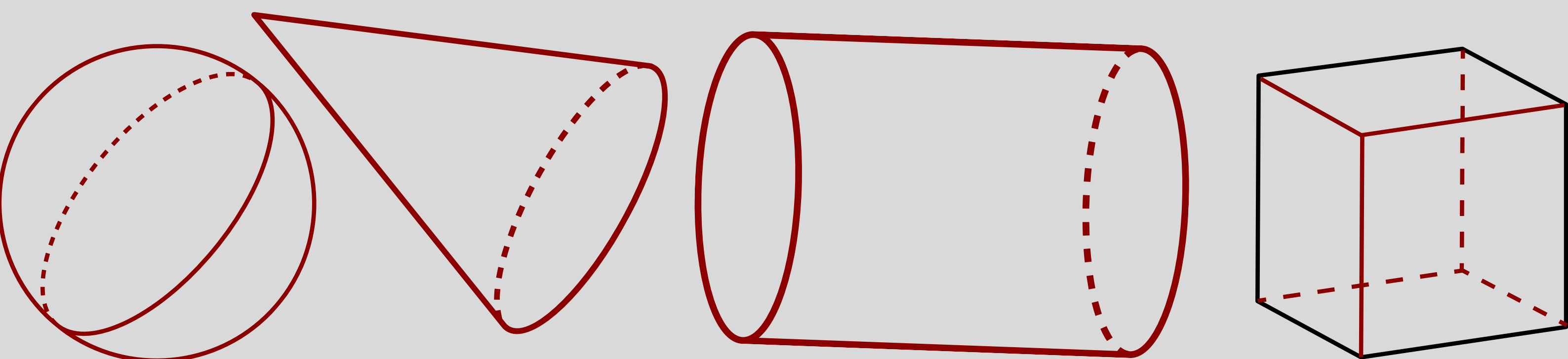
PET
Ciência e Tecnologia - UFAL
CONEXÕES DE SABERES

MANUAL DE SOBREVIVÊNCIA EM CALCULO 1

Módulo II

Marcus OLIVEIRA, Mário JUVÊNCIO, Matheus MONTEIRO.



Sumário

MSC1 Capítulo 1

Prefácio

1.1: Resumo

O presente manual tem por objetivo, a aprovação dos alunos matriculados nos cursos de exatas da Universidade Federal de Alagoas na disciplina de cálculo 1. Essa ideia surgiu da necessidade que o PET Ciência & Tecnologia tem de ajudar os ingressantes dos cursos nas disciplinas iniciais.

Todos os exercícios e assuntos presentes, foram retirados da 6ªed. do livro "Cálculo, James Stewart ", tomando base da metodologia apresentada pelos professores da universidade.

1.2: Agradecimentos

Nossos agradecimentos ficam a parte para o Centro de Tecnologia (CTEC-UFAL), pela locação da sala de permanência de nosso grupo; Para o Instituto de Matemática (IM-UFAL), pelo desempenho dos profissionais; E para a própria Universidade Federal de Alagoas(UFAL), pelo ensino público, referenciado e de qualidade para a comunidade acadêmica.

MSC1 Capítulo 2

Introdução

Neste capítulo, conheceremos a derivada: sua definição e comportamento, e também algumas regras que facilitarão nossos cálculos. Dentre elas, veremos a derivada de funções polinomiais, trigonométricas, a derivada de um produto e de um quociente e também a regra da cadeia.

MSC1 Capítulo 3

Derivadas e Taxas de Variação

Seja uma curva C representada pela equação y = f(x). Se quisermos encontrar a tangente a C em um ponto P(a, f(a)) considerando um ponto bem próximo Q(x, f(x)) com $x \neq a$. Podemos calcular a inclinação da reta secante (reta que intercepta a curva em um único ponto) PQ. Com isso, temos:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3.1}$$

Se obrigarmos Q a se aproximar de P, em outras palavras, obrigar x a se aproximar de a. Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos a tangente t como sendo a reta que passa por P e tem inclinação m.

Com isso, chegamos a definição de que a **reta tangente** a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a)$ é a reta que passa por P e tem inclinação:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3.2}$$

Para compreendermos essa definição, podemos recorrer a um exemplo.

Exemplo 1 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto P(1,1).

solução: temos aqui, $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo a inclinação é:

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \tag{3.3}$$

Reescrevendo o limite, nós chegamos em:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} \tag{3.4}$$

Lembrando que, como $x \to 1$, $x \neq 1$, daí

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} \tag{3.5}$$

e chegamos finalmente em:

$$\lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

A equação de uma reta possui a seguinte forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{3.6}$$

Onde m é o valor do coeficiente angular encontrado anteriormente, x_0 e y_0 são os valores iniciais definidos pelas questão, dessa forma, temos:

$$y - 1 = 2x - 2 \tag{3.7}$$

E com isso,chegamos a uma definição mais formal da derivada, que nos diz que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.8}$$

quando x estiver suficientemente próximo de a.

Saca só!

1. Sempre que a questão te pedir a derivada, use a função dada no problema, e aplique-a no limite da definição;
2. Para resolver o limite **SEMPRE** devemos simplificar o termo h do denominador, evitando assim, uma divisão por zero.

MSC1 Capítulo 4

Derivadas de Funções Polinomiais

Neste capítulo aprenderemos como derivar funções constantes, funções potências e funções polinomiais.

Vamos começar com a derivada da função constante:

$$f(x) = c$$

Tomando o limite, temos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0 \tag{4.1}$$

Na notação de Leibniz, escrevemos da seguinte forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0 \tag{4.2}$$

para as funções: x, x^2, x^3,...,x^n, nós temos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1 \tag{4.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x \tag{4.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) = 3x^2 \tag{4.5}$$

E dessa forma,chegamos a **REGRA DA POTÊNCIA**:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{(n-1)} \tag{4.6}$$

E se você, leitor, não confia em mim, vai dar uma olhada na demonstração na página 160 da edição usada para este manual; lá tá bem explicado o porquê deste resultado.

Dito isto, vamos a resolução de um exemplo:

Exemplo: Derive $\frac{1}{x^2}$:

Solução: Primeiro, devemos transformar essa fração em um polinômio com a cara x^n, dessa forma, usaremos a expressão:

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2} \tag{4.7}$$

] Aplicando a regra da potência, temos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-2}) = -2x^{-0,5} \tag{4.8}$$

Saca só!

1. Assim como os limites, as derivadas também apresentam continuidade, logo, é importante saber como elas se comportam e também suas propriedades;
2. Quando se tratar de uma expressão com vários termos, é mais fácil separá-la em termos menores e derivar um por um.

