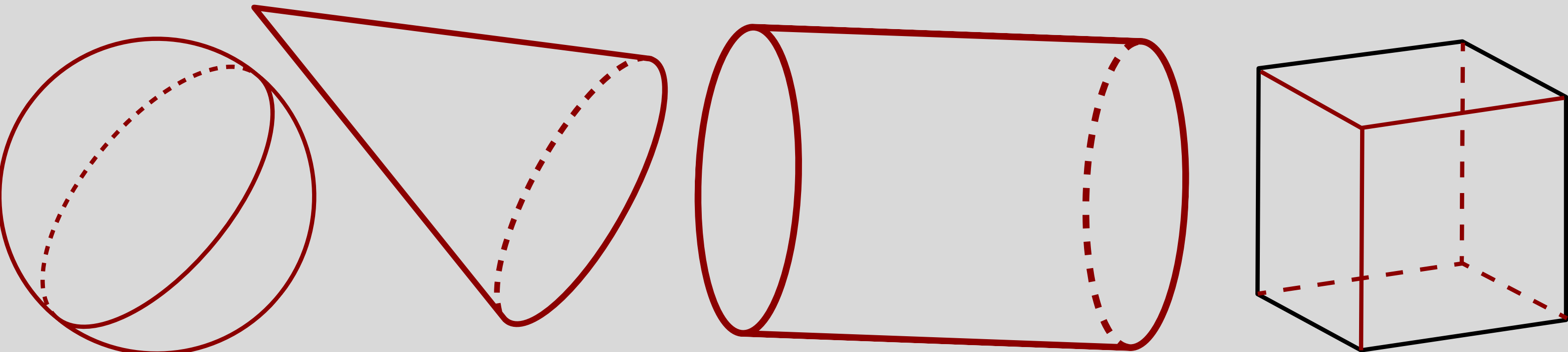
Ciência e Tecnologia - UFAL

CONEXÕES DE SABERES

MANUAL DE SOBREVIVÊNCIA EM CALCULO 1

Marcus OLIVEIRA, Mário JUVÊNCIO, Matheus MONTEIRO.



Sumário

MSC1 Capítulo 1

Prefácio

1.1: Resumo

O presente manual tem por objetivo, a aprovação dos alunos matriculados nos cursos de exatas da Universidade Federal de Alagoas na disciplina de cálculo 1. Essa ideia surgiu da necessidade que o PET Ciência & Tecnologia tem de ajudar os ingressantes dos cursos nas disciplinas iniciais.

Todos os exercícios e assuntos presentes, foram retirados da 6ªed. do livro "Cálculo, James Stewart ", tomando base da metodologia apresentada pelos professores da universidade.

1.2: Agradecimentos

Nossos agradecimentos ficam a parte para o Centro de Tecnologia (CTEC-UFAL), pela locação da sala de permanência de nosso grupo; Para o Instituto de Matemática (IM-UFAL), pelo desempenho dos profissionais; E para a própria Universidade Federal de Alagoas(UFAL), pelo ensino público, referenciado e de qualidade para a comunidade acadêmica.

MSC1 Capítulo 2

Introdução

A partir daqui, iremos abordar os conteúdos da disciplina separando-os por módulos, seguindo a metodologia abordada pela maioria dos professores. Em primeiro lugar, falaremos sobre o conceito de **LIMITES**, e como resolvê-los da forma correta (aquela da preferência do professor). Então é mão na massa, lápis e papel na mão, aula online conectada e câmera e microfone desligados (pra não fazer nada de errado em público), porque agora vamos dar início aos trabalhos.

MSC1 Capítulo 3

Estudo dos Limites

É nesse capítulo que iremos aprender a definir e interpretar um limite; dessa forma escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "O limite de $f(x)$ quando x tende a, é igual a L", se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a. (STEWART, 2009)

Traduzindo esse texto, entendemos como: "Se pegarmos um valor de x muito próximo de a, mas não igual a a, então o valor de $f(x)$ estará tão próximo de L, que podemos assumir(em alguns casos) que esse valor será o próprio L".

Dessa forma, podemos começar a brincar com alguns limites mais simples; Por exemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

A primeira coisa que devemos observar é que a função $f(x)$ não está definida para x = 1, pois, o denominador da fração seria igual a zero, e como sabemos, não é possível dividir um número real por zero; então, o que devemos fazer?

