NIVELAMENTO
Engenharias 2020

# FUNÇÃO COMPOSTA E FUNÇÃO INVERSA

RAYSSA FONTES

PET CIÊNCIA E TECNOLOGIA UFAL
CTEC Centro de Tecnologia UFAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

# Função composta

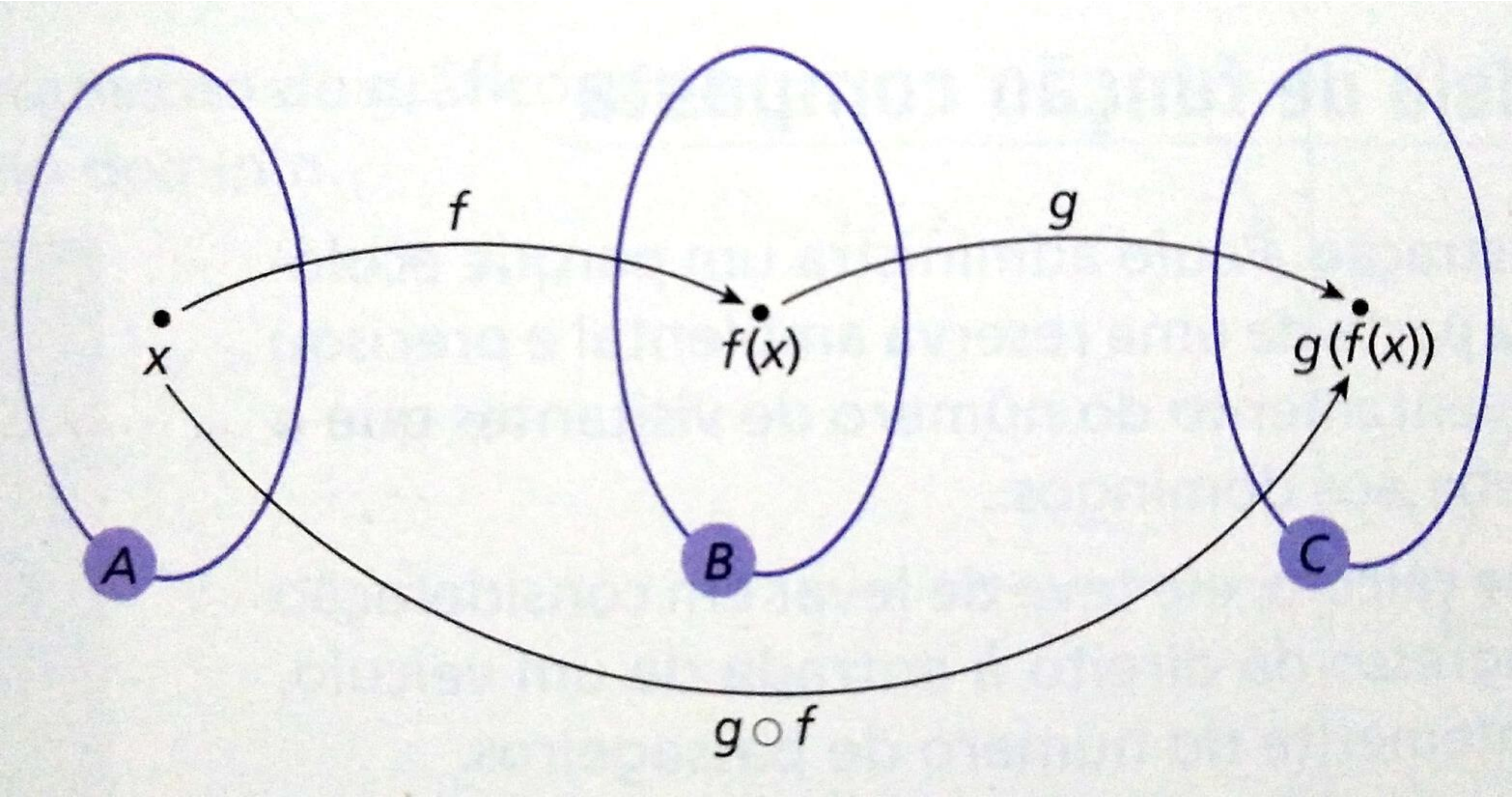


Uma **função** relaciona cada elemento de um **domínio** a um único elemento do **contradomínio**. Suponha que existam duas funções, **f** e **g**, em que o domínio da função g é igual ao contradomínio da função f. Nesse caso, é possível criar uma função $g \circ f$, chamada de **função composta**, a qual relaciona diretamente os elementos do domínio da função f aos elementos do contradomínio da função g.

Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, chamamos de **função composta** de $g$ com $f$ a função $g \circ f: A \to C$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para $x \in A$.

# Diagrama

NIVELAMENTO
Engenharias 2020




O diagrama mostra as funções f e g. Nesse diagrama, observe que a função f, representada pela primeira flecha, relaciona elementos do conjunto A a elementos do conjunto B. A segunda flecha representa a função g, que relaciona elementos do conjunto B a elementos do conjunto C.