MSC1 Capítulo 5

Regra do Produto e Quociente

Após a regra da soma e da subtração e outras regras como a regra da multiplicação por uma constante, pode-se pensar que a regra da multiplicação de duas funções seguiria a mesmo padrão e dizer que "a derivada do produto é o produto das derivadas", bom.... **não é bem assim**. Note que se fosse verdade então se $f(x) = x$ e $g(x) = 5$ assim $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 0$ logo $f'(x)g'(x) = 0$, porém $(fg)(x) = 5x$ e $(fg)'(x) = 5$ e $5 \neq 0$.

A verdadeira regra do produto, que descreve a taxa de variação da multiplicação de duas funções pode ser vista a seguir [1]:

Se f e g forem funções diferenciáveis então podemos dizer que a regra do produto é:

$$\frac{\mathrm{d}[f(x)g(x)]}{\mathrm{d}x} = f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + g(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Outra notação utilizada é: $(uv)' = uv' + vu'$, onde u e v são as funções diferenciáveis.

Exemplo: Se $f(x) = 3x^2 + 1$ e $g(x) = 5x$, quem é $(fg)'(x)$?

Solução: Primeiramente quem é $(fg)(x)$? É a função que surge da multiplicação de f e g, então $(fg)(x) = (3x^2 + 1)(5x)$.

Talvez você pode estar tentado a fazer a distributiva para simplificar e depois derivar. Isso é um jeito viável para essa questão, mas imagine fazer isso com a multiplicação de funções complexas? Seria dificultoso e poderia acarretar em erros, então como

[1] Caso queira uma demostração indicamos a da edição do Stewart (2009, página 168) usada como base para esse módulos.

estamos falando da multiplicação de duas funções diferenciáveis usaremos a regra do produto:

$$(fg)'(x) = f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + g(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Onde $f'(x) = 6x$ e $g'(x) = 5$, então:

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$
$$(fg)'(x) = (3x^2 + 1)(5) + (5x)(6x)$$
$$(fg)'(x) = 15x^2 + 5 + 30x^2$$
$$(fg)'(x) = 45x^2 + 5$$

Da mesma maneira "**a derivada do quociente não é o quociente das derivadas** "[2]. Tem-se que para duas funções diferenciáveis onde $g(x) \neq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{[g(x)]^2}$$

Outra notação utilizada, onde u e v são as funções diferenciáveis e $v \neq 0$, é:

$$(u/v)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Exemplo: Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3 + 2$ quem é $(f/g)'(x)$?

Solução: Primeiramente quem é $(f/g)(x)$? É a função gerada a partir da divisão de f por g. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 2}$

[2] Caso queira uma demostração indicamos a da edição do Stewart (2009, página 171) usada como base para esse módulos.

Onde sabemos que $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 3x^2$. Portando como f e g são duas funções diferenciáveis, podemos usar a regra do quociente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{df}{dx} - f(x)\frac{dg}{dx}}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{(x^3 + 2)(2x) - (x^2)(3x^2)}{(x^3 + 2)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{2x^4 + 4x - 3x^4}{(x^3 + 2)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{4x - x^4}{(x^3 + 2)^2}$$

Saca só!

1. Separe a função que você está trabalhando em outras duas funções [$f(x)$ e $g(x)$], depois disso encontre a derivada dessas funções, para depois usar a regra. Isso torna mais difícil de se perder no meio do caminho e pode ser menos confuso também. Exemplo: $h(x) = x^2 e^x$ então podemos dizer que $f(x) = x^2$ e $g(x) = e^x$;
2. Cuidado para não se confundir com as constantes, se por exemplo encontrar $C(x) = (\alpha + \beta)x^2$, desde que não seja avisado antes que α e β sejam funções de x, pode-se utilizar a regra da multiplicação por constante;
3. Muitas vezes será mais fácil derivar uma fração pela regra da multiplicação, como? Exemplo: $f(x) = \dfrac{(2x + 4)}{(\sqrt{x} + 2)}$ que é a mesma coisa que $f(x) = (2x+4)(\sqrt{x}+2)^{-1}$, porém precisará do capítulo 7 para isso.
4. Veja as questões 9,11, 17,23, 28, 33, 43, 44, 45 e 51 do capítulo 3.2.

MSC1 Capítulo 6

Derivadas de funções trigonométricas

As dervidads trigonométricas Limites especiais trigonométricos Repetitividade do seno e cosseno

As derivadas trigonométricas, carregam a dificuldade que muitos têm em relação a trigonometria em si, caso esse seja seu caso preparamos uma parte especial para tratar dessas dificuldades no apêndice B.

As funções trigonométricas mais usuais são o $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, onde [1] $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ e $(\cos x)' = \operatorname{sen} x$, as suas derivadas são muito interessantes já tendem a se repetir a cada 4 ciclos como mostrado a seguir:

$$
\begin{aligned}
f &= \operatorname{sen} x & g &= \cos x \\
f' &= \cos x & g' &= -\operatorname{sen} x \\
f'' &= -\operatorname{sen} x & g'' &= -\cos x \\
f''' &= -\cos x & g''' &= \operatorname{sen} x \\
f'''' &= \operatorname{sen} x & g'''' &= \cos x
\end{aligned}
$$

Ou seja a n-ésima derivada de uma dessas funções, sendo n um múltiplo de 4, será ela mesma $f^{(n)} = \operatorname{sen} x$ e $g^{(n)} = \cos x$

[1] Em geral não trataremos das demostrações nesse capítulo, caso queira elas são feitas no capítulo 3.3 do livro do capítulo Stewart (2009, página 174)

Através da regra do quociente (ou produto) e das identidades trigonométricas dispostas no apêndice B podemos encontrar as demais derivadas:

Exemplo: Encontre a expressão para a derivada de $j(x) = \sec x$

Solução: Vamos utilizar a regra do quociente juntamente com as identidades $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ e que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, assim:

$$j(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Logo: Usando $f(x) = 1$ (constante) e $g(x) = \cos x$

Onde: $f'(x) = 0$ e $g'(x) = -\operatorname{sen} x$

$$j'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$j'(x) = \frac{\cos x \cdot 0 - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2}$$

$$j'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$$

As outras derivadas trigonométricas podem ser encontradas de maneira análoga, sugerimos que tente por exercício, abaixo estão todas as derivadas que são trabalhadas nesse capítulo:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -(\operatorname{cossec} x)^2$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = (\sec x)^2 \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

Outra coisa importante de se atentar são os limites fundamentais trigonométricos, entender eles é fundamental para entender as demostrações das derivadas trigonométricas:

$$\lim_{\theta \to 0} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} = \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0$$

Note que o argumento da função seno ou cosseno é o **MESMO** do denominador. Muitas vezes porém precisaremos manipular uma expressão dada para que chegue nesses limites fundamentais.