Podemos determinar o valor de $f(x)$ aproximando valores específicos de x, isto é, chutar valores reais para x exceto, x=1, pois este não está definido em $f(x)$. Vamos supor inicialmente x=0,5; dessa forma temos:

$$\frac{0,5-1}{0,5^2-1} = \frac{-0,5}{-0,75} = \frac{2}{3} \approx 0,667.$$

Por outro lado, se escolhermos um valor de x=0,75, iremos obter $f(x) \approx 0,301$. Dessa forma, conseguimos observar que a medida que x vai se aproximando de 1, o numerador e o denominador vão se aproximando de 0, e atualmente, não temos uma resposta para esse quociente $\frac{0}{0}$.

O que podemos fazer é modificar algum termo desse limite de modo que esse quociente desapareça. Para esse limite de $f(x)$ em especial, podemos manipular o denominador de forma que ele possa ser "cancelado"com o termo no numerador. Vamos lá:

$$\lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x-1)\cdot(x+1)}$$

Agora, possuímos termos em comum que podem ser "cancelados", porém, muito cuidado na hora de fazer isso; sempre que for "cancelar"termos em um limite **NUNCA** se esqueça de afirmar que "a variável é diferente de seu limite", em outras palavras, que $x \neq 1$. Isso pode parecer óbvio, mas se seu professor for um matemático, ele ficará extremamente magoado, pois nesse momento, quando você não assume essa condição, é a mesma coisa de você estar aceitando a veracidade do quociente $\frac{0}{0}$, e como vimos anteriormente, não é bem assim que funciona; retomando o nosso limite:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x-1)\cdot(x+1)} = \\
&\lim_{x\to1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)} = \\
&\lim_{x\to1} \frac{1}{(x+1)}
\end{aligned}$$

Como podemos ver, esse limite não possui mais nenhum impedimento para valores de x muito próximos de 1; dessa forma, podemos aplicar o **MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO DIRETA**, que consiste em substituir a variável pelo valor do limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

Saca só!

Agora, baseado em tudo que foi dito nessa seção, iremos enumerar algumas **DICAS** valiosas para vocês na hora da tão temida prova.

1. Sempre definir onde sua função existe ou não (estabelecer o domínio);
2. Após definir o domínio, verificar se o limite naquele valor está definido (quociente $\neq \frac{0}{0}$);
3. No caso de termos que possam ser cancelados em um limite, **JAMAIS** esquecer de justificar o porquê do cancelamento ser possível (como foi explicado acima);
4. Por último, e não menos importante, responder as questões 31 e 40 da 6ªed. STWEART, James; disponível na biblioteca virtual da universidade.

3.1: O limite de uma Função

Nessa seção iremos abordar como o limite se comporta com algumas funções em particular e também, avaliar limites infinitos. Para iniciar, usaremos o seguinte exemplo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{2}{x-3}$$

Para a função em questão, x=3 fará o denominador zerar, e o limite quando x tende a 3 fará o denominador se aproximar de zero; como bem sabemos, um número real dividido por um número muito próximo de zero resultará em um valor que tende ao infinito (positivo ou negativo). Além disso, diferente do exemplo anterior, não existe artifício algébrico para desfazer esse numerador; logo, dizemos que esse limite tende ao infinito

$$\lim_{x \to 3} \frac{2}{x-3} = \infty$$

Em casos dessa espécie, chamamos a reta x = 3 de **ASSÍNTOTA VERTICAL** de $f(x)$. É atribuido esse nome por conta do esboço da curva que não intercepta(toca) tal reta. Dessa forma, sempre que a questão solicitar que você determine as assíntotas verticais,você deverá avaliar os valores que estão fora do domínio da função; se for um quociente, esse valor será aquele que zera o denominador; no caso de outras funções, é necessário conhecer o domínio das mesmas.

Ainda com esse exemplo, podemos avaliar os limites laterais dessa função.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3}$$

O sobrescrito positivo indica que o limite está sendo avaliado lateralmete a direita de 3, ou seja valores **MAIORES** que 3.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x-3}$$

Para o sobrescrito negativo, o siginificado é análogo, porém, o limite está sendo avaliado a esquerda de 3, portanto, valores **MENORES** que 3. Podemos concluir que:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3} = \infty$$
$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x-3} = -\infty$$

Com base nesses resultados, existe um teorema que nos diz que, se:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Então, o limite não existe.

Saca só!