# Lei da função composta

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

Conhecendo duas funções, é possível encontrar a lei que define sua função composta.

Observe o exemplo a seguir.

Vamos considerar as funções $f$ e $g$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x^2 + 4$.

1º) Para obter a lei $(g \circ f)(x)$, partimos da lei de $g$, substituindo $x$ por $f(x)$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 4$$

$$(g \circ f)(x) = (f(x))^2 + 4$$

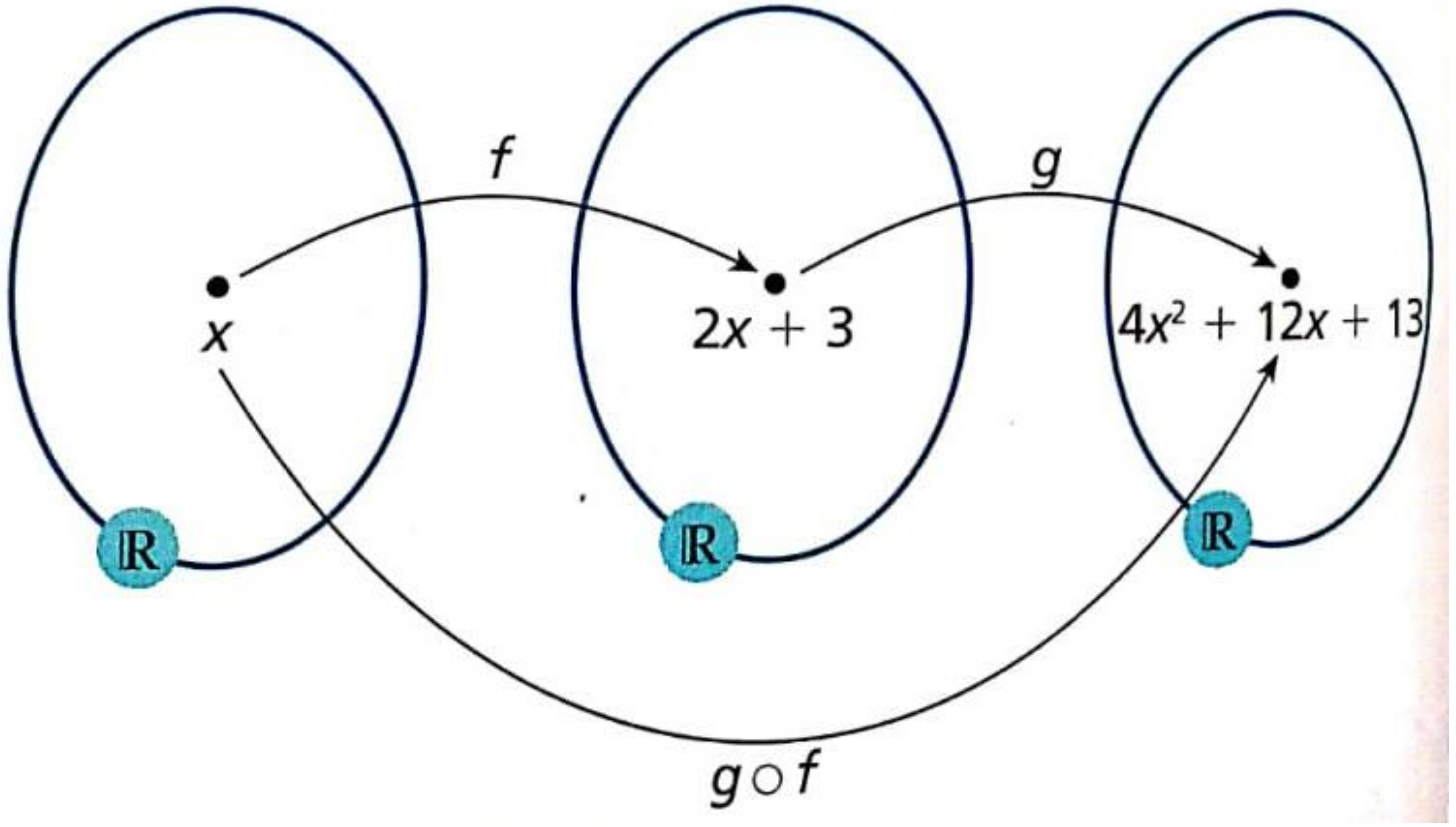
2º) Como $f(x)$ é igual a $2x + 3$, basta substituir:

$$(g \circ f)(x) = (2x + 3)^2 + 4$$

$$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x + 9 + 4$$

$$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x + 13$$

Portanto: $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x + 13$



# Exemplo



Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$, encontre a função composta de $f \circ g$ e também $g \circ f$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

Em geral $f \circ g \neq g \circ f$. *Lembrando que a notação $f \circ g$ significa que a função $g$ é aplicada primeiro e depois $f$.* Portando em $f \circ g$ é a função que primeiro subtrai 3 e então se eleva ao quadrado; $g \circ f$ é a função que primeiro se eleva ao quadrado e então subtrai 3.