Exemplo: Calcule o limite a seguir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \sin \pi^2 x}{7x}$$

Solução: Perceba aqui que o denominador não é igual ao argumento do seno, logo não podemos aplicar o limite fundamental de primeira. Porém podemos manipular essa expressão para tal:

Porém o que devemos fazer? perceba que está faltando o termo π^2 no denominador para que ele se torne "parecido"com o argumento, podemos resolver isso multiplicando por 1 ou $\frac{\pi^2}{\pi^2}$, e a partir daí ir manipulando a expressão:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \sin \pi^2 x}{7x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3}{7} \cdot \frac{\pi^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sin \pi^2 x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\pi^2}{7} \left(\frac{\sin \pi^2 x}{\pi^2 x} \right)$$

Note agora a fração que contém o seno tem o denominador igual ao argumento do seno, vamos agora mostrar para o professor que essa fração é equivalente ao limite fundamental:

Usando $\theta = \pi^2 x$ temos que quando $x \to 0 \quad \theta \to 0$ portanto:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin \pi^2 x}{\pi^2 x}\right) = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right) = 1$$

Logo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\pi^2}{7}\left(\frac{\sin \pi^2 x}{\pi^2 x}\right) = \frac{3\pi^2}{7}$$

Saca só!

1. **Cuidado**, sempre confira se está usando radianos no argumento das funções trigonométricas;
2. **Não confunda** o quadrado de uma função trigonométrica com a função trigonométrica do quadrado do argumento. Exemplo: $\operatorname{sen}^2 x \neq \operatorname{sen} x^2$;

$$\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2 \qquad \operatorname{sen}(x)^2 = \operatorname{sen} x^2$$

$$(\operatorname{sen} \pi)^2 = (0)^2 \qquad \operatorname{sen} \pi^2 \approx -0,43$$

3. Esteja atento a possíveis utilizações de relações trigonométricas para simplificar os problemas;
4. Os exercícios propostos para essa etapa são 7, 12, 14, 15, 29, 34, 37, 41, 47, 49.

MSC1 Capítulo 7

Regra da Cadeia

Nas seções anteriores vimos como calcular as derivadas de funções do tipo $y = f(v) = \text{tg}(v)$ e $v = g(x) = x + 3$. Na maioria das situações nos deparamos com funções compostas, mas como calcular as derivadas de funções compostas do tipo $F = f(g(x))$? Para isso, precisamos utilizar a regra da cadeia. Regra de derivação de fundamental importância que será abordada neste capítulo.

A regra da cadeia nos diz que a derivada de uma função composta f(g(x)) em um ponto x é a $f'(g(x))$ multiplicada por $g'(x)$. Isto é, considerando a função composta $y = f(g(x))$, a regra da cadeia nos dá:

$$y' = \frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}(x)} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}(g(x))} \cdot \frac{\mathrm{d}(g(x))}{\mathrm{d}x}$$

Uma notação mais simples d pode ser utilizada. Tomando $y = f(u)$, sendo $u = g(x)$, temos:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

Esse conceito pode ser expandido para funções compostas por mais de uma função. Por exemplo, considerando uma função do tipo $y = f(g(u(v(z(x)))))$, a derivada de y é calculada usando a regra da cadeia:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

Uma forma "fácil"de aprender a regra da cadeia é observar que podemos interpretar a regra a partir da observação de que a derivada é aplicada de "fora para dentro". Por exemplo, abordando novamente a função composta do tipo $y = f(g(u(v(z(x)))))$, note que as funções que compõe a função composta já estão identificadas (g,u,v,z), assim como as variáveis. Podemos dividi-la nas seguintes funções:

$$y = f(g) \qquad g = g(u) \qquad u = u(v) \qquad v = (z) \qquad z = z(x)$$

Em seguida, calculamos a derivada de cada função em relação a variável correspondente:

$$\frac{dy}{dg}; \frac{dg}{du}; \frac{du}{dv}; \frac{dv}{dz}; \frac{dz}{dx}$$

Após calcular as derivadas, aplicamos a regra da cadeia:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} \cdot \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Saca só!

Podemos calcular a derivada de qualquer problema deste tipo realizando a seguinte metodologia:

Primeiro passo: identifique as funções e separe a função composta em várias funções de uma única variável;

Segundo passo: calcule a derivada de cada função em relação à variável correspondente;

Terceiro passo: multiplique as derivadas, como diz a regra da cadeia.

Note que a identificação das funções que compõe a função composta e o cálculo da derivada de cada função em relação à variável correspondente é uma metodologia muito útil para o cálculo de funções extremamente complicadas, reduzindo o tempo de resolução e a probabilidade de erro. Para aprender a regra da cadeia é necessário praticar bastante. Portanto, tente resolver o máximo de questões possíveis até tornar a regra intuitiva para funções simples, de modo que a metodologia acima seja aplicada apenas quando extremamente necessária. A resolução de questões no capítulo 8 aborda várias questões onde a regra da cadeia é aplicada.

MSC1 Capítulo 8

Resolução de questões

Neste momento, iremos responder algumas questões sobre os assuntos que foram abordados. É interessante que o aluno não se prenda a metodologia utilizada para responder as questões, e sim ficar atento a lógica por trás da resolução, relacionando-a com a teoria abordada nos livros tradicionais de cálculo. Dessa forma, você nunca esquecerá como responder uma boa e velha prova de cálculo 1.

Questão 1. Mostre que as retas normais à curva $y = (x^2 - 1)^2(x + 1)^3$ nos pontos onde ela toca o eixo das abscissas são verticais.

Resolução:

Como sabemos, uma reta normal à curva $y = f(x)$ deverá, também, ser normal à reta tangente da curva $y = f(x)$. Lembrando que a derivada de uma curva representa a inclinação da reta tangente em cada ponto da curva. Logo, podemos demonstrar que as retas normais à curva são verticais nos pontos onde $y = f(x)$ toca o eixo das abscissas através da derivada da função, uma vez que a reta tangente e reta normal à curva são ortogonais entre si.

Para encontrar a derivada de $y = f(x)$, devemos aplicar a regra do produto e a regra da cadeia. Observe que $y = f(x) = g(x)h(x)$, onde $g(x) = (x^2 - 1)^2$ e $h(x) = (x + 1)^3$.