Para finalizar a seção, vamos para as dicas:

1. Quando o limite de uma função tender ao infinito (positivo ou negativo), e ele não puder ser simplificado, o valor a qual a variável está tendendo pode ser considerado uma assíntota vertical ao gráfico da função (como no exemplo apresentado);
2. Para confirmar de fato, que um limite existe, ele deverá ser analisado lateralmente (pela esquerda e pela direita);
3. Não esquecer das dicas dadas na sessão anterior, no que diz respeito a resolução de limites.

3.2: Cálculos utilizando propriedades dos limites

Iniciaremos essa seção discutindo sobre uma característica bastante comum das funções matemáticas, que são as propriedades; e com os limites não é diferente. Na literatura, existe uma tabela que explicita de forma clara tais propriedades (Página 89).

O nosso novo conceito será um teorema bastante importante para o cálculo, é conhecido como "Teorema do Confronto". Não precisa se preocupar com o nome pouco sugestivo, meus jovens alunos, pois ele é de grande serventia e muito versátil na hora resolver limites mais complexos. Vamos tomar por exemplo, o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}\right)$$

Qual seria o procedimento a se assumir? (sentar e chorar não é a resposta correta). O teorema nos diz que: "se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ e o $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$ então, $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$".

A partir dessa definição, podemos resolver o limite inicialmente apresentado. Segue aqui a metodologia que os professores adotam e preferem.

1. Separe a função f(x) como sendo a mais trabalhosa $\left(\text{no nosso caso, é o } \sin\frac{1}{x}\right)$;
2. Divida f(x) em uma desigualdade de 3 termos, da seguinte forma:

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

   Isso acontece pois, a função sen(x) está limitada entre [-1,1].

3. Agora incremente,um a um, os demais termos do limite original (nesse caso,iremos multiplicar cada termo por x^2):

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$$

4. Dessa forma, chegamos ao padrão do teorema, basta aplicá-lo; sejam:

$$g(x) = -x^2, \quad f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \quad h(x) = x^2. \tag{3.1}$$

   vamos tomar os limites em g(x) e h(x):

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0; \tag{3.2}$$

5. Por fim, concluiremos a resposta da seguinte forma (importante fazer dessa forma):

   Como $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ e o $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x)$ então, pelo Teorema do Confronto, o $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Saca só!

Agora, vamos para as dicas da seção:

1. Sempre resolver os limites citando as propriedades, isso deixa suas respostas mais completas e também faz com que o professor sinta segurança nas suas respostas;
2. Sempre que aparecer um limite muito complexo ou com funções trigonométricas, desconfie e use o Teorema do Confronto para resolvê-lo;
3. Responder as questões 04, 06, 26, 28, 30, 46, 60 e 62 do capítulo 2.3.

3.3: Continuidade

Chegamos finalmente a um dos conteúdos de maior importância para este módulo, nele iremos identificar quando de fato uma função é contínua ou não, e também conhecer e resolver problemas envolvendo descontinuidades.Primeiro, definiremos o que seria uma função contínua:

Dada uma função $f(x) =$ a; f é dita contínua, quando:

1. $f(x)$ deve existir para todo x em seu domínio;
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ também deverá existir;
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Logo, todas as condições devem ser satisfeitas para afirmar, de fato, que a função é contínua; Para conhecer algumas funções que são consideradas contínuas em seu domínio basta consultar a tabela disponível na página 111.

Um exemplo que podemos usar é o da função "maior inteiro", que possui descontinuidades em todo x inteiro. Com isso, chegamos ao conceito de continuidade a direita ou esquerda. Em suma, possui as mesmas condições anteriores, com um pequeno detalhe na terceira.

Nesse caso, o limite só necessita existir de um dos lados; dizemos, então: "A função é contínua a esquerda/direita de a.

Para fixar essas definições, vamos a um exemplo:

Mostre que a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ é contínua em [-1,1].

Devemos satisfazer as proposições feitas acima, dessa forma, temos então:

$$f(1) = f(-1) = 0$$

Logo, f(a) existe.

Depois:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$$

Logo o limite existe.

Por último:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = f(-1) = 0$$

Logo a função é contínua no intervalo dado.

Por último, vamos comentar sobre mais um teorema de grande importância para o cálculo; o "Teorema do Valor intermediário". Basicamente, esse teorema nos dá autoridade para mostrar que determinada função possui raiz (zero de função). ele nos diz que:

"Se *f(x)* é uma função contínua em um intervalo [a,b] onde $f(a) \neq f(b)$ e $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ então existe um número c em [a,b], tal que, $f(c) = 0$".