# Exemplo

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

Considerem-se os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7\}$ e as funções $f: A \to B$ tal que $f(x) = 2x$, e $g: B \to C$ tal que $g(x) = x + 1$.

a) Calcular $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$ e $g(6)$ e fazer um diagrama para representar essas funções.

**➤ Resolução**

a)
- $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$
- $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$
- $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$
- $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$
- $g(0) = 0 + 1 = 1$
- $g(2) = 2 + 1 = 3$
- $g(4) = 4 + 1 = 5$
- $g(6) = 6 + 1 = 7$

# Exemplo

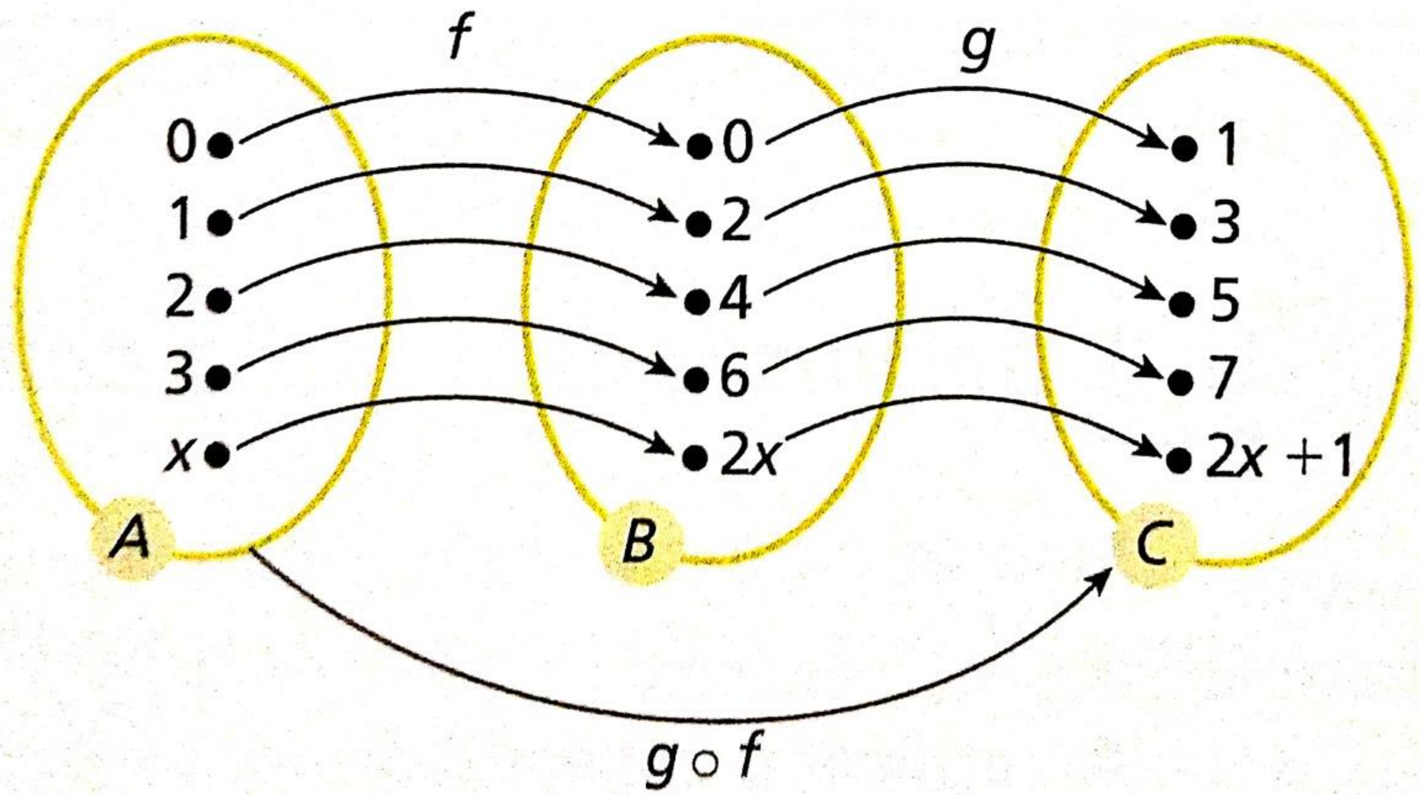
NIVELAMENTO
Engenharias 2020

Considerem-se os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7\}$ e as funções $f: A \to B$ tal que $f(x) = 2x$, e $g: B \to C$ tal que $g(x) = x + 1$.

b) Determinar $(g \circ f)(0)$, $(g \circ f)(1)$, $(g \circ f)(2)$ e $(g \circ f)(3)$.