Derivando g(x) e h(x) usando a regra da cadeia, obtemos:

$$g'(x) = 2(x^2 - 1)(2x) = 4x^3 - 4x$$

$$h'(x) = 3(x+1)^2$$

Aplicando a regra do produto, temos:

$$f'(x) = g(x)h'(x) + g'(x)h(x)$$

$$f'(x) = (x^2 - 1)^2 3(x+1)^2 + (4x^3 - 4x)(x+1)^3$$

Após determinar a expressão para a derivada, calculamos a derivada nos pontos em que a curva toca o eixo das abscissas, isto é, y = 0:

A curva toca o eixo das abscissas nos pontos em que $g(x) = 0$ e/ou $h(x) = 0$. Logo, as raízes de $f(x)$ são os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Calculando a derivada em $x = -1$ e $x = 1$, temos:

$$f'(-1) = 2(1-1)(2(-1))(-1+1)^3 + 3(-1+1)^2(1-1)^2 = 0$$

e

$$f'(1) = 2(1-1)(2)(1+1)^3 + 3(1+1)^2(1-1)^2 = 0$$

Portanto, como $f'(-1) = f'(1) = 0$, a reta tangente em x = -1 e x = 1 é horizontal. Como as retas tangentes e as retas normais à curva são ortogonais, a reta normal à curva nesses pontos são verticais.

Questão 2. Encontre a derivada da função $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{tg}(4x)}{1 + \operatorname{tg}(4x)}}$.

Resolução:

Para calcular a derivada de $f(x)$ devemos aplicar a regra da cadeia e a regra do quociente. Para facilitar a resolução deste problema, podemos reescrever $f(x)$ da seguinte forma:

$$f(x) = \left(\frac{1 - tg(4x)}{1 + tg(4x)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para resolver problemas da regra da cadeia, uma ideia é tentar reescrever a expressão em termos de funções de x. Note que $f(x)$ pode ser rescrito da seguinte forma:

$$f(x) = \left(\frac{1 - tg(4x)}{1 + tg(4x)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Logo, derivando, obtemos:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}\right)$$

sendo $u(x) = 1 - tg(4x)$ e $v(x) = 1 + tg(4x)$. Aplicando a regra da cadeia, temos:

$$u'(x) = -4sec^2(4x) \text{ e } v'(x) = 4sec^2(4x)$$

Substituindo, obtemos a seguinte expressão para a derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - tg(4x)}{1 + tg(4x)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{(1 + tg(4x))(-4sec^2(4x)) - (1 - tg(4x))(4sec^2(4x))}{(1 + tg(4x))^2}\right]$$

Simplificando,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + tg(4x)}{1 - tg(4x)}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{-8sec^2(4x)}{(1 + tg(4x))^2}\right]$$

Também podemos resolver através da substituição de variáveis e aplicar o conceito da regra da cadeia:

Tomando $u = 4(x)$ e $v = \dfrac{1 - tg(u)}{1 + tg(u)}$, pela regra da cadeia:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Assim, $f = \sqrt{v}$. Logo, temos:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(1+tgu)(-sec^2u)-(1-tgu)(sec^2u)}{(1+tgu)^2} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4$$

Portanto, temos:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-tg(4x)}{1+tg(4x)}}}\left[\frac{(1+tg(4x))(-sec^2(4x))-(1-tg(4x))(sec^2(4x))}{(1+tg(4x))^2}\right]4$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+tg(4x)}{1-tg(4x)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{-8sec^2(4x)}{(1+tg(4x))^2}\right]$$

Questão 3. Calcule a derivada de $y = \dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{3x}-a^{-3x}}$

Resolução:

Para quem tem dificuldade em resolver problemas deste tipo, envolvendo regra do quociente e a regra da cadeia, podemos utilizar a seguinte metodologia de resolução:

Tomando $g(x) = a^{3x} + a^{-3x}$ e $h(x) = a^{3x} - a^{-3x}$. Logo, $y = f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$. Aplicando a regra do quociente para $y = f(x)$, obtemos:

$$y' = \frac{h(x)g'(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$

$$g'(x) = 3a^{3x}\ln a - 3a^{-3x}\ln a$$

$$h'(x) = 3a^{3x}\ln a + 3a^{-3x}\ln a$$

Substituindo:

$$y' = \frac{(a^{3x}-a^{-3x})(3a^{3x}\ln a - 3a^{-3x}\ln a) - (a^{3x}+a^{-3x})(3a^{3x}\ln a + 3a^{-3x}\ln a)}{(a^{3x}-a^{-3x})^2}$$

Simplificando, temos:

$$y' = -12\frac{\ln a}{(a^{3x} - a^{-3x})^2}$$

Dividindo ambos os lados por $(a^{-3x})^2$, temos:

$$y' = -12\frac{\dfrac{\ln a}{(a^{-3x})^2}}{\left[\dfrac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^{-3x}}\right]^2} = -\frac{12a^{6x}\ln a}{(a^{6x} - 1)^2}$$

Uma forma mais fácil de tentar responder questões deste tipo é tentar manipular a expressão para simplificá-la e tornar o processo de resolução mais simples e fácil. Vejamos:

Dividindo o numerador e o denominador por a^{-3x}, temos:

$$y = \frac{\left(\dfrac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^{-3x}}\right)}{\left(\dfrac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^{-3x}}\right)} = \frac{\left(\dfrac{a^{3x}}{a^{-3x}} + 1\right)}{\left(\dfrac{a^{3x}}{a^{-3x}} - 1\right)}$$

$$y = \frac{a^{6x} + 1}{a^{6x} - 1}$$

Aplicando a regra da cadeia e a regra do quociente, obtemos:

$$y' = \frac{(a^{6x} - 1)(6a^{6x}\ln a) - (a^{6x} + 1)(6a^{6x}\ln a)}{(a^{6x} - 1)^2}$$

$$y' = -\frac{12a^{6x}\ln a}{(a^{6x} - 1)^2}$$

Questão 4. Obtenha a função $f'(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & \text{se } x > 1 \\ 2x; & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

Resolução:

Podemos avaliar as derivadas a partir da definição de derivada. Logo, temos:

A derivada de uma função $f(x)$ em relação à x é definida como

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

Como as funções x^2+1 e $2x$ são contínuas em todo os seu domínios e não apresentam "bicos", isto é, são curva "suaves", f(x) é diferenciável nos intervalos $(-\infty, 1)$ e $(1, \infty)$.

