real a, em que nesse número é desconsiderado o seu sinal.

Exemplos:

- $|2| = 2$
- $|-8 + 6| = |-2| = 2$
- $|5| - 4 = 5 - 4 = 1$
- $|-3| = 3$

A função modular é definida da seguinte forma:

Seja f: R → R uma função e f(x) = |x|, assim:

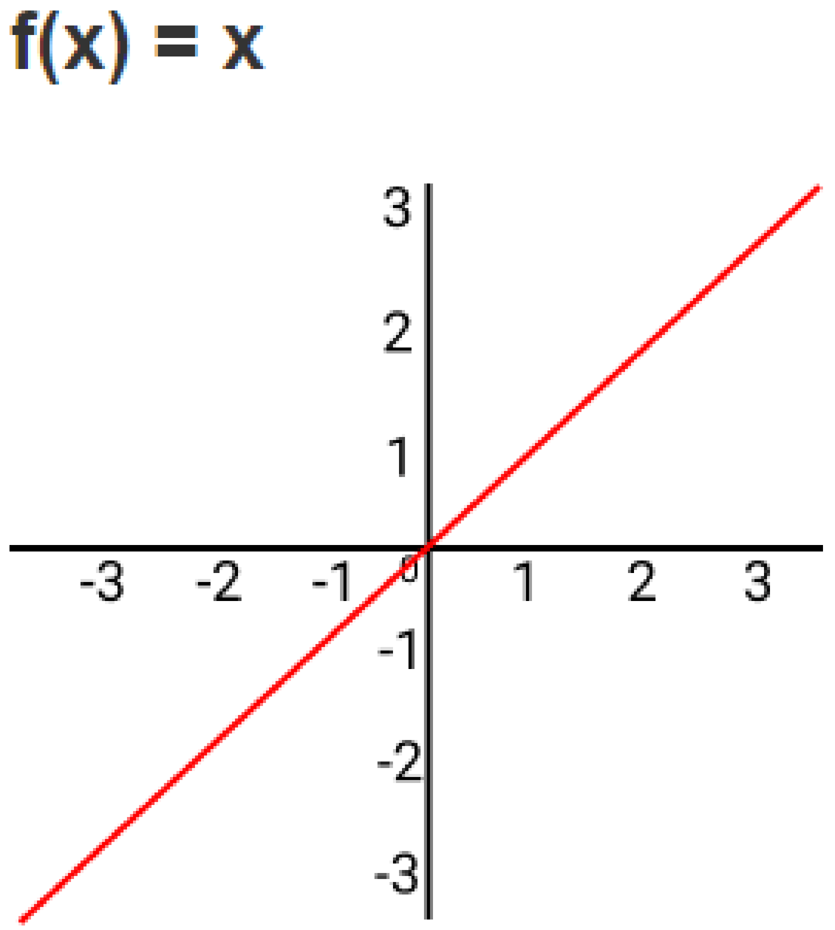
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Propriedades

- $|x| = |-x|$ com $x \in R$;
- $|x^2| = |x|^2 = x^2$ com $x \in R$;
- $|x \,.\, y| = |x| \,.\, |y|$, com x e $y \in R$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$, com x e $y \in R$;
- $|x - y| \geq |x| - |y|$, com x e $y \in R$;
- $|\, x \,| = \sqrt{x^2}$

Gráfico da Função Modular

O gráfico da função modular muda a direção do gráfico para positivo quando há a intersecção com o eixo x.
Sabemos que os valores abaixo do eixo x são valores negativos e na função modular os valores negativos são desconsiderados o sinal.