**Resolução**

b)
- $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = 1$
- $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 3$
- $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 5$
- $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(6) = 7$



# Exemplo

Dadas as funções $f(x) = 2x^3$ e $g(x) = 2x + 3x^2$, todas com domínio e contradomínio igual ao conjunto dos números reais, teremos:

$$g \circ f(x) = 2(2x^3) + 3(2x^3)^2$$
$$g \circ f(x) = 4x^3 \ + 3 * 4x^6$$
$$g \circ f(x) = 4x^3 \ + 12x^6$$

$$f \circ g(x) = 2(2x + 3x^2)^3$$

# Exemplos



Considerando as funções reais $f(x) = 3x + 7$ e $g(x) = 4x - 1$, determinar a lei que define $f \circ g$ e a lei que define $g \circ f$.

➤ **Resolução**

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 7 =$
  $= 3(4x - 1) + 7 = 12x + 4$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4f(x) - 1 =$
  $= 4(3x + 7) - 1 = 12x + 27$

Determinar a função $g(x)$ sabendo que $f(x) = 5x$ e $f(g(x)) = 10x + 1$.

➤ **Resolução**

Sabemos que: $f(x) = 5x$

Então: $f(g(x)) = 5g(x)$

Sabemos também que: $f(g(x)) = 10x + 1$

Assim: $5g(x) = 10x + 1 \Rightarrow g(x) = \dfrac{10x+1}{5}$

Logo: $g(x) = 2x + \dfrac{1}{5}$

# Vamos ver aplicando no Cálculo 1...



Se $\lim_{x \to c} g(x) = b$ e $f$ é contínua em $b$ então:

$$\lim_{x \to c} f\left(g(x)\right) = f(b) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right)$$

**Exemplo:**

$$\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{\frac{x+3}{(x+3)(x^2-3x+9)}} = \sqrt[3]{\lim_{x \to -3} \frac{1}{(x^2-3x+9)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{(-3)^2 - 3(-3) + 9)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

# Vamos ver aplicando no Cálculo 1...



$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{\frac{u}{3}},$$

$$onde\quad u=3x\Rightarrow x=\frac{u}{3}\quad e\quad quando\quad x\to 0\Rightarrow u\to 0$$

$$\therefore \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{\frac{u}{3}}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{3}\frac{f(u)}{u}=\frac{1}{3}\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=\frac{1}{3}*1=3$$

# Vamos ver aplicando no Cálculo 1...



$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x^2-1)}{x-1} = \lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{\sqrt{u+1}-1},$$

$$onde \quad u = x^2 - 1 \Rightarrow x = \sqrt{u+1} \quad e \quad quando \quad x \to 1 \Rightarrow u \to 0$$

$$\therefore \lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{\sqrt{u+1}-1} = \lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{\sqrt{u+1}-1} * \frac{\sqrt{u+1}+1}{\sqrt{u+1}+1}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{f(u)(\sqrt{u+1}+1)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{u} * \lim_{u\to 0}(\sqrt{u+1}+1) = 1 * 2 = 2$$

# Função inversa



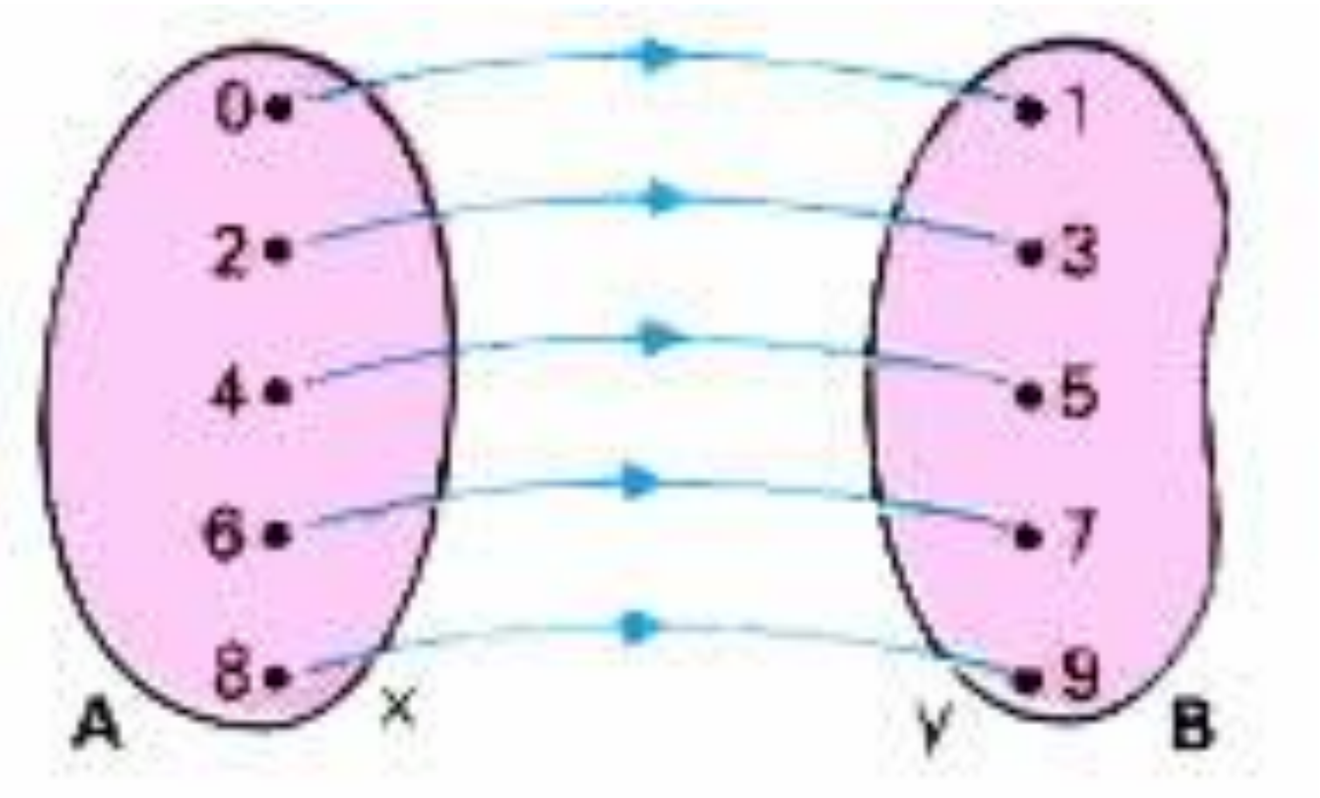
A **função inversa** “transforma” o que é **domínio** em **imagem** e “transforma” o que é **imagem** em **domínio**. Para relizar essa transformação, devemos tomar cuidado para ver se a função é **bijetora**, pois se não for, não existirá função inversa.