Para entender de fato o teorema, vamos a um exemplo:

MOSTRE que existe uma raiz real da equação:

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

Tomaremos a função $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$, e encontraremos um intervalo onde ela passa de negativa para positiva. Como f é um polinômio, é contínua em todo seu domínio.

Se adotarmos o intervalo [1,2], chegaremos em $f(1) = -1 < 0$ e $f(2) = 12 > 0$.

Temos então todas as ferramentas para nossa solução, para responder, **FAÇA DA SEGUINTE MANEIRA**:

"Pelo teorema do valor intermediário, existe um c pertencente a [1, 2], tal que $f(c) = 0$".

Saca só!

Para encerrar a seção, vamos para nossas dicas:

1. Sempre lembrar dos 3 passos para provar que uma função é contínua;
2. Para usar o teorema do valor intermediário, sempre mostrar que a função é contínua, usar um intervalo que faça a função ir do negativo ao positivo e por fim, aplicar o teorema.

3.4: Limites no infinito

Para finalizar nosso módulo, falaremos dos limites no infinito. Para esse conteúdo, temos que observar o comportamento das funções nesse tipo de limite. Para um exemplo temos a função:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Agora, tomaremos o limite de f:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \tag{3.3}$$

Esse resultado surge do pressuposto de que qualquer número real dividido por um número muito grande se aproxima de zero. Então como fazer para resolver um limite mais complexo?

Seja o seguinte limite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

A primeira vista, parece algo bastante complicado, porém existe uma definição que simplificará esse tipo de problema.

"Quando o **LIMITE TENDE AO INFINITO** podemos selecionar o termo de maior grau do denominador e dividir toda a fração por este termo". A partir desse conceito, resolveremos:

Temos que o termo de maior grau é $5x^2$, dividindo o limite por esse termo, temos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2}}{\frac{5x^2 + 4x + 1}{5x^2}} \tag{3.4}$$

Simplificando os termos, temos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}. \tag{3.5}$$

E nosso último conceito, é o de assíntota horizontal. A definição nos diz:

"Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ a reta y = L, será assíntota vertical de f".

Ou seja, se a resposta do limite infinito for um número, esse número será a assíntota ao gráfico da função.

Saca só!

Para finalizar a seção e o módulo, nossas **DICAS**:

1. Quando se deparar com um limite no infinito,lembrar de dividir pelo termo de maior grau do denominador;
2. Fazer todas as simplificações possíveis (professores adoram);
3. Achar todas as assíntotas (às vezes as funções possuem mais de uma).

3.5: Resolução de Exercícios

Questão 1.

a) Encontre as assíntotas do gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$;

Resolução:

Na resolução de problemas de assíntotas, podemos adotar a seguinte metodologia geral:

1. Definir o domínio da função f(x);

   O domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ é dado pelos pontos onde $4 - x^2 > 0$.

   Portanto o Domínio pode ser representado por:

$$\mathcal{D}(f) = \left\{x \in \mathbb{R};\ 4 - x^2 > 0\right\} \quad \mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R};\ -2 < x < 2\}$$

2. Determinar as assíntotas verticais:

   Primeiramente, enunciamos a definição do conceito de assíntotas verticais. Essa metodologia ajudará a fixar os conceitos e auxiliar na resolução de problemas. Logo, enunciamos da seguinte forma:

   Assíntota vertical é a reta $x = a$ tal que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$;

   Agora devemos encontrar os pontos do domínio onde f(x) apresenta descontinuidades infinitas, isto é, pontos em que apenas o denominador se anula (lembrando que quando o numerador e denominador se anulam estamos diante de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, na descontinuidade infinita apenas o denominador se anula).

   O denominador de f(x) será igual a zero quando $4 - x^2 = 0$, isto é, quando $x = -2$ e $x = 2$. Além disso, o numerador nunca será nulo, portanto, estamos diante de dois pontos de descontinuidade infinita.

   Após encontrar os pontos de descontinuidade infinita, calculamos o limite de f(x) nas vizinhanças desses pontos; para avaliar as assíntotas verticais devemos calcular os limites laterais, ou seja, determinar $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$:

   Calculando os limites laterais de $f(x)$ em $x = -2$ e $x = 2$, temos:

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{\sqrt{(2 - x)(2 + x)}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

   Note que o termo $2 + x = 0^+$, pois lembre-se que o x se aproxima de -2 pela direita, logo, a diferença resulta em um valor tão pequeno quanto se queira, mas positivo. Analogamente, temos:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{\sqrt{(2 - x)(2 + x)}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

   Portanto, as retas $x = -2$ e $x = 2$ são assíntotas verticais do gráfico de $f(x)$.