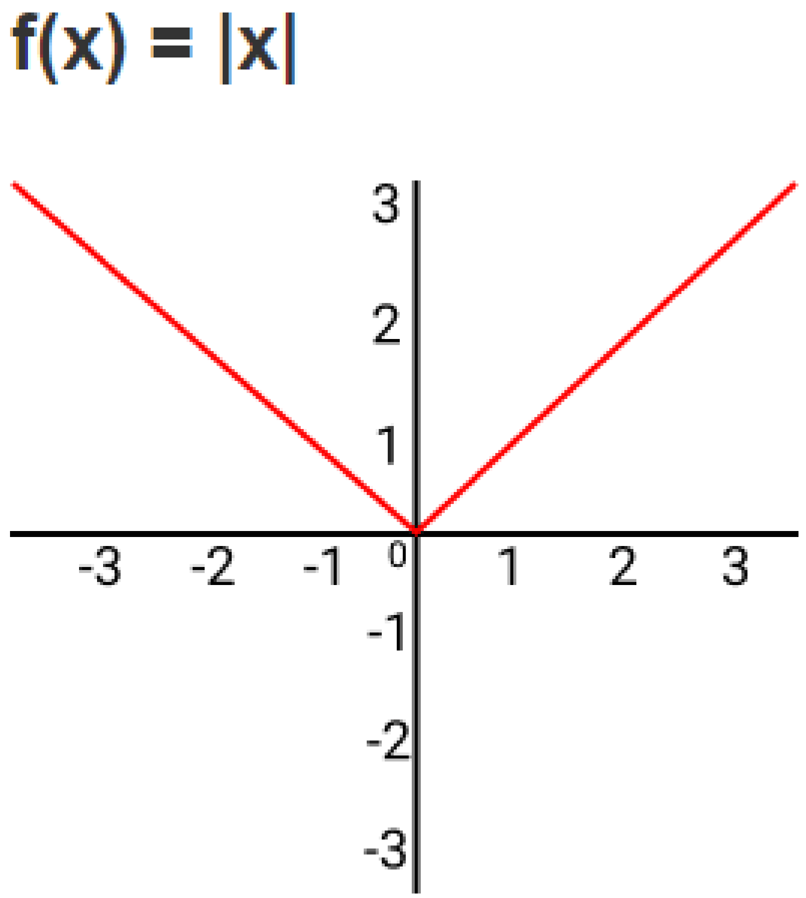
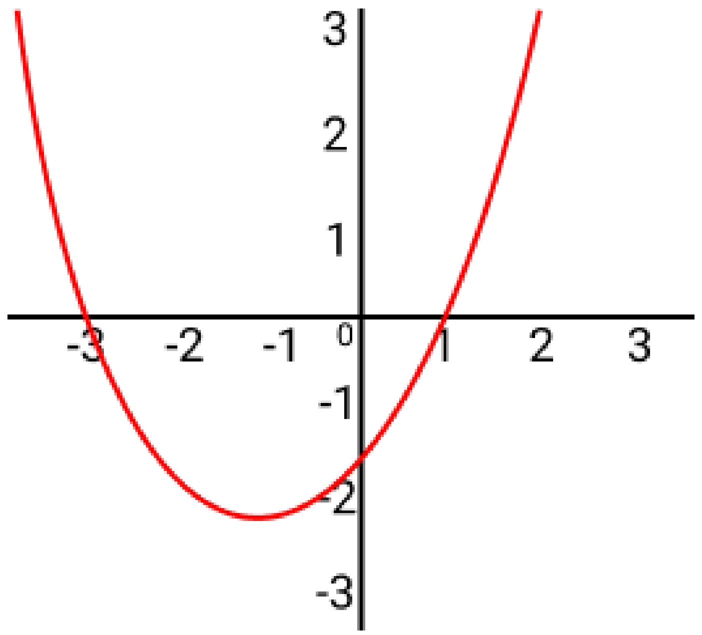
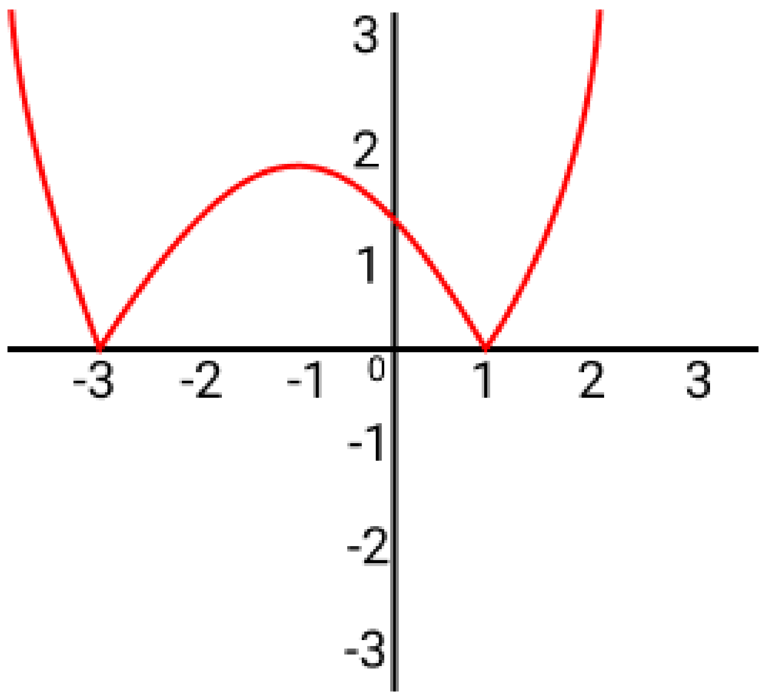


Gráfico da Função Modular

$f(x) = x^2 + 2x - 3$



$f(x) = |x^2 + 2x - 3|$



Exemplos

Dada a função modular $f(x) = |2 - x| - 2$, escreva a função sem utilizar módulo nas sentenças.

Agora vamos analisar a função:

$x \leq 2$	$x > 2$
$2 - x \geq 0$	$2 - x < 0$
$f(x) = \|2 - x\| - 2$	$f(x) = \|2 - x\| - 2$
$f(x) = 2 - x - 2$	$f(x) = -(2 - x) - 2$
$f(x) = -x$	$f(x) = x - 4$

Podemos representar essa função sem o utilizar o módulo da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , x \leq 2 \\ x - 4 & , x > 2 \end{cases}$$

Exemplos

Analise a função $f(x) = |x + 2| - |x + 1|$:

Chamando $g(x) = x + 2$ e $h(x) = x + 2$

Quando $x + 2 \geq 0$ então $x \geq -2$.: $g(x) = x + 2$ quando $x \geq -2$
Quando $x + 2 < 0$ então $x < -2$.: $g(x) = -x - 2$ quando $x < -2$
Quando $x + 1 \geq 0$ então $x \geq -1$.: $h(x) = x + 1$ quando $x \geq -1$
Quando $x + 1 < 0$ então $x < -1$.: $h(x) = -x - 1$ quando $x < 1$

Exemplos

Há quatro casos:

① Quando ambos são positivos, isto é: $x \geq -2$ e $x \geq -1$

A intersecção é $x \geq -1$

$f(x) = x + 2 - (x + 1)$

Daí: $f(x) = x + 2 - x - 1$.: $f(x) = 1$ se $x \geq -1$

② Quando o 1° é positivo e o 2° é negativo, isto é: $x \geq -2$ e $x < -1$

A intersecção é $-2 \leq x < -1$

$f(x) = x + 2 - (-x - 1)$

Daí: $f(x) = x + 2 + x + 1$.: $f(x) = 2x + 3$ se $(-2 \leq x < -1)$

Exemplos

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

③ Quando o 1º é negativo e o 2º é positivo, isto é: $x < -2$ e $x \geq -1$

Não há intersecção.

$f(x) = -x - 2 - (x + 1)$ (não precisa fazer)

④ Quando ambos são negativos, isto é: $x < -2$ e $x < -1$

A intersecção é < -2

$f(x) = -x - 2 - (-x - 1)$

Daí: $f(x) = -x - 2 + x + 1$ ∴ $f(x) = -1$ se $x < -2$

Exemplos

Assim, a lei de formação de f(x) é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \geq -1 \\ 2x + 3, \text{ se } -2 \leq x < -1 \\ -1, \text{ se } x < -2 \end{cases}$$

Inequação Modular

A inequação modular é uma desigualdade em que a incógnita "aparece dentro do módulo".

Exemplos:

- $|x| > 6$
- $|x| \leq 4$
- $|x + 3| > 7$
- $|4x + 1| \geq 3$

Propriedades

Podemos utilizar as propriedades a seguir para resolver esse tipo de inequação:

- $|x| > a \rightarrow x < -a$ ou $x > a$.
- $|x| < a \rightarrow -a < x < a$.
- $|x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$.
- $|x| \geq a \rightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$.
- $|x - a| \leq b \rightarrow -b \leq x - a \leq b \rightarrow a - b \leq x \leq a + b$

Exemplo

Encontre a solução da inequação $6 > |x^2 + 5x|$.

Há duas opções para esta inequação:

$x^2 + 5x < 6$ ou $x^2 + 5x > -6$

Resolvendo $x^2 + 5x - 6 < 0$ tem-se:
$\Delta = 49$, $x' = 1$ e $x'' = -6$

Como se deseja que: $x^2 + 5x - 6 < 0$ (seja negativo), então:
$-6 < x < 1$

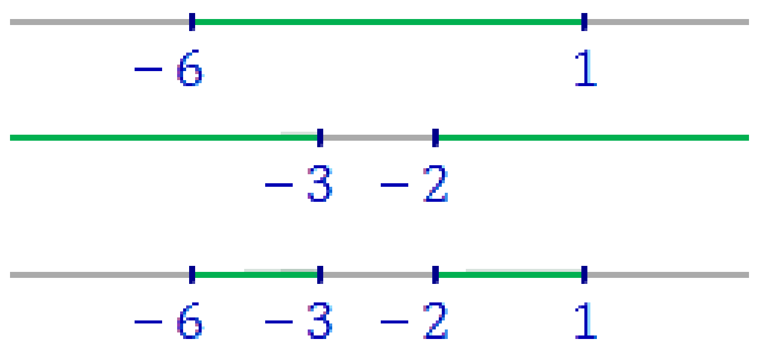
Exemplos

Resolvendo $x^2 + 5x + 6 > 0$ tem-se:

$\Delta = 1$, $x' = -2$ e $x'' = -3$

Como se deseja que: $x^2 + 5x - 6 > 0$ (seja positivo), então: $x < -3$ ou $x > -2$

Representando as respostas de cada, e obtendo a intersecção:



Portanto, a solução da inequação $|x2 + 5x| < 6$ é:

$S = \{x \in IR ; -6 < x < -3$ ou $-2 < x < 1\}$

Como vocês analisariam as funções abaixo ?

- $f(x) = | x - 5 | / x - 5$
- $f(x) = | x^2 - 9x - 10| - 2$
- $f(x) = (| 2x - 1 | - | 2x + 1|) / x$
- $f(x) = | x + 1| * | x - 2|$

Vamos ver aplicando no Cálculo 1...

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

(a) *Verifique se o existe* $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{|x-5|}{x-5}$; $\quad \bullet\ |x-5| = \begin{cases} x-5, & x \geq 5 \\ -(x-5), & x < 5 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x \to 5^+} \frac{x-5}{x-5} = \lim_{x \to 5^+} 1 = 1$$

$\bullet$ *Obs: se* $x \to 5^+$, *então* $x > 5$. *Logo*, $|x-5| = x-5$

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x \to 5^-} \frac{-(x-5)}{x-5} = -\lim_{x \to 5^-} \frac{x-5}{x-5} = -\lim_{x \to 5^-} 1 = -1.$$

$\bullet$ *Obs: se* $x \to 5^-$, *então* $x < 5$. *Logo*, $|x-5| = -(x-5)$

Como os limites laterais existe, mas são diferentes, dizemos que $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{|x-5|}{x-5}$ *não existe.*

Vamos ver aplicando no Cálculo 1...

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

b) Calcule $\lim_{x \to -1^+} |x^2 - 9x - 10| - 2$

$\bullet$ *Obs.*: $|x^2 - 9x - 10| = \begin{cases} x^2 - 9x - 10, & x \leq 1 \text{ ou } x \geq 10 \\ -(x^2 - 9x - 10), & 1 < x < 10 \end{cases}$.

$\bullet$ *Obs.*: *se* $x \to 1^+$, *então* $x > 1$. *Portanto*, $|x^2 - 9x - 10| = -(x^2 - 9x - 10)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -1^+} |x^2 - 9x - 10| - 2 &= \lim_{x \to -1^+} (-x^2 + 9x + 10 - 2) \\
&= \lim_{x \to -1^+} (-x^2 + 9x + 8) \\
&= \lim_{x \to -1^+} -x^2 + \lim_{x \to -1^+} 9x + \lim_{x \to -1^+} 8 \\
&= -(-1)^2 + 9 \times (-1) + 8 \\
&= -1 - 9 + 8 \\
&= -2.
\end{aligned}
$$

Vamos ver aplicando no Cálculo 1...

$b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$

$*\ Obs: |2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & se\ x \geq 1/2 \\ -(2x-1), & se\ x < 1/2 \end{cases}\ ;\ |2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & se\ x \geq -1/2 \\ -(2x+1), & se\ x < -1/2 \end{cases}$

$*\ Se\ x \to 0, |2x-1| = -(2x-1)\ e\ |2x+1| = 2x+1.$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-(2x-1)-(2x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-2x+1-2x-1}{x} =$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{-4x}{x}\ ;\ se\ x \to 0\,, x \neq 0. Logo, \lim_{x\to 0} \dfrac{-4x}{x} = -4.$

$*\ Portanto, \lim_{x\to 0} \dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x} = -4\,.$

2.

$a)\ f(x) = \sqrt{x+1}\ \ e\ \ g(x) = \dfrac{1}{x-3}\ ; h(x) = f(g(x))\,. Determinar\ onde\ h\ é$ $contínua.$

$$h(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$$

$*\ h$ *é uma composição de funções, onde há presença da função raíz aderida à uma função polinomial racional. Logo, h é contínua sempre que h estiver definida, ou seja, no domínio da função.*

$- - - - - - - - (2) + + + + + + + + + + + + + + +$ $(x-2)$

$- - - - - - - - - - - - - - - - - - (3) + + + + + +$ $(x-3)$

$+ + + + + + + + (2) - - - - - - - - (3) + + + + + +$ $(x-2)/(x-3)$

$-$*Com essa análise concluímos que o domínio da função h é:*

$$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\ ou\ x > 3\}$$

$-$*Logo, h é contínua em* $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

Vamos ver aplicando no Cálculo 1...

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

(b) *Estude a diferenciabilidade da função* $f(x) = |x+1| \cdot |x-2|$.

$$f(x) = |(x+1)(x-2)| = |x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2, & x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \\ -(x^2 - x - 2), & -1 < x < 2 \end{cases}.$$

Como f é uma função definida pelo módulo de uma função polinomial contínua em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$. Como f muda de comportamento nos números -1 e 2, como f é polinomial temos a priori que f é derivável ou diferenciável em $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Analisando a diferenciabilidade de f em -1, temos:

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - x - 2 - 0}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)} = \lim_{x \to -1^-} (x - 2) = -1 - 2 = -3.$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1^+} \frac{-(x^2 - x - 2) - 0}{x + 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{-x^2 + x + 2}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)} = \lim_{x \to -1^+} (-x + 2) = -(-1) + 2 = 3.$$

Como as derivadas laterais existem mas são diferentes, então f não é derivável em -1.

Vamos ver aplicando no Cálculo 1...

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

$b)\ \lim\limits_{x \to -1} \left| \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} \right|$; $(No\ final\ do\ arquivo\ tem\ a\ resolução\ mais\ detalhada)$

$$\lim_{x \to -1} \left| \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} \right| = \lim_{x \to -1} \left| \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} \right| = \lim_{x \to -1} \frac{|x+1|.|x-2|}{|x+1|}\ ;$$

$*\ Se\ x \to -1, então\ x \neq -1\ e, portanto, x + 1 \neq 0\ \Rightarrow |x+1| \neq 0. Logo,$

$$\lim_{x \to -1} \frac{|x+1|.|x-2|}{|x+1|} = \lim_{x \to -1} |x-2| = |-1-2| = |-3| = 3.$$

Vamos ver aplicando no Cálculo 1...

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

2º) $\lim_{x\to -1}\left|\frac{x^2-x-2}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1}\frac{|x+1||x-2|}{|x+1|}$;

* $|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases}$;
* $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$;

* *Se* $x \to -1^+$, *então* $x > -1$. *Logo*, $|x+1| = (x+1)$ *e* $|x-2| = -(x-2)$;

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{|x+1||x-2|}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)[-(x-2)]}{(x+1)} = \lim_{x\to -1^+}\frac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)} =$$
$$\lim_{x\to -1^+} -(x-2) = -(-1-2) = -(-3) = 3.$$

* *Se* $x \to -1^-$, *então* $x < -1$. *Logo*, $|x+1| = -(x+1)$ *e* $|x-2| = -(x-2)$;

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{|x+1||x-2|}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^-}\frac{[-(x+1)][-(x-2)]}{-(x+1)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{(x+1)(x-2)}{-(x+1)} =$$
$$\lim_{x\to -1^-} -(x-2) = -(-1-2) = -(-3) = 3.$$

Como $\lim_{x\to -1^+}\left|\frac{x^2-x-2}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1^-}\left|\frac{x^2-x-2}{x+1}\right|$ *então* $\lim_{x\to -1}\left|\frac{x^2-x-2}{x+1}\right| = 3.$

OBRIGADA !!