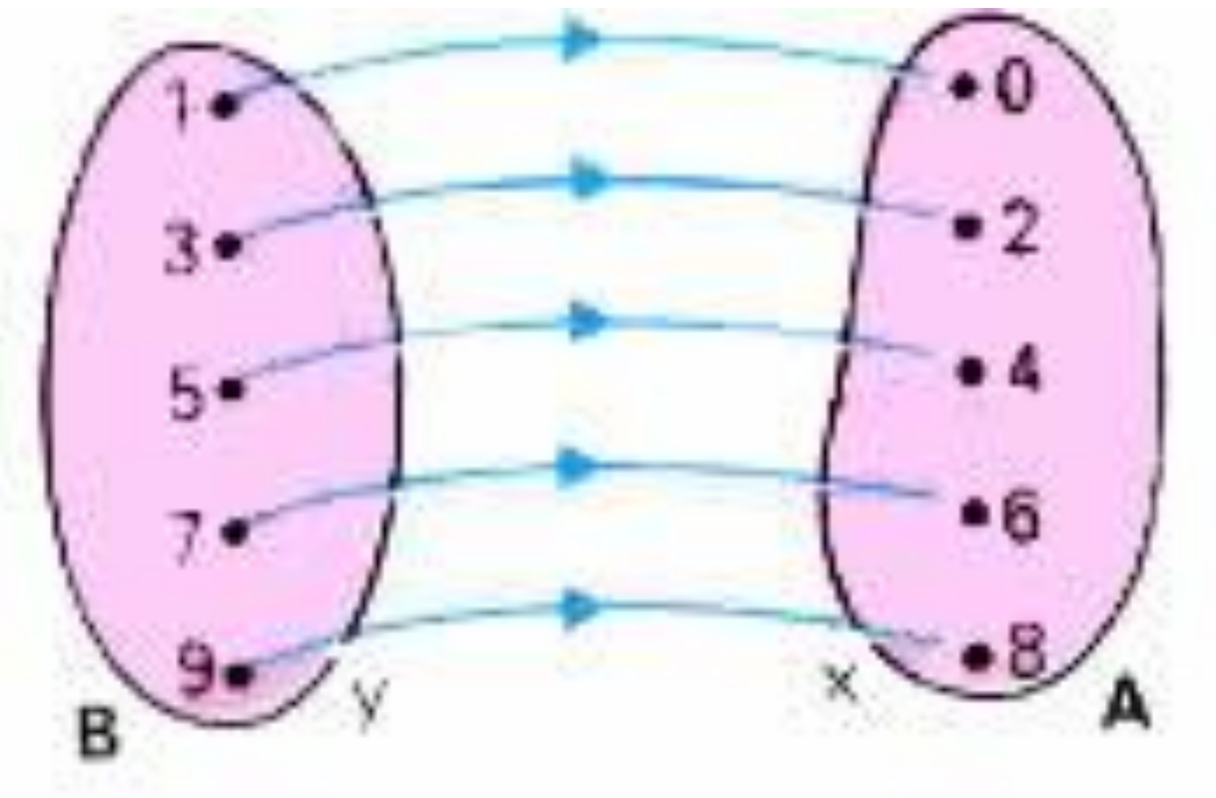
Dada uma função bijetora $f: A \to B$, chamamos de **função inversa** de $f$ a função $f^{-1}: B \to A$ tal que, para todo $x \in A$ e $y \in B$, temos: $f(x) = y$ e $f^{-1}(y) = x$

# Função inversa

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

Consideremos os conjuntos A={0,2,4,6,8} e B={1,3,5,7,9} e a função f: A→B definida por y=x+1. A função f está representada no diagrama abaixo:



# Lei da função inversa



Conhecendo a lei que define uma função bijetora $f: A \to B$, podemos obter a lei que define sua inversa, $f^{-1}: B \to A$. A função $f: A \to B$, definida por $f(x) = 15x$.