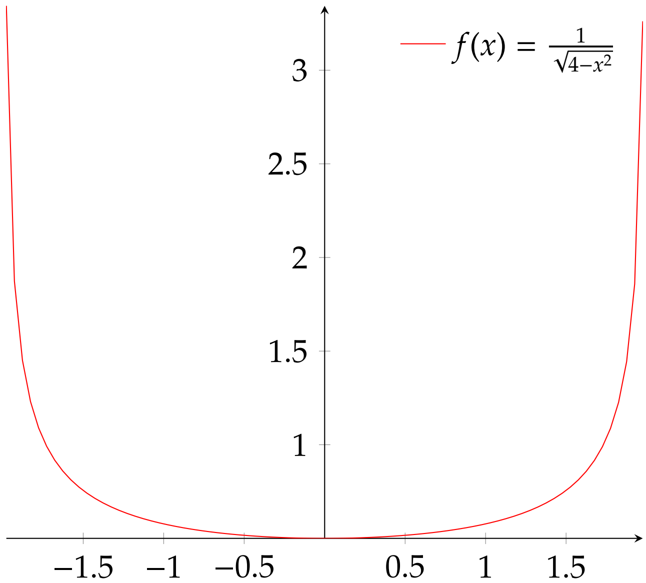
3. Determinar as assíntotas horizontais:

Primeiramente, enunciamos o conceito de assíntotas horizontais:

A reta Y = L é chamada assíntota horizontal da curva f(x) se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

Em seguida, precisamos verificar se $f(x)$ está definida para um intervalo (a, ∞) ou $(-\infty, a)$. Se estiver definida, basta aplicar o limite com x tendendo a ∞ e/ou $-\infty$ para encontrar as assíntotas horizontais da função.

Analisando o domínio da função, podemos verificar que f(x) não está definida para $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$. Portanto, não há assíntotas horizontais no gráfico de $f(x)$.



b) Encontre as assíntotas do gráfico da função f(x) = $\dfrac{3x+4}{\sqrt{4x^2-7}}$;

Resolução:

De modo análogo, temos:

O domínio de $f(x)$ é dado por:

$$\mathcal{D}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R};\, x < \frac{-\sqrt{7}}{2} \text{ ou } x > \frac{\sqrt{7}}{2} \right\}$$

Assíntota vertical é a reta $x = a$ tal que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$;

O denominador de f(x) é zero para $x = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Logo, calculando $\lim_{x\to -\frac{\sqrt{7}}{2}^-} f(x)$ e

$\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{7}}{2}^+} f(x)$, temos:

$$\lim_{x\to-\frac{\sqrt{7}}{2}^-}\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2-7}}=\lim_{x\to-\frac{\sqrt{7}}{2}^-}\frac{3x+4}{\sqrt{(2x-\sqrt{7})(2x+\sqrt{7})}}=\frac{\frac{8-3\sqrt{7}}{2}}{0^+}=\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{7}}{2}^+}\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2-7}}=\lim_{x\to\frac{\sqrt{7}}{2}^+}\frac{3x+4}{\sqrt{(2x-\sqrt{7})(2x+\sqrt{7})}}=\frac{\frac{3\sqrt{7}}{2}+4}{0^+}=\infty$$

Portanto, as retas $x=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ e $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ são assíntotas verticais.

A reta Y = L é chamada assíntota horizontal da curva f(x) se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.

Como f(x) está definida no intervalo $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2},\infty\right)$ podemos calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2-7}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x+4}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{4x^2-7}}{\sqrt{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x+4}{|x|}}{\sqrt{\frac{4x^2-7}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3-\frac{4}{x}}{\sqrt{4-\frac{7}{x^2}}}=-\frac{3}{2}$$

.