Logo, para $x+h>1$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{x^2+2xh+h^2+1-x^2-1}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{2xh+h^2}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x \end{aligned}$$

Para $x+h<1$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{2(x+h)-2x}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{2x+2h-2x}{h}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x)$ é definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x; & \text{se } x > 1 \\ 2; & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

Questão 5. Calcule a derivada de $y = \text{tg}[\text{sen}(\sqrt{\sec(x^2+1)})]$.

Resolução:

Tomando $u = \operatorname{sen}(\sqrt{\sec(x^2+1)})$, $y = \operatorname{tg}(u)$, $v = \sqrt{\sec(x^2+1)}$, $u = \operatorname{sen}(v)$, $w = \sec(x^2+1)$, $v = \sqrt{w}$, $z = x^2+1$, $w = \sec(z)$ e aplicando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Onde,

$$\frac{dy}{du} = \sec^2(u) = \sec^2(\operatorname{sen}(\sqrt{\sec(x^2+1)})) \qquad \frac{du}{dv} = \cos(v) = \cos(\sqrt{\sec(x^2+1)})$$

$$\frac{dv}{dw} = \frac{1}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2\sqrt{\sec(x^2+1)}} \qquad \frac{dw}{dz} = \sec(z)\operatorname{tg}(z) = \sec(x^2+1)\operatorname{tg}(x^2+1)$$

$$\frac{dz}{dx} = 2x$$

Logo, substituindo, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\sec^2(\operatorname{sen}(\sqrt{sec(x^2+1)}))\cos(\sqrt{\sec(x^2+1)})\sec(x^2+1)\operatorname{tg}(x^2+1)}{\sqrt{\sec(x^2+1)}}$$

Apêndices

$\mathbb{MSC}1$ *Apêndices* $\mathbb{A}$

Dicas de Leitura

A.1: James Stewart

Indicamos a versão utilizada nesta apostila, o primeiro volume da edição 6 de "Cálculo" de James Stewart (STEWART, 2009). Pode encontra-lo na Sibi UFAL.

A.2: George B. Thomas

Indicamos também o primeiro volume da edição 12 de "Cálculo" de George B. Thomas (THOMAS; WEIR; HASS, 2012).

A.3: Diva Marília Flemming

Indicamos também o livro "Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração" (FLEMMING; GONÇALVES, 2007).

A.4: Hamilton Luiz Guidorizzi

Idicamos também o livro "Um curso de Cálculo". (GUIDORIZZI, 2001)

$\mathbb{MSC}1$ *Apêndices* $\mathbb{B}$

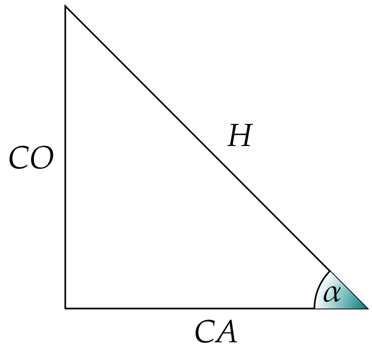
Trigonometria? O que eu faço?

Trigonometria é um assunto nebuloso para algumas pessoas, por ser um tópico que acham difícil ou até porque não tiveram tanto contato. Portanto vamos apresentar de maneira bem resumida alguns conceitos importantes, começando dos mais simples. Essa parte é uma parte inspirada no livro Fundamentos de matemática elementar 3 do Iezzi, lá você encontrará uma discussão muito bem detalhada e elaborada do assunto, com vários exercício, caso possível recomendamos fortemente para quem tem dificuldade no assunto. Agora, Vamos lá!

B.1: Do começo!

Talvez quando se fale de relações trigonométricas, a primeira coisa que pode vir a sua cabeça é: Triângulo retângulo. Isso é até porque é na maior parte das vezes o assunto que nos é introduzido essas relações.

Num triângulo retângulo (triângulo com um ângulo de 90 graus, ou ângulo reto), a Hipotenusa é definida como o lado oposto ao ângulo reto, e os catetos são os outros lados. Quando estamos trabalhando com um ângulo α (um ângulo qualquer) o cateto oposto é o lado oposto a este ângulo e o adjacente é o lado (sem ser a hipotenusa) que forma o ângulo.



O seno é a relação trigonométrica que relaciona o cateto oposto com a hipotenusa:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{CO}{H}$$

O cosseno é a relação trigonométrica que relaciona o cateto adjacente com a hipotenusa:

$$\cos\alpha = \frac{CA}{H}$$

A tangente é a relação trigonométrica que relaciona o cateto oposto com o adjacente:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CO}{CA}$$

B.2: Relação fundamental!

Pelo teorema de Pitágoras sabemos que $H^2 = CA^2 + CO^2$, porém podemos reescrever essa relação com as equações que já foram postas acima:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{CO}{H} \Longrightarrow CO = H \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{CA}{H} \Longrightarrow CA = H \cdot \cos\alpha$$

Portanto podemos dizer que, pelo teorema de Pitágoras:

$$
\begin{aligned}
H^2 &= (\operatorname{sen}\alpha \cdot H)^2 + (H \cdot \cos\alpha)^2 \\
H^2 &= \operatorname{sen}^2\alpha \cdot H^2 + H^2 \cdot \cos^2\alpha \\
\cancel{H^2} &= \cancel{H^2}(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) \\
1 &= \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha
\end{aligned}
$$

B.3: Relações entre funções trigonométricas

De maneira simples podemos correlacionar outras relações trigonométricas usuais a partir das que já achamos, e também claro com o triângulo retângulo (deixamos essa parte para vocês!)

$$
\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cossec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}
$$

Podemos utilizar as relações acima com a relação fundamental para construir as relações a seguir[1]:

$$
\sec^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + 1 \qquad \operatorname{cossec}^2\alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha
$$

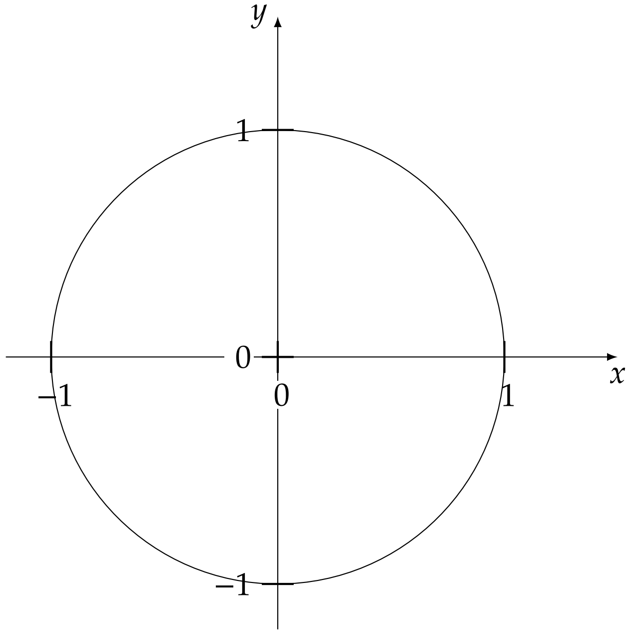
$$
\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}
$$