Partindo da lei que define $f$, encontramos a lei que define $f^{-1}$:

1º) Lembrando que $f(x)$ é a imagem de $x$ através da função $f$ e que $y$ também representa essa imagem, escrevemos a lei que define $f$, substituindo $f(x)$ por $y$.

Na situação estudada, $f(x) = 15x$ fica na forma $y = 15x$.

2º) Invertemos as variáveis na lei que define $f$, ou seja, trocamos $x$ por $y$ e $y$ por $x$.

No nosso exemplo, $y = 15x$ assume a forma $x = 15y$.

3º) Expressamos $y$ em função de $x$, obtendo $f^{-1}(x)$: $x = 15y \Rightarrow y = \dfrac{x}{15}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{15}$

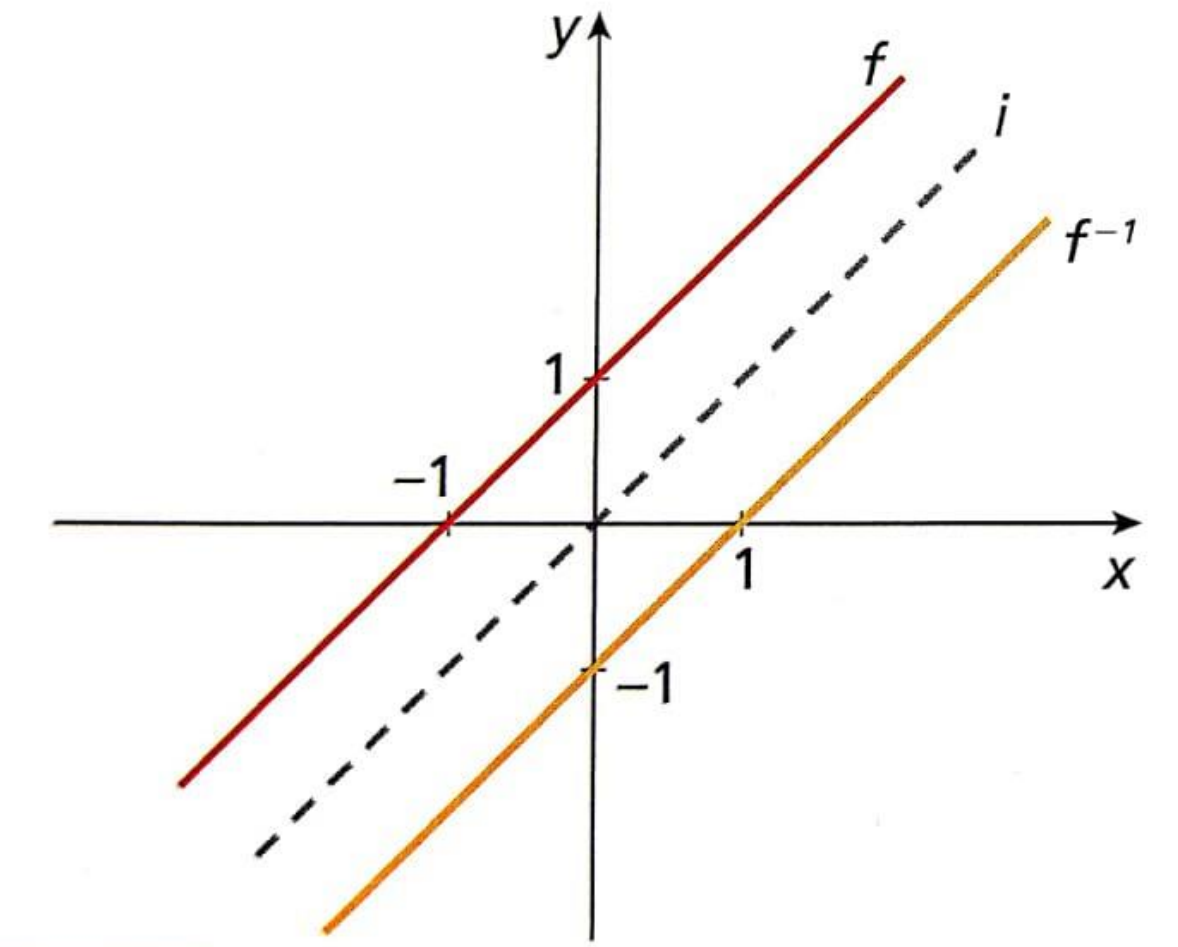
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 15x$ | $f(1) = 15$ | $f(2) = 30$ | $f(3) = 45$ | $f(4) = 60$ |
| $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{15}$ | $f^{-1}(15) = 1$ | $f^{-1}(30) = 2$ | $f^{-1}(45) = 3$ | $f^{-1}(60) = 4$ |