$\left(\text{Observe que }\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x}=0\text{ e }\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7}{x^2}=0\right)$

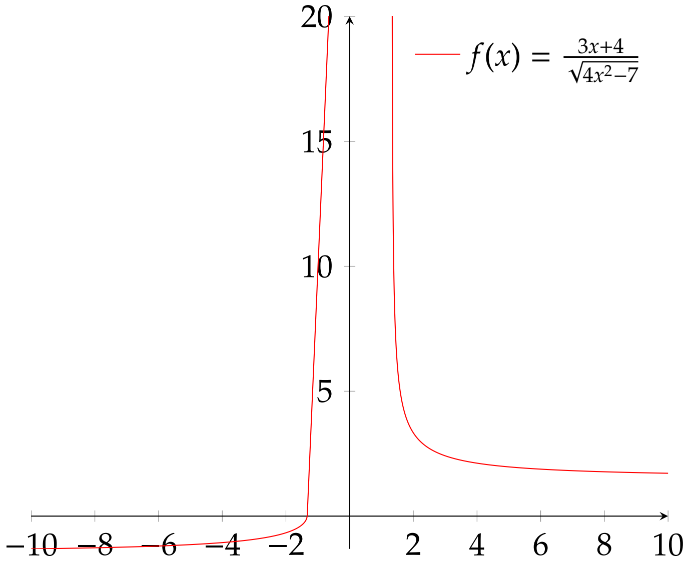
Logo, a reta $Y=-\dfrac{3}{2}$ é assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$.

De forma análoga, obtemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{4x^2-7}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x+4}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{4x^2-7}}{\sqrt{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x+4}{|x|}}{\sqrt{\frac{4x^2-7}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{4-\frac{7}{x^2}}}=\frac{3}{2}$$

.

Logo, a reta $Y = \dfrac{3}{2}$ é assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$.



Questão 2. Calcule o limite de $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$:

Para resolver questões de limites podemos adotar a seguinte metodologia:

1. Determinar o domínio da função $f(x)$:

   A função $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$ só está definida para $4 - x^2 \geq 0$ e $x \neq 2$. Então, o domínio de f(x) é dado por:

   $$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R};\ -2 \leq x < 2\}$$

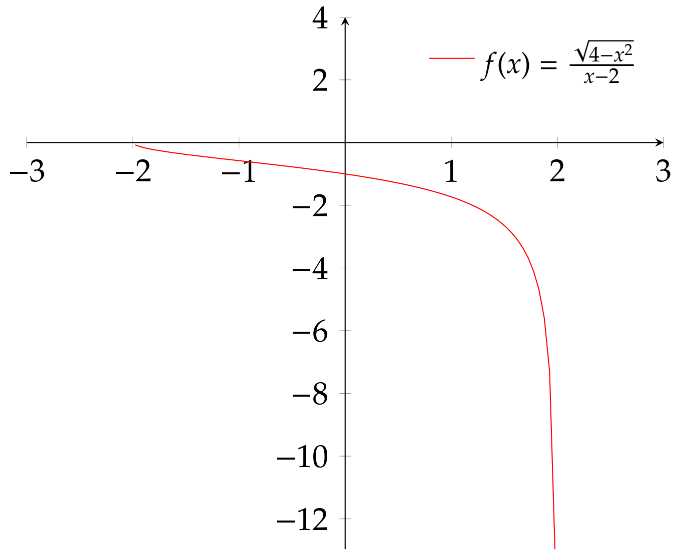
2. No cálculo de limites devemos fazer uso da regra da substituição direta. Se a aplicação da regra da substituição direta resultar em indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$, temos que manipular a expressão para eliminar os termos que anulam o denominador e o numerador.

   Aplicando a regra da substituição direta obtemos uma indeterminação $\dfrac{0}{0}$. Então, temos que manipular a expressão de f(x) para remover o termo que anula o denominador e o numerador:

Multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{4-x^2}$, temos:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(\sqrt{4-x^2})(\sqrt{4-x^2})}{(x-2)(\sqrt{4-x^2})} = \lim_{x\to 2^-}\frac{4-x^2}{(x-2)(\sqrt{4-x^2})} =$$
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)(\sqrt{4-x^2})} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-\cancel{(x-2)}(2+x)}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{4-x^2})} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-x-2}{\sqrt{4-x^2}} =$$
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-x-2}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} = \frac{-4}{\sqrt{4(0^+)}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

Note que podemos cortar o termo $(x-2)$ do numerador e denominador, pois quando calculamos limites estamos interessados apenas na vizinhança e não no ponto. O x está tendendo a 2 pela esquerda, mas nunca será igual a 2. Logo, o termo $x-2 \neq 0$.



Questão 3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{\sqrt{x+21}-\sqrt{25}} & \text{se } x > 4 \\ Cx+3 & \text{se x} \leq 4 \end{cases}$$

Determine o valor de C para o qual a função é contínua em x = 4.

Resolução:

Note que temos um problema de estudo da continuidade de uma função definida por partes. Logo, podemos utilizar a seguinte metodologia para resolver esse problema:

1. Determinar o domínio das funções:

   Determinando o domínio da função f(x), temos:

   $$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$$

2. Enunciar a definição de continuidade de uma função:

   Uma função f é contínua em um número a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Essa condição nos diz que $f(a)$ deve estar definida, $\lim_{x \to a} f(x)$ deve existir e, além disso, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

3. Estudar a continuidade da função:

   A função $Cx + 3$ é uma função polinomial e definida no intervalo aberto $(-\infty, 4)$. Portanto, f(x) é contínua no intervalo $(-\infty,\ 4)$. A função $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{\sqrt{x+21} - \sqrt{25}}$ é contínua em todo o seu domínio e está definida no intervalo $(4,\ \infty)$. Logo, $f(x)$ é contínua no intervalo $(4,\ \infty)$.

4. Avaliar a continuidade da função no ponto de interesse:

   Avaliando a continuidade de $f(x)$ no ponto $x = 4$, temos:

   Calculando o valor de $\lim_{x \to 4^+} f(x)$, temos:

   $$\lim_{x \to 4^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{\sqrt{x+21} - \sqrt{25}} = \frac{0}{0}$$

   Logo, estamos diante de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Então, devemos rearranjar a expressão para eliminar os termos que anulam o numerador e o denominador, provocando a indeterminação:

   Multiplicando o numerador e denominador por $(\sqrt{x+21} + \sqrt{25})$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 4^+} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{4})(\sqrt{x+21}+\sqrt{25})}{(\sqrt{x+21}-\sqrt{25})(\sqrt{x+21}+\sqrt{25})}\\
&= \lim_{x\to 4^+} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{4})(\sqrt{x+21}+\sqrt{25})}{(\sqrt{x+21})^2-(\sqrt{25})^2}\\
&= \lim_{x\to 4^+} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{4})(\sqrt{x+21}+\sqrt{25})}{x-4}
\end{aligned}
$$

Multiplicando por $(\sqrt{x}+\sqrt{4})$ o numerador e o denominador, temos:

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 4^+} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{4})(\sqrt{x+21}+\sqrt{25})(\sqrt{x}+\sqrt{4})}{(x-4)(\sqrt{x}+\sqrt{4})}\\
&= \lim_{x\to 4^+} \frac{((\sqrt{x})^2-(\sqrt{4})^2)(\sqrt{x+21}+\sqrt{25})}{(x-4)(\sqrt{x}+\sqrt{4})}\\
&= \lim_{x\to 4^+} \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x+21}+\sqrt{25})}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+\sqrt{4})}\\
&= \lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x+21}+\sqrt{25}}{\sqrt{x}+\sqrt{4}} = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Lembre-se de justificar que estamos avaliando as vizinhanças de $x = 4$, e que por este motivo podemos cancelar os termos comuns $(x-4)$ do numerador e do denominador.

Logo, para que $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 4$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \frac{5}{2}$. Isto é,

$$\lim_{x\to 4^-} Cx + 3 = 4C + 3 = \frac{5}{2}$$

.

Portanto, $C = -\frac{1}{8}$.

Apêndices

$\mathbb{MSC}1$ *Apêndices* $\mathbb{A}$

Dicas de Leitura

A.1: James Stewart

Indicamos a versão utilizada nesta apostila, o primeiro volume da edição 6 de "Cálculo" de James Stewart (STEWART, 2009). Pode encontra-lo na Sibi UFAL.

A.2: George B. Thomas

Indicamos também o primeiro volume da edição 12 de "Cálculo" de George B. Thomas (THOMAS; WEIR; HASS, 2012).

A.3: Diva Marília Flemming

Indicamos também o livro "Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração" (FLEMMING; GONÇALVES, 2007).

A.4: Hamilton Luiz Guidorizzi

Idicamos também o livro "Um curso de Cálculo". (GUIDORIZZI, 2001)

Referências Bibliográficas

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração*. 6. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo*. 5. ed. [S.l.: s.n.], 2001. v. 1.

STEWART, J. *Cálculo*. 6. ed. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2009. v. 1.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo*. 12. ed. [S.l.: s.n.], 2012. v. 1.