B.4: O círculo trigonométrico

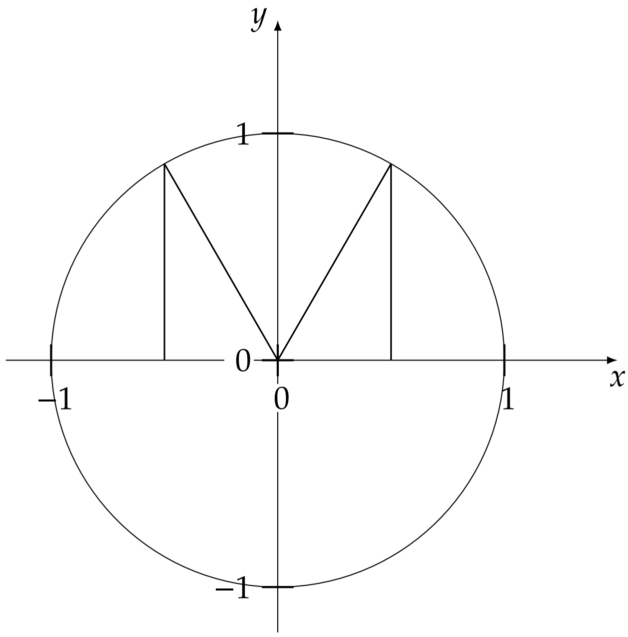
Abaixo temos o chamado circulo trigonométrico (de raio 1) onde podemos fazer algumas discussões sobre as relações trigonométricas. Note que ele pode ser dividido em 4 quadrantes, o quadrante 1 é o que tem ambos x e y positivos (lado direito superior),

[1]Também vamos deixar essa construção para vocês! Dica: tentem dividir a relação fundamental por seno, cosseno ou substituir resultados nas relações já conhecidas.

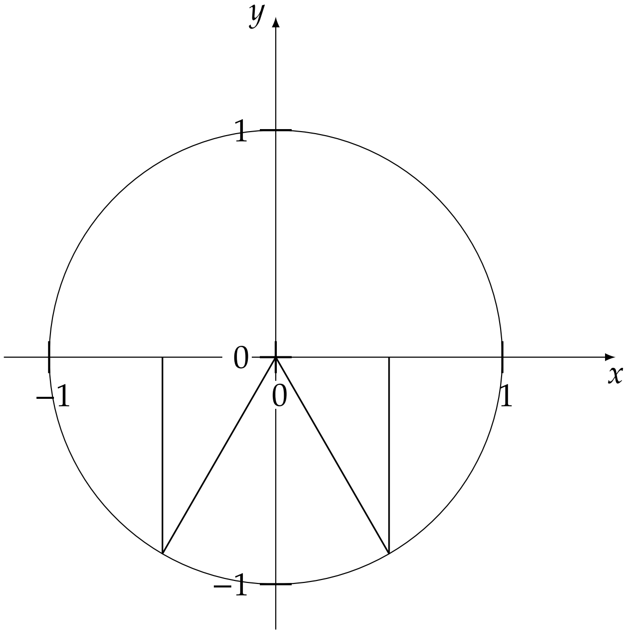
o quadrante 2 é o que tem x negativo e y positivo (lado esquerdo superior), o quadrante 3 é o que tem ambos x e y negativos (lado esquerdo inferior) e o quadrante 4 é o que tem x positivo e y negativo (lado direito inferior).



Observe o angulo formado pela retas que ligam os pontos no circulo trigonométrico, como sabemos o seno relacionasse com o cateto oposto a esse ângulo. Agora perceba que o cateto oposto é paralelo ao eixo y, de modo que o seno desse angulo corresponde a altura dessa reta paralela.



Ou seja nos quadrantes 1 e 2 o seno tem valor positivo, podemos fazer a mesma coisa com os quadrantes 3 e 4, mostrados abaixo:



Perceba então que o valor do seno para esses quadrantes é negativo. Pode-se fazer a mesma coisa para o cosseno, desde que lembre que ele é relacionado com o cateto adjacente a esse angulo, logo será relacionado com o eixo x. Deixaremos a construção da circulo trigonométrico do cosseno e da tangente para vocês. [2]

B.5: Funções trigonométricas

Agora vamos falar sobre a funções trigonométricas fora das relações de triângulos. Primeiramente vamos entender o que é uma função periódica:

Uma **Função periódica** é aquela que a imagem é sempre um mesmo valor K, para todo acréscimo de um número p, que é o menor número que causa esse efeito, denominado período. Matematicamente temos que $f(x + np) = f(x) = f(x + 0 \cdot p) = K$ onde np é um múltiplo de p.

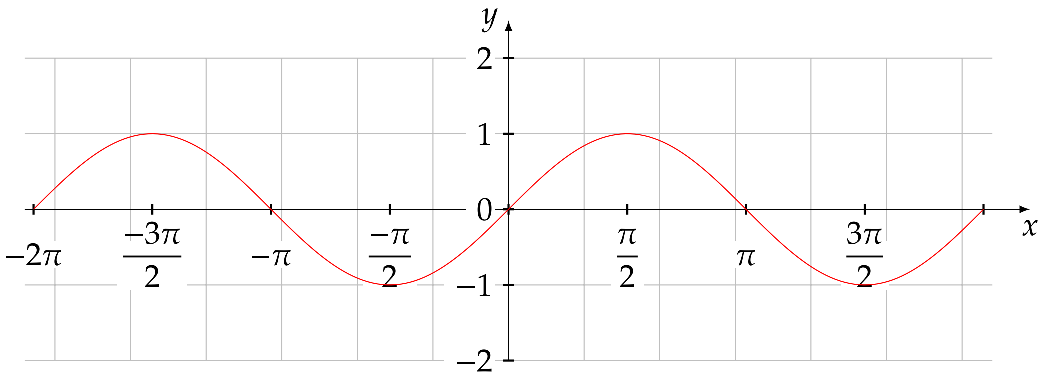
As funções trigonométricas são uma das principais funções periódicas, aqui vamos

[2] Dica, para a tangente use a relação de $\operatorname{sen}\alpha / \cos\alpha$ e estude os sinais dessa divisão para cada quadrante.

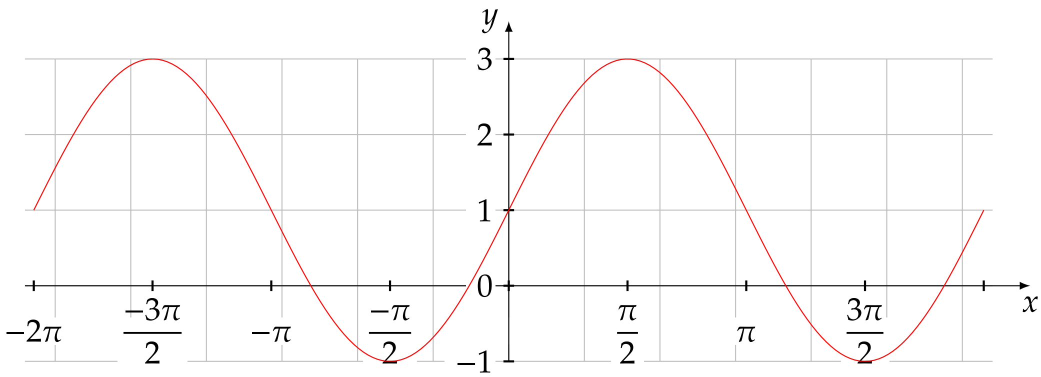
discutir um pouco da função seno e função cosseno.

Função seno

A função seno pode ser definida como $f(x) = \pm a \pm b \cdot \text{sen}(\pm cx \pm d)$, e você pode até ficar assustado, mas não precisa! A forma com a = d = 0, e b = x = 1, $f(x) = \text{sen}(x)$, é a forma mais simples dessa função e pode ser vista a seguir:



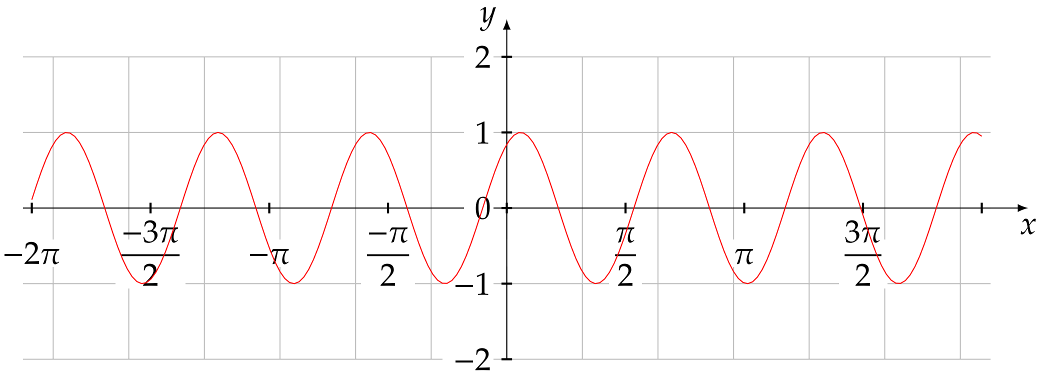
Note que os valores dessa função estão entre 1 e -1, e que configuram uma periodicidade. A faixa de valores que a função vai abranger é definido pela amplitude ou "b", como temos a amplitude b = 1, então a função vai 1 unidade para cima e uma unidade para baixo,o valor a vai deslocar o gráfico verticalmente. A seguir vemos o gráfico do seno com a = 1 e b = 2, $f(x) = 1 + 2\,\text{sen}(x)$[3]



Os parâmetros c e d correspondem aos que influenciam o período da função e o deslocamento na horizontal, respectivamente. Lembre que o período é aquele número p onde o valor vai repetir para todos os números kp, perceba que para a função $f(x) = \text{sen}(x)$ esse valor é 2π então para alterar o período pode-se fazer o seguinte

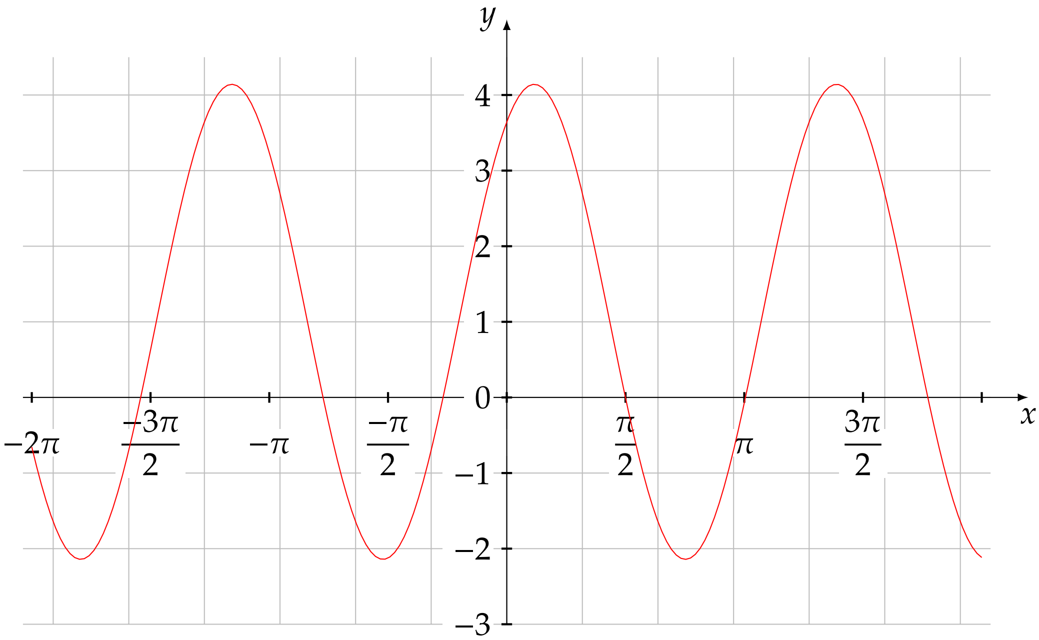
[3]Tente visualizar em algum software gráfico a função seno com a e b negativos

$p = \dfrac{2\pi}{c}$. A seguir mostramos o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x + 1)$



Note agora que o período diminuiu (maior frequência de ocorrências), isso aconteceu já que c = π então p = 2 (< 2π).

Exercício 1 : Explique o comportamento de $f(\theta) = 1 + \pi \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi\theta}{2} + 1\right)$.



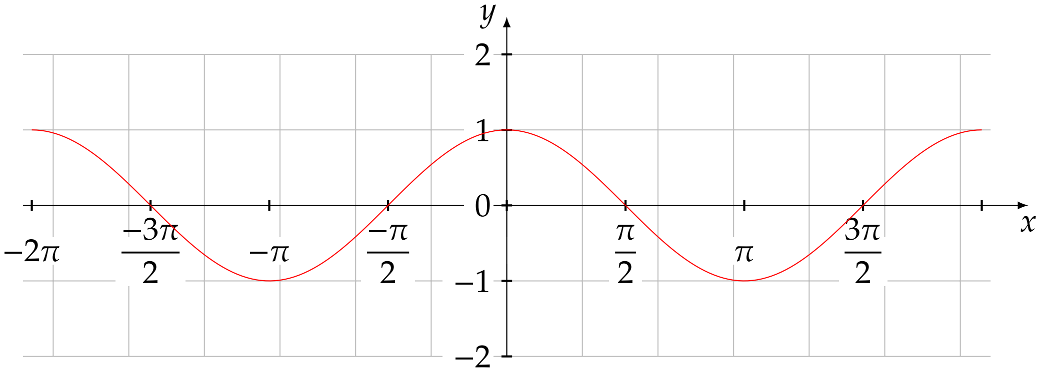
Exercício 2 : O valor de d = 1 indica um descocamento de 1 unidade? Justifique

Exercício 3 : Um valor de d negativo significa um deslocamento horizontal em que sentido?

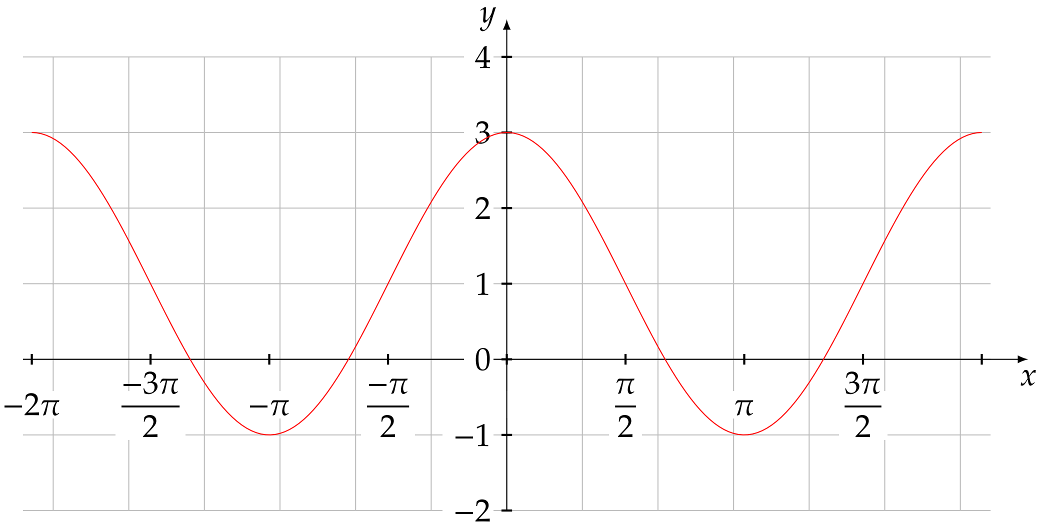
Exercício 4 : Em que impacta um b negativo?

Função Cosseno

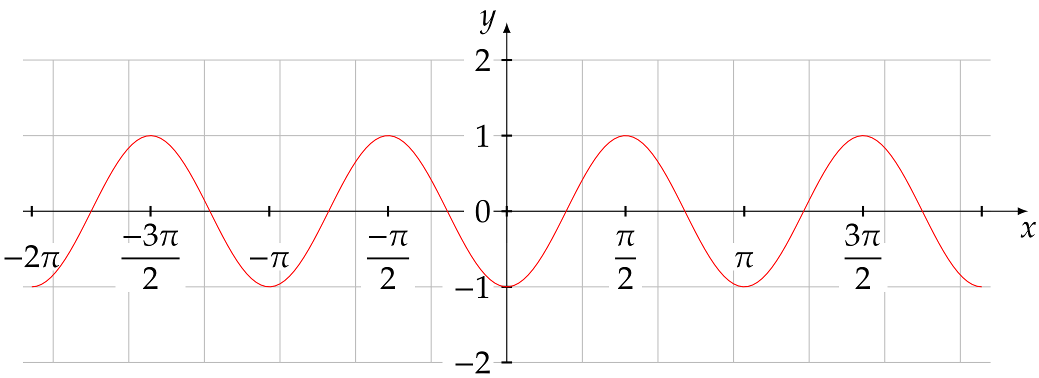
A função cosseno pode ser definida da maneira análoga como mostrado a seguir $f(x) = \pm a \pm b \cdot \cos(\pm cx \pm d)$. O gráfico a seguir representa $f(x) = \cos(x)$



De maneira análoga se mexermos em a e b, alteramos a amplitude e o descolamento vertical respectivamente, veja isso no gráfico de $f(x) = 1 + 2\cos(x)$.



Do mesmo jeito posso influenciar o período e o deslocamento horizontal mexendo nos parâmetros c e d. A seguir veja o exemplo de $f(x) = \cos(2x + \pi)$.



Exercício: Notem que no exemplo acima há um parâmetro d envolvido $d = \pi$, explique o porquê de parecer não haver nenhum deslocamento. [4]

B.6: Transformações

As transformações mais usuais podem ser vistas abaixo:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \qquad \operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$

$\cos(2a)$ também pode ser entendido como $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$ [5].Outra relação de soma e subtração importante é a da tangente, porém não a use caso $\alpha = \frac{\pi}{2}+k\pi, \beta = \frac{\pi}{2}+k\pi$ ou no caso da soma $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}+k\pi$ e para diferença $\alpha-\beta = \frac{\pi}{2}+k\pi$:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Para acabar vamos falar de:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{2}$$

[4]Dica: Dê uma olhada em c.
[5]Tente chegar a essas expressões pela relação fundamental

Referências Bibliográficas

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração*. 6. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo*. 5. ed. [S.l.: s.n.], 2001. v. 1.

IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria*. [S.l.]: Atual, 2013.

STEWART, J. *Cálculo*. 6. ed. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2009. v. 1.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo*. 12. ed. [S.l.: s.n.], 2012. v. 1.