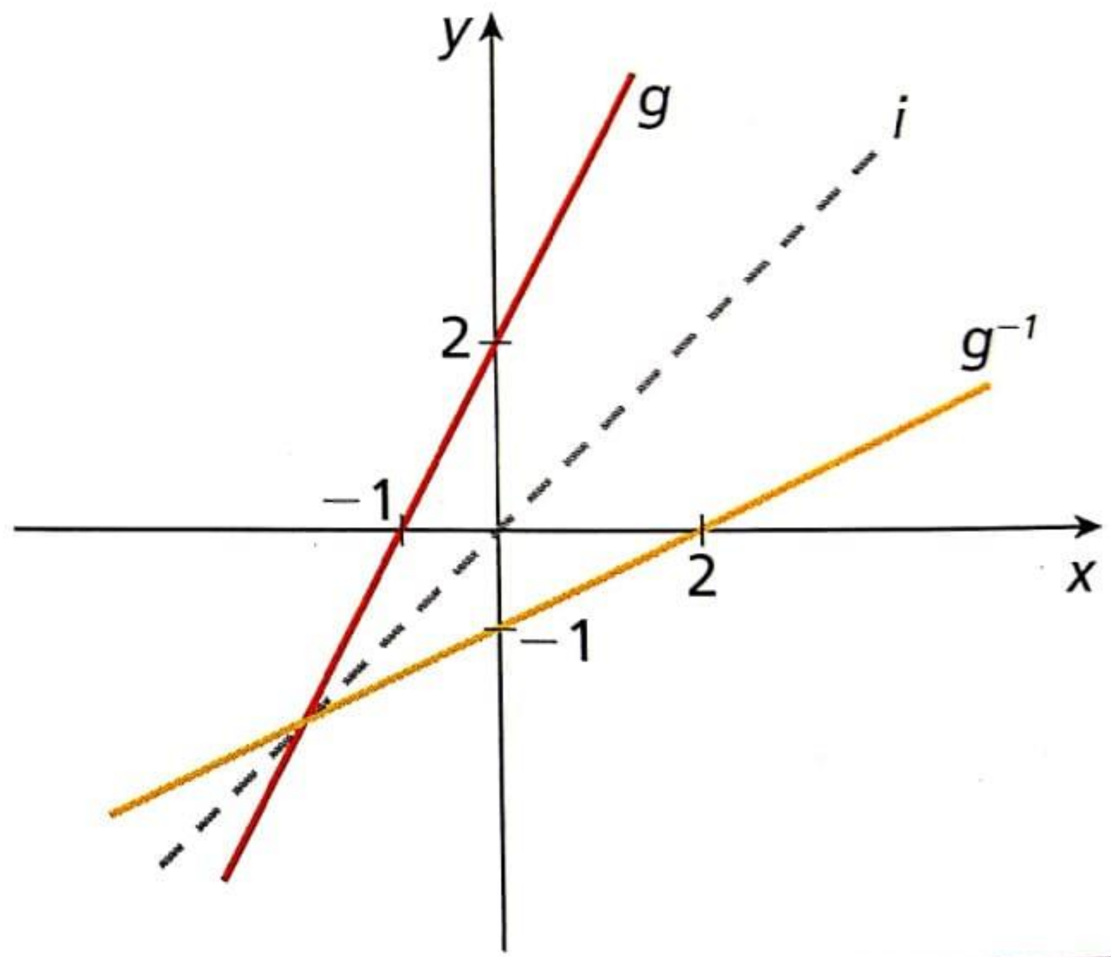
# Gráfico da função inversa



Os gráficos de uma função e de sua inversa são simétricos em relação ao gráfico da função *i(x)=x* que contém a bissetriz dos quadrantes ímpares.

| $f(x) = x + 1$<br>$f^{-1}(x) = x - 1$ | $g(x) = 2x + 2$<br>$g^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} - 1$ |
|---|---|

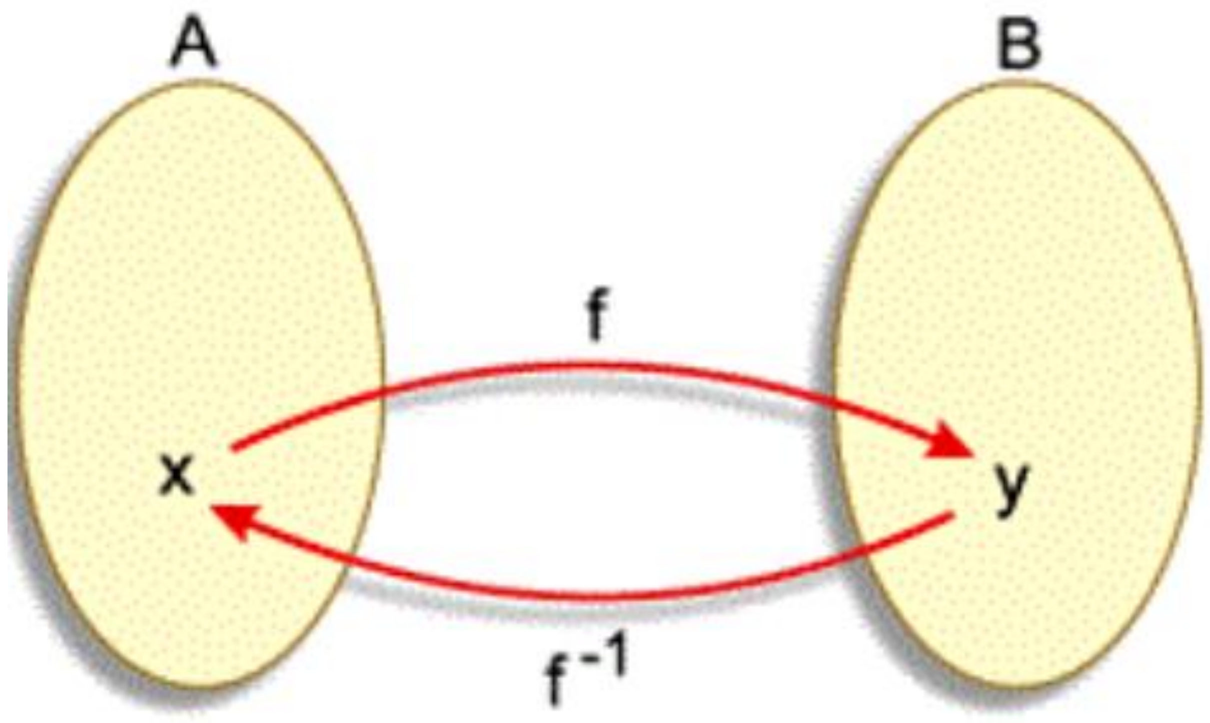



# Exemplificando

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

- Tomemos como exemplo a função bijetora $f(x) = 4x$;
- Escrevemos $f(x) = 4x$ na forma $y = 4x$;
- Em $y = 4x$, trocamos y por x e x por y, obtendo $x = 4y$;
- Em $x = 4y$, determinamos y em função de x, obtendo $y = x/4$;
- Escrevemos $y = x/4$ na forma $f^{-1}(x) = x/4$, que é a inversa de f.



# Exemplo



Agora, seja a função f:R→R com $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$. Vamos obter a sua inversa:

$$y = \sqrt[3]{x+4}$$

$$y^3 = x + 4$$

$$x^3 = y + 4$$

$$y = x^3 - 4 = f^{-1}(x)$$

# Exemplo

Qual a inversa da função **f(x) =** $\sqrt{3x-2}$

Resolvendo, temos: **y** = $\sqrt{3x-2}$

Elevando ambos os lados ao quadrado: $y^2 = 3x - 2$

Colocando **x** em função de **y**: $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)$

Trocando x por y: **y** = $\frac{1}{3}(x^2 + 2)$

Por fim,

$$\boxed{f^{-1} = \frac{1}{3}(x^2 + 2)}$$

# Vamos ver aplicando no Cálculo 1...

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

**Exemplo 1.** *Seja* $y = f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$*. Determine a função inversa e sua derivada.*

Função inversa:

$$\begin{aligned} y(x-1) &= 2x+3 \\ yx - y &= 2x+3 \\ (y-2)x &= 3+y \\ x = f^{-1}(y) &= \frac{3+y}{y-2} \end{aligned}$$

Derivada:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1(y-2)-(3+y)1}{(y-2)^2} \\ x' &= \frac{-5}{(y-2)^2} \end{aligned}$$

# Vamos ver aplicando no Cálculo 1...

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

Caminho alternativo usando a expressão para a derivada da função inversa $\dfrac{df^{-1}}{dy} = \dfrac{1}{f'(x)}$:

Derivada da função original:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2(x-1)-(2x+3)}{(x-1)^2} \\
f'(x) &= -\frac{5}{(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

Portanto, derivada da função inversa

$$
\begin{aligned}
\frac{df^{-1}}{dy} &= \frac{1}{\frac{df}{dx}} = -\frac{1}{\frac{5}{(x-1)^2}} \\
\frac{df^{-1}}{dy} &= -\frac{1}{5}(x-1)^2
\end{aligned}
$$

# Vamos ver aplicando no Cálculo 1...

NIVELAMENTO
Engenharias 2020

Usando a equação acima para a função inversa, temos então

$$\begin{aligned}
\frac{df^{-1}}{dy} &= -\frac{1}{5}\left(\frac{3+y}{y-2}-1\right)^2 \\
&= -\frac{1}{5}\left(\frac{3+y-(y-2)}{y-2}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{5}\left(\frac{5}{y-2}\right)^2 \\
&= -\frac{5}{(y-2)^2}\,,
\end{aligned}$$

que iguala o resultado anterior.

PET
CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UFAL

# OBRIGADA 🥰

@petct.